С. Г. Пятков, Об одном уравнении составного типа, *Дифференц. уравнения*, 1980, том 16, номер 1, 117–123

ЯНВАРЬ 1980 г., ТОМ XVI, № 1

УДК 517.958:53

С. Г. ПЯТКОВ

ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ СОСТАВНОГО ТИПА

В области $D=(0,\ X_0)\times(0,\ Y_0)\times(0,\ T)$ рассматривается уравнение

$$Lu = D_x^3 u + D_y^3 u + u_t + u\,(u_x + u_y) = f, \tag{1}$$

где D_x^n, D_y^k соответственно $\dfrac{\partial^n}{\partial x^n}$, $\dfrac{\partial^k}{\partial y^k}$, которое есть уравнение составного типа, и его можно рассматривать как некоторый двухмерный аналог уравнения Кортевега де Фриза [1, 5].

Пусть $\Omega=(0,\ X_0)\times(0,\ Y_0)$, $\partial\Omega$ — граница области Ω, $\gamma=\partial\Omega\times(0,\ T)$. В данной работе рассмотрим для уравнения (1) следующую начально-краевую задачу.

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области Ω такое, что

$$u|_\gamma = 0,\ u_x|_{x=X_0} = u_y|_{y=Y_0} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x). \tag{3}$$

Рассмотрим в области Ω уравнение

$$L_1 u = D_x^3 e^{\lambda(x+y)} D_x^3 u + D_y^3 e^{\lambda(x+y)} D_y^3 u = f_1 \tag{4}$$

и краевую задачу.

Найти решение (4) в области Ω такое, что u удовлетворяет краевым условиям (2) и

$$D_x^3 u|_\gamma = D_y^3 u|_\gamma = D_x^4 u|_{x=0} = D_y^4 u|_{y=0} = 0. \tag{5}$$

Обозначим через H пространство функций, полученное замыканием функций из $C^6(\bar{\Omega})$, удовлетворяющих краевым условиям (2), (5), по норме

$$\|u\|_H = \|u\|_{W_2^6(\Omega)},$$

где через W_2^k обозначено пространство С. Л. Соболева [2]. Имеет место

Лемма. *Существует полная в H счетная система собственных функций оператора L_1.*

Доказательство. Исследуем разрешимость задачи (4), (2), (5) ($f_1\in L^2(\Omega)$) методом Галеркина, используя собственные функции оператора $D_y^3 e^{\lambda y} D_y^3 u$. Далее рассматриваем уравнение $u - kL_1^{-1}u = 0$ и применяем теоремы Фредгольма (здесь L_1^{-1} — самосопряженный и вполне непрерывный оператор, как оператор из H в H).

Как известно [3], имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_2^k(\Omega)} \leqslant c\,\|u\|^{\theta}_{W_2^m(\Omega)}\,\|u\|^{1-\theta}_{W_2^s(\Omega)}, \tag{6}$$

где $k = \theta m + (1 - \theta) s$; $\theta \in (0, 1)$; k, m, s — целые положительные числа. Имеет место

Теорема. *Пусть* $f \in L^2(0, T; W_2^2(\Omega))$, $f|_\gamma = f_x|_{x=X_0} = f_y|_{y=Y_0} = 0$, $u_0 \in W_2^3(\Omega)$ *и* u_0 *удовлетворяет краевым условиям (2). Тогда существует и единственно решение задачи (1), (2), (3) такое, что*

$$u \in L^2(0, T; W_2^4(\Omega)), \; u_t \in L^2(0, T; W_2^1(\Omega)). \tag{7}$$

Доказательство. Рассмотрим «возмущенное» уравнение

$$L_\varepsilon u^\varepsilon = -\varepsilon L_1 u^\varepsilon + L u^\varepsilon = f. \tag{8}$$

Ищем приближенное решение в виде

$$u^m = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\, w_i(x, y),$$

где w_i — собственные функции оператора L_1 из H, а g_{im} определяются из условий

$$(L_\varepsilon u^m, w_j) = (f, w_j) = \int_\Omega f w_j d\Omega \; (1 \leqslant j \leqslant m), \tag{9}$$

$$g_{im}|_{t=0} = \alpha_{im}, \tag{10}$$

$$u_0^m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im} w_i \xrightarrow[m\to\infty]{} u_0^\varepsilon \text{ в } H,$$

где $u_0^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} u_0$ в $W_2^3(\Omega)$.

Теоремы существования для систем обыкновенных дифференциальных уравнений гарантируют нам разрешимость задачи (9), (10) на некотором интервале $[0, t_m]$. Априорные оценки показывают, что $t_m = T$. Умножая (9) на g_{jm}, суммируя по j и интегрируя по частям, получаем оценку

$$\|u^m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|u^m\|_{L^2(0,T;W_2^3(\Omega))} \leqslant c\,(\|f\|_{L^2(D)} + \|u_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}),$$

с помощью которой легко получаем

$$\|u_t^m\|_{L^2(D)} + \|u^m\|_{L^2(0,T;W_2^6(\Omega))} \leqslant c\,(\|f\|_{L^2(D)} + \|u_0^\varepsilon\|_{W_2^3(\Omega)}). \tag{11}$$

Отсюда следует, что существует решение задачи (8), (2), (3), (5).

Получим априорные оценки, равномерные по ε. Опустим временно индекс ε в (8). Умножим (8) на u и проинтегрируем по Ω, имеем

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant c_2\,(\|f\|_{L^2(D)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}), \tag{12}$$

$$\sqrt{\varepsilon}\left(\left\|D_x^3 u \exp\left\{\frac{\lambda}{2}(x+y)\right\}\right\|_{L^2(D)} + \left\|D_y^3 u \exp\left\{\frac{\lambda}{2}(x+y)\right\}\right\|_{L^2(D)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant c_1\,(\|f\|_{L^2(D)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}). \tag{13}$$

Умножая (8) на $(x+y)\,u$, интегрируя по Ω и используя (12), (13), (6) [3, теорема 2.3], получаем

$$\|u\|_{L^2(0,t;W_2^1(\Omega))} \leqslant (c_3 + \sqrt{\varepsilon}\, c_4(\lambda)), \tag{14}$$

где c_3 не зависит от λ.

Умножим (8) на $-L_1 u$ и проинтегрируем по Ω. Интегрируя от 0 до t, получаем

$$\int_0^t (L_1 u, L_1 u)(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2}\int_\Omega (u_{xxx}^2 + u_{yyy}^2) \exp\{\lambda(x+y)\}\, d\Omega +$$

$$+\frac{1}{2}\lambda \int_0^t\int_\Omega [(D_x^4 u)^2 + (D_y^4 u)^2 + (D_x^3 D_y u)^2 + (D_y^3 D_x u)^2] \times$$

$$\times \exp\{\lambda(x+y)\}\, d\Omega d\tau \leqslant \|u_0^\varepsilon\|^2_{W_2^3(\Omega)} c_6 +$$

$$+ c_5 \left| \int_0^t\int_\Omega \lambda^3 (u_{xxx}^2 + u_{yyy}^2) \exp\{\lambda(x+y)\}\, d\Omega d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int_0^t\int_\Omega u(u_x + u_y) L_1 u\, d\Omega d\tau \right| + \left| \int_0^t\int_\Omega f L_1 u\, d\Omega d\tau \right|. \tag{15}$$

Далее воспользуемся неравенством

$$\left\| u \exp\left\{\frac{\lambda}{4}(x+y)\right\}\right\|_{L^4(\Omega)} \leqslant c_7 \left(\int_\Omega u^2 \exp\{2\delta(x+y)\}\, d\Omega\right)^{1/4} \times$$

$$\times \left(\int_\Omega (u_x^2 + u_y^2 + c_8(\lambda) u^2) \exp\{(\lambda - 2\delta)(x+y)\}\, d\Omega\right)^{1/4}, \tag{16}$$

где c_7 не зависит от λ, $u \in W_2^1(\Omega)$ [4].

Оценим интеграл $\left| \int_0^t\int_\Omega u u_x D_x^3 \exp\{\lambda(x+y)\} D_x^3 u\, d\Omega d\tau \right|$:

$$\left| \int_0^t\int_\Omega u u_x D_x^3 \exp\{\lambda(x+y)\} D_x^3 u\, d\Omega d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_0^t\int_\Omega D_x^4 u \exp\{\lambda(x+y)\} (u u_{xxx} + 3 u_x u_{xx})\, d\Omega d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int_0^t\int_\Omega D_x^3 u \lambda \exp\{\lambda(x+y)\} (u u_{xxx} + 3 u_x u_{xx})\, d\Omega d\tau \right|.$$

Используя (6), (12), (14), получаем

$$\left| \int_0^t\int_\Omega D_x^3 u \lambda (u u_{xxx} + 3 u_x u_{xx}) \exp\{\lambda(x+y)\}\, d\Omega d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \delta_2 \int_0^t \|u\|^2_{H^4(\Omega)}\, d\tau + c_9(\delta_2, \lambda), \tag{17}$$

где $\delta_2 > 0$, $c_9(\delta_2, \lambda) \xrightarrow[\delta_2 \to 0]{} \infty$, $\|u\|_{H^k(\Omega)} = \|u\|_{W_2^k(\Omega)}$.

Оценим $\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \exp\{\lambda(x+y)\} D_x^4 uuu_{xxx} d\Omega d\tau \equiv J_1$,

$$|J_1| \leqslant \Big(\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \exp\{\lambda(x+y)\}(D_x^4 u)^2\, d\Omega d\tau\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u^4 d\Omega d\tau\Big)^{1/4} \times$$

$$\times\Big(\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{xxx}^4 \exp\{2\lambda(x+y)\}\, d\Omega d\tau\Big)^{1/4}. \qquad (18)$$

На основании (16)

$$\Big(\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{xxx}^4 \exp\{2\lambda(x+y)\}\, d\Omega d\tau\Big)^{1/4} \leqslant$$

$$\leqslant c_{10} \operatorname*{vrai\,max}_{\tau\in(0,t)}\Big(\int\limits_\Omega u_{xxx}^2 \exp\{\lambda(x+y)\}\, d\Omega\Big)^{1/4} \times$$

$$\times\Big(\int\limits_0^t\int\limits_\Omega ((D_x^4 u)^2 + (D_x^3 D_y u)^2 + c_{11}(\lambda)\ u_{xxx}^2)\exp\{\lambda(x+y)\}\, d\Omega d\tau)\Big)^{1/4}, \qquad (19)$$

откуда имеем

$$|J_1| \leqslant \delta_1 \operatorname*{vrai\,max}_{\tau\in(0,t)}\Big(\int\limits_\Omega u_{xxx}^2 \exp\{\lambda(x+y)\}\, d\Omega\Big) + (c_{12}(\delta_1) +$$

$$+ c_{13}(\delta_1,\ \varepsilon,\ \lambda))\int\limits_0^t\int\limits_\Omega ((D_x^4 u)^2 + (D_x^3 D_y u)^2)\exp\{\lambda(x+y)\}\, d\Omega d\tau +$$

$$+ c_{13}(\lambda)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{xxx}^2 \exp\{\lambda(x+y)\}\, d\Omega d\tau, \qquad (20)$$

где $c_{12}(\delta_1)$ не зависит от λ.

Используя (6), получаем

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega c_{13}(\lambda)\, u_{xxx}^2 \exp\{\lambda(x+y)\}\, d\Omega d\tau \leqslant \delta_2 \int\limits_0^t \|u\|^2_{H^4(\Omega)}(\tau)\, d\tau + c_{14}(\delta_2,\ \lambda). \qquad (21)$$

Оценим интеграл $\int\limits_0^t\int\limits_\Omega D_x^4 u \exp\{\lambda(x+y)\} u_x u_{xx} d\Omega d\tau = J_2$,

$$|J_2| \leqslant \Big(\int\limits_0^t\int\limits_\Omega D_x^4 u \exp\{\lambda(x+y)\}\ d\Omega d\tau\Big)^{1/2} \times$$

$$\times\Big(\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \exp\{\lambda(x+y)\}\, u_x^2 u_{xx}^2 d\Omega d\tau\Big)^{1/2},$$

имеем

$$\int\limits_\Omega uu_x u_{xx} u_{xxx} \exp\{\lambda(x+y)\}\, d\Omega = -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u_{xx}^2 u_x^2 \exp\{\lambda(x+y)\}\, d\Omega -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_\Omega uu_{xx}^3 \exp\{\lambda(x+y)\}\, d\Omega - \frac{1}{2}\ \lambda\int\limits_\Omega u_{xx}^2 uu_x \exp\{\lambda(x+y)\}\, d\Omega.$$

Отсюда

$$c_{15}\left(\int_0^t\int_\Omega u_{xx}^2 u_x^2 \exp\{\lambda(x+y)\}\, d\Omega d\tau\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_0^t\int_\Omega u^2 u_{xxx}^2 \exp\{\lambda(x+y)\}\, d\Omega d\tau\right)^{1/2} +$$

$$+\left(\int_0^t\int_\Omega |u u_{xx}^3| \exp\{\lambda(x+y)\}\, d\Omega d\tau\right)^{1/2} +$$

$$+\lambda^{1/2}\left(\int_0^t\int_\Omega |u_{xx}^2 u u_x| \exp\{\lambda(x+y)\}\, d\Omega d\tau\right)^{1/2},$$

$$\left(\int_0^t\int_\Omega |u_{xx}^3 u| \exp\{\lambda(x+y)\}\, d\Omega d\tau\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_0^t\int_\Omega u_{xx}^4 \exp\left\{\frac{4}{3}\lambda(x+y)\right\} d\Omega d\tau\right)^{3/8}\left(\int_0^t\int_\Omega u^4 d\Omega d\tau\right)^{1/8},$$

$$\left(\int_0^t\int_\Omega u_{xx}^4 \exp\left\{\frac{4}{3}\lambda(x+y)\right\} d\Omega d\tau\right)^{3/8} \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname*{vrai\,max}_{\tau\in(0,t)}\left(\int_\Omega ((D_x^3 u)^2 + u_{xxy}^2 + c_{16}(\lambda)\, u_{xx}^2) \exp\{\lambda(x+y)\}\, d\Omega\right)^{3/8} \times$$

$$\times\left(\int_0^t\int_\Omega u_{xx}^2 \exp\left\{\frac{\lambda}{3}(x+y)\right\} d\Omega d\tau\right)^{3/8}.$$

Интегрируя по частям, используя (6), (14), получаем, что

$$\left(\int_0^t\int_\Omega u_{xx}^2 \exp\left\{\frac{\lambda}{3}(x+y)\right\} d\Omega d\tau\right)^{3/8} \leqslant \delta_1\left(\int_0^t \|u\|^2_{H^4(\Omega)}(\tau)\, d\tau\right)^{1/8} +$$

$$+ c_{17}(\delta_1, \lambda) + (c_{18} + c_{19}(\lambda, \varepsilon))\left(\int_0^t\int_\Omega \sum_{|\alpha|=4} (D^\alpha u)^2 \exp\{\lambda(x+y)\}\, d\Omega d\tau\right)^{1/8},$$

где c_{18} не зависит от λ, $c_{19}(\lambda, \varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$.

Аналогично оцениваются все остальные члены в выражении $\int_0^t\int_\Omega u(u_x + u_y)\, L_1 u\, d\Omega d\tau$. Таким образом, получаем

$$\int_0^t (L_1 u, L_1 u)\, d\tau + \frac{1}{2}\int_\Omega (u_{xxx}^2 + u_{yyy}^2) \exp\{\lambda(x+y)\}\, d\Omega +$$

$$+ M\lambda \int_0^t\int_\Omega [(D_x^4 u)^2 + (D_y^4 u)^2 + (D_x^3 D_y u)^2 + (D_y^3 D_x u)^2] \exp\{\lambda(x+y)\}\, d\Omega d\tau \leqslant$$

$$\leqslant a_1\delta_1 \operatorname*{vrai\,max}_{\tau\in(0,t)} \int_\Omega \exp\{\lambda(x+y)\} \sum_{|\alpha|=3} (D^\alpha u)^2\, d\Omega + a_2(\delta_1, \delta_2, \lambda) +$$

$$+\delta_2 a_3 \int_0^t \|u\|^2_{H^4(\Omega)}(\tau)\,d\tau + (a_5 + a_6(\lambda,\ \varepsilon)) \times$$

$$\times \int_0^t\int_\Omega \sum_{|\alpha|=4} (D^\alpha u)^2 \exp\{\lambda(x-y)\}\,d\Omega d\tau, \tag{22}$$

где $a_2(\delta_1,\ \delta_2,\ \lambda) \xrightarrow[\delta_1,\delta_2\to 0]{} \infty$; $a_1,\ a_5$ не зависят от λ, $a_6(\lambda,\ \varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$. Запишем (22) в виде

$$\varepsilon \int_0^t (L_1 u,\ L_1 u)\,d\tau + \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i=1}^3 \left(D_x^i\left(\exp\left\{\frac{\lambda}{2}(x+y)\right\} u\right)\right)^2 +$$

$$+\left(D_y^i\left(\exp\left\{\frac{\lambda}{2}(x+y)\right\} u\right)\right)^2 d\Omega +$$

$$+ M\lambda \int_0^t\int_\Omega \sum_{i=1}^4 \left(D_x^i\left(\exp\left\{\frac{\lambda}{2}(x+y)\right\} u\right)\right)^2 +$$

$$+\left(D_y^i\left(\exp\left\{\frac{\lambda}{2}(x+y)\right\} u\right)\right)^2 d\Omega d\tau \leqslant$$

$$\leqslant a_1\delta_1 \operatorname*{vrai\,max}_{\tau\in(0,t)} \int_\Omega \sum_{|\alpha|=3} \left(D^\alpha\left(\exp\left\{\frac{\lambda}{2}(x+y)\right\} u\right)\right)^2 d\Omega +$$

$$+ a_7(\lambda) \operatorname*{vrai\,max}_{\tau\in(0,t)} \left\|u \exp\left\{\frac{\lambda}{2}(x+y)\right\}\right\|^2_{H^2(\Omega)} +$$

$$+ (a_5(\delta_1) + a_6(\lambda,\ \varepsilon)) \int_0^t \left\|u \exp\left\{\frac{\lambda}{2}(x+y)\right\}\right\|^2_{H^4(\Omega)} d\tau +$$

$$+ a_8(\lambda) \int_0^t \left\|u \exp\left\{\frac{\lambda}{2}(x+y)\right\}\right\|^2_{H^3(\Omega)} d\tau +$$

$$+ \delta_2 \int_0^t \left\|u \exp\left\{\frac{\lambda}{2}(x+y)\right\}\right\|^2_{H^4(\Omega)} d\tau. \tag{23}$$

Возьмем $\delta_1,\ \delta_2,\ \varepsilon$ достаточно малыми, а λ достаточно большим. Используя (6), теорему (2.3) в [3], получаем из (23) неравенство

$$M_1\varepsilon \left\|u \exp\left\{\frac{\lambda}{2}(x+y)\right\}\right\|^2_{L^2(0,t;H^6(\Omega))} +$$

$$+ M_2 \int_\Omega \sum_{i=1}^3 \left(D_x^i \exp\left\{\frac{\lambda}{2}(x+y)\right\} u\right)^2 + \left(D_y^i \exp\left\{\frac{\lambda}{2}(x+y)\right\} u\right)^2 d\Omega +$$

$$+ M_3 \int_0^t\int_\Omega \sum_{i=1}^4 \left(\left(D_x^i \exp\left\{\frac{\lambda}{2}(x+y)\right\} u\right)^2 +\right.$$

$$\left.+\left(D_y^i \exp\left\{\frac{\lambda}{2}(x+y)\right\} u\right)^2\right) d\Omega d\tau \leqslant$$

$$\leqslant M_4 + \gamma \operatorname*{vrai\,max}_{\tau\in(0,t)} \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \left(D_x^i \exp\left\{\frac{\lambda}{2}\,(x+y)\right\} u\right)^2 +$$

$$+ \left(D_y^i \exp\left\{\frac{\lambda}{2}\,(x+y)\right\} u\right)^2 d\Omega, \tag{24}$$

где $\gamma \leqslant M_2/2$, M_4 зависит от $\|u_0\|^2_{H^3(\Omega)}$, $\|f\|^2_{L^2(0,T;W_2^2(\Omega))}$. Из (24) имеем

$$\sqrt{\varepsilon}\,\|u^\varepsilon\|_{L^2(0,T;W_2^6)} \leqslant b_1,$$

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H^3(\Omega))} + \|u^\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^4(\Omega))} \leqslant b_2. \tag{25}$$

Умножая (8) на u_t^ε, получаем

$$\|u_t^\varepsilon\|_{L^2(D)} \leqslant b_3. \tag{26}$$

Из оценок (25), (26) следует, что существует решение задачи (1), (2), (3). Покажем единственность.

Пусть u_1, u_2 — решения задачи (1), (2), (3), $\omega = u_1 - u_2$, тогда имеем

$$\int_\Omega (Lu_1 - Lu_2)(u_1 - u_2)\, d\Omega = 0.$$

Интегрируя по частям и используя лемму Гронуолла, получаем $\omega \equiv 0$.

Литература

1. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах.—ДАН СССР, 1970, 192, № 4, с. 753—756.
2. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Л., ЛГУ, 1950, 255 с.
3. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М., Мир, 1971, 372 с.
4. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М., Наука, 1967, 376 с.
5. Джураев Т. Д., Иргашев Ю. О краевой задаче Каттаврига для нелинейных уравнений третьего порядка с кратными характеристиками.— В сб.: Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения. Ташкент, ФАН, 1976, с. 141—154.

Поступила в редакцию
3 июля 1979 г.

Институт математики
СО АН СССР