



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Смирнов, Эллиптический бризер нелинейного уравнения Шредингера,  
*Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2012, том 398, 209–222

<https://www.mathnet.ru/zns15203>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.89

15 мая 2025 г., 01:04:47



А. О. Смирнов

## ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ БРИЗЕР НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

### ВВЕДЕНИЕ

В последнее время особый интерес стали вызывать “странные волны” (freaks waves) или “волны-убийцы” (rogue waves), представляющие собой локальный кратковременный рост амплитуды волны, либо на поверхности глубокой воды, либо в оптическом волноводе или в других средах [1–3]. Издание [1] – это специализированный выпуск Европейского физического журнала, целиком посвященный различным аспектам проблематики “странных волн”. В качестве иллюстрации многочисленности областей приложения “странных волн” можно привести некоторые из заголовков статей этого сборника: “Rogue edge waves in the ocean”, “Freak waves in laboratory and space plasmas. Freak waves in plasmas”, “On the statistical interpretation of optical rogue waves”, “Could rogue waves be used as efficient weapons against enemy ships?” Кроме того, оказалось, что “волны-убийцы” встречаются и в экономике [4].

При изучении “странных волн” обычно рассматривают нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$i\psi_\xi + \frac{1}{2}\psi_{\tau\tau} + |\psi|^2\psi = 0, \quad (1)$$

а при выборе точных решений обращаются к солитону Перегринна [3] или бризеру Ахмедиева [2, 3, 5, 6]. Эллиптические решения Ахмедиева [6]

$$\psi(\xi, \tau) = \frac{\kappa}{2} \frac{A(\tau) \operatorname{cn}\left(\frac{\xi}{2}, \kappa\right) + i\sqrt{1+\kappa} \operatorname{sn}\left(\frac{\xi}{2}, \kappa\right)}{\sqrt{1+\kappa} - A(\tau) \operatorname{dn}\left(\frac{\xi}{2}, \kappa\right)} e^{i\xi/2}, \quad (2)$$

---

*Ключевые слова:* конечнозонное решение, волна-убийца, нелинейное уравнение Шредингера, солитон, бризер.

$$A(\tau) = \operatorname{cd} \left( \sqrt{\frac{1+\kappa}{2}} \tau, \sqrt{\frac{1-\kappa}{1+\kappa}} \right)$$

и

$$\psi(\xi, \tau) = \frac{1}{k\sqrt{2}} \frac{A(\tau) \operatorname{dn} \left( \frac{\xi}{2k}, k \right) + i k \operatorname{sn} \left( \frac{\xi}{2k}, k \right)}{1 - A(\tau) \operatorname{cn} \left( \frac{\xi}{2k}, \kappa \right)} e^{i\xi/2}, \quad (3)$$

$$A(\tau) = \sqrt{\frac{k}{1+k}} \operatorname{cn} \left( \frac{\tau}{\sqrt{k}}, \sqrt{\frac{1-k}{2}} \right).$$

остаются неустойчивыми, поскольку их поведение не соответствует поведению “странных волн” (рис. 1, 2).

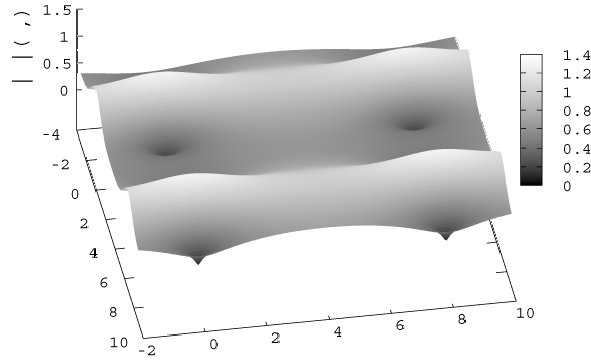


Рис. 1. Эллиптическое решение (2) при  $\kappa = 0.8$

В настоящей работе проводится редукция полученного автором в работе [7] эллиптического решения расщеплённого НУШ. С целью сохранения обозначений работы [7] используется другая запись НУШ:

$$i\psi_z + \psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi = 0. \quad (4)$$

Построенное эллиптическое решение уравнения (4) зависит от трёх параметров ( $a, b, c$ , или  $\gamma_2, \gamma_4, \gamma_6$ , или  $g_2, g_3, \varkappa$ ) и при одних наборах параметров даёт решения, внешне похожие на эллиптические решения

Ахмедиева, а при других – на периодически расположенные “странные волны” (рис. 4). В результате вырождения этого трёхпараметрического эллиптического решения получены как предельные случаи и бризер Ахмедиева (рис. 5), и солитон Перегрин. (рис. 7). Поскольку трёхпараметрическое решение при некоторых значениях параметров ведет себя подобно периодическим по обоим аргументам “странным” волнам, то автор надеется, что это решение и его аналоги большего рода найдут свое применение в нелинейной оптике, физике плазмы и других областях. Особенно при построении с помощью преобразования Дарбу и его обобщений периодических “мультифриковых” и “мультироговых” волн.

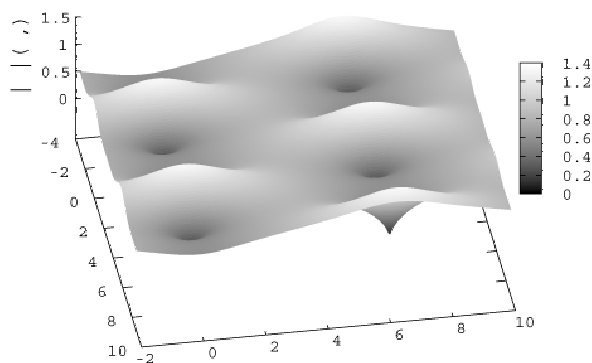


Рис. 2. Эллиптическое решение (3) при  $k = 0.8$

### 1. Точное двухзонное 2-ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НУШ

Конечнозонные решения НУШ (4) могут быть получены из конечнозонных решений расщепленного НУШ [8]

$$\begin{cases} i\psi_z + \psi_{xx} - 2\psi^2\varphi = 0, \\ -i\varphi_z + \varphi_{xx} - 2\psi\varphi^2 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

редукцией

$$\varphi = -\psi^*. \quad (6)$$

Известно ([8]), что алгебраическая кривая  $\Gamma = (w, \lambda)$ , ассоциированная с алгебро-геометрическим решением уравнения (4), должна иметь вид

$$\Gamma : w^2 = \prod_{j=1}^{g+1} (\lambda - \lambda_j)(\lambda - \lambda_j^*), \quad \Im \lambda_j \neq 0,$$

где  $g$  – алгебраический род кривой.

Если кривая  $\Gamma$  рода  $g = 2$  инвариантна относительно инволюции

$$\tau : (w, \lambda) \rightarrow (w, -\lambda),$$

то по ней можно построить решение, выражающееся через  $\zeta$ -функции Вейерштрасса [7]. Возьмём  $\Gamma$  в следующей параметризации (рис. 3)

$$\Gamma : w^2 = (\lambda^2 + c^2)(\lambda^2 + 2a\lambda + a^2 + b^2)(\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2),$$

или

$$\Gamma : w^2 = \lambda^6 + \gamma_2 \lambda^4 + \gamma_4 \lambda^2 + \gamma_6, \quad (7)$$

где

$$\gamma_2 = c^2 - 2a^2 + 2b^2, \quad \gamma_4 = (a^2 + b^2)^2 - 2(a^2 - b^2)c^2, \quad \gamma_6 = (a^2 + b^2)^2 c^2. \quad (8)$$

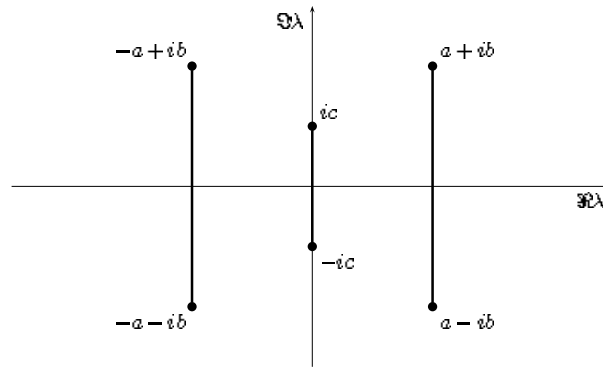


Рис. 3. Кривая  $\Gamma$

Как было показано в [7], чтобы построить эллиптическое по  $x$  решение, необходимо рассмотреть отображение  $\Gamma$  на тор  $\Gamma_0^1$  ( $\wp(\alpha)$  – эллиптическая функция Вейерштрасса [9]):

$$\Gamma_0^1: [\wp'(\alpha)]^2 = 4\wp^3(\alpha) - g_2\wp(\alpha) - g_3 \equiv 4 \prod_{j=1}^3 (\wp(\alpha) - e_j), \quad (9)$$

$$\wp'(\alpha) = 2iw, \quad \wp(\alpha) = -\lambda^2 - \frac{1}{3}\gamma_2, \quad d\alpha = i \frac{\lambda d\lambda}{w}. \quad (10)$$

Параметры  $\Gamma_0^1$  и  $\Gamma$  связаны соотношениями

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{4}{3}\gamma_2^2 - 4\gamma_4 \\ &= \frac{4}{3}c^4 + \frac{8}{3}(a^2 - b^2)c^2 + \frac{4}{3}(a^2 + b^2 + 4ab)(a^2 + b^2 - 4ab), \\ g_3 &= \frac{8}{27}\gamma_2^3 - \frac{4}{3}\gamma_2\gamma_4 + 4\gamma_6 \\ &= \frac{8}{27}(a^2 + c^2 - b^2)(a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + 34a^2b^2), \\ e_2 &= \frac{2(a^2 + c^2 - b^2)}{3}, \quad e_{1,3} = -\frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{3} \pm 2iab. \end{aligned}$$

Для изучения зависимости положения полюсов решения от  $z$  рассматривается отображение  $\Gamma$  на  $\Gamma_0^2$ :

$$\Gamma_0^2: \chi^2 = \left(E + \frac{1}{3}\gamma_2\right) (4E^3 - g_2E - g_3), \quad (11)$$

задающееся формулами

$$\chi = -2\lambda w, \quad E = -\lambda^2 - \frac{1}{3}\gamma_2, \quad \frac{dE}{\chi} = \frac{d\lambda}{w}.$$

Решение системы (5), построенное по кривой (7), имеет вид [7] ( $\zeta(x)$  – эллиптическая функция Вейерштрасса [9]):

$$\begin{aligned} \psi &= \mu^{-1}(z) \{ \zeta[x - x_1(z)] - \zeta[x - x_2(z)] + \zeta[x_1(z) - x_2(z)] + \rho(z) \}, \\ \phi &= \mu(z) \{ \zeta[x - x_1(z)] - \zeta[x - x_2(z)] + \zeta[x_1(z) - x_2(z)] - \rho(z) \}. \end{aligned}$$

Накладывая на него условие (6), имеем

$$\mu^* = \mu^{-1}, \quad x_1^* = x_2, \quad \rho^* = \rho.$$

Следовательно,

$$\psi = e^{if(z)} \{ \zeta(x - x_r - ix_i) - \zeta(x - x_r + ix_i) + \zeta(2ix_i) + \rho(z) \}, \quad (12)$$

где  $f(z), \rho(z), x_r(z), x_i(z) \in \mathbb{R}$ . При этом квадрат абсолютной величины решения равен

$$\begin{aligned} \psi\psi^* &= \rho^2(z) - \{\zeta(x - x_r - ix_i) - \zeta(x - x_r + ix_i) + \zeta(2ix_i)\}^2 \\ &= \varkappa - \wp(x - x_r - ix_i) - \wp(x - x_r + ix_i), \end{aligned}$$

где

$$\varkappa = \rho^2(z) - \wp(2ix_i(z)) \quad (13)$$

не зависит от  $z$ .

Подставляя решение (12) в уравнение (4), получаем следующие зависимости функциональных параметров решения от  $z$

$$\partial_z x_r = 0, \quad \partial_z x_i = -2\rho, \quad \partial_z f = 2\varkappa - 4\wp(2ix_i), \quad i\partial_z \rho = 2\wp'(2ix_i), \quad (14)$$

которые хорошо согласуются с соотношением (13). Не теряя общности, можно считать, что  $x_r \equiv 0$ .

Из (13) и (14) следует, что

$$\partial_z x_i = -2\sqrt{\wp(2ix_i) + \varkappa}.$$

Вводя обозначение  $\mathcal{E} = \wp(2ix_i)$ , имеем

$$\partial_z \mathcal{E} = 2i\wp'(2ix_i)\partial_z x_i = -4i\sqrt{(\mathcal{E} + \varkappa)(4\mathcal{E}^3 - g_2\mathcal{E} - g_3)}.$$

Соответственно,

$$z = \frac{i}{4} \int_{\mathcal{E}(0)}^{\mathcal{E}(z)} \frac{d\mathcal{E}}{\sqrt{(\mathcal{E} + \varkappa)(4\mathcal{E}^3 - g_2\mathcal{E} - g_3)}}. \quad (15)$$

Сравнивая (11) и (15), видим, что  $\varkappa = \gamma_2/3$  и что интегрирование ведется внутри промежутка, где  $\Re\chi=0$ , т.е. между  $-\varkappa \leq \mathcal{E} \leq e_2$ . Для определённости положим  $\mathcal{E}(0) = -\varkappa$ .

Выражая  $x_i$  из  $\mathcal{E}$ , имеем

$$\begin{aligned} x_i(z) &= -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\mathcal{E}(z)} \frac{d\mathcal{E}}{\sqrt{4\mathcal{E}^3 - g_2\mathcal{E} - g_3}}, \\ x_i(0) &= -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{-\varkappa} \frac{d\mathcal{E}}{\sqrt{4\mathcal{E}^3 - g_2\mathcal{E} - g_3}}. \end{aligned} \quad (16)$$

В этих равенствах учтено, что  $\mathcal{E} \leq e_2$  и  $\Im x_i(z) = 0$ .

Из уравнений (14) нетрудно теперь найти  $f(z)$ :

$$f(z) - f(0) = \frac{i}{2} \int_{-\varkappa}^{\mathcal{E}(z)} \frac{(\varkappa - 2\mathcal{E})d\mathcal{E}}{\sqrt{(\mathcal{E} + \varkappa)(4\mathcal{E}^3 - g_2\mathcal{E} - g_3)}}.$$

Обращая интеграл (15), находим явную зависимость  $\mathcal{E}(z)$ :

$$\mathcal{E}(z) = \frac{A\tilde{\wp}(z) + B}{C\tilde{\wp}(z) + D},$$

где

$$B = 2(a^2 - b^2)c^4 + 4(a^2 + b^2 + 6a^2b^2)c^2 + 2(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)^2, \\ A = 3(2a^2 - 2b^2 - c^2), \quad C = 9, \quad D = -6(a^2 - b^2)c^2 + 3(a^2 + b^2)^2.$$

Параметры функции  $\tilde{\wp}(z)$  равны

$$\tilde{g}_2 = \frac{4}{3}((a^2 + b^2)^2 - 16a^2b^2)c^4 + \frac{8}{3}(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)^2c^2 + \frac{4}{3}(a^2 + b^2)^4, \\ \tilde{g}_3 = \frac{8}{27}((a^2 - b^2)c^2 + (a^2 + b^2)^2) \\ \times ((a^4 + b^4 + 34a^2b^2)c^4 + 2(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)^2c^2 + (a^2 + b^2)^4), \\ \tilde{e}_2 = \frac{2}{3}(a^2 + b^2)^2 + \frac{2}{3}(a^2 - b^2)c^2, \\ \tilde{e}_{1,3} = -\frac{1}{3}(a^2 + b^2)^2 - \frac{1}{3}(a^2 - b^2)c^2 \pm 2iabc^2.$$

Из равенств (15), (16) следует, что функция  $|\psi|$  периодична по  $z$  и по  $x$  с периодами:

$$Z = \frac{1}{2} \int_{-\varkappa}^{\varepsilon_2} \frac{dp}{\sqrt{(\varkappa + p)(g_3 + g_2p - 4p^3)}}, \quad X = 2 \int_{\varepsilon_2}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2p - g_3}}. \quad (17)$$

График абсолютной величины эллиптического решения при  $a = 0.01$ ,  $b = 10$ ,  $c = 10$  показан на рис. 4. Локализованность эллиптического решения зависит от расстояния на комплексной плоскости между точками ветвления  $ic$  и  $a + ib$ . Чем меньше это расстояние, тем меньше отношение ширины эллиптического бризера к его периоду.



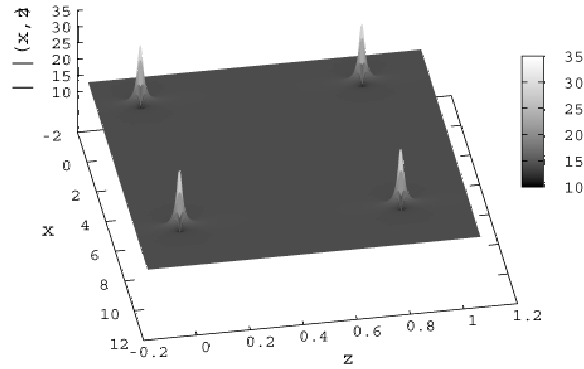


Рис. 4. Эллиптический бризер при  $a = 0.01$ ,  $b = 10$ ,  $c = 10$

## 2. ВЫРОЖДЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ПО $x$

Воспользовавшись стандартной формулой вырождения  $\zeta$ -функции Вейерштрасса [9]

$$\zeta(x) = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right) \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2\omega} + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 x \quad \text{при } \omega' = \infty, \quad (18)$$

имеем следующее выражение для  $\psi$ :

$$\psi = e^{if(z)} \left\{ k \operatorname{ctg} k(x - x_r - ix_i) - k \operatorname{ctg} k(x - x_r + ix_i) + k \operatorname{ctg}(2ikx_i) + \rho(z) \right\}. \quad (19)$$

Из тригонометрических формул следует, что

$$|\psi|^2 = \rho^2 + k^2 - \frac{k^2}{\sin^2(2ikx_i)} - \frac{k^2}{\sin^2 k(x - x_r - ix_i)} - \frac{k^2}{\sin^2 k(x - x_r + ix_i)}. \quad (20)$$

Подставляя (19) и (20) в (4), имеем

$$\begin{aligned} \partial_z x_r = 0, \quad \partial_z x_i = -2\rho, \quad \partial_z f = 2\rho^2 + 2k^2 + \frac{6k^2}{\operatorname{sh}^2(2kx_i)}, \\ \partial_z \rho = -\frac{4k^3 \operatorname{ch}(2kx_i)}{\operatorname{sh}^3(2kx_i)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (21) нетрудно получить, что

$$\rho^2 = \varkappa^2 - \frac{k^2}{\operatorname{sh}^2(2kx_i)}, \quad \partial_z x_i = -2 \frac{\sqrt{\varkappa^2 \operatorname{sh}^2(2kx_i) - k^2}}{\operatorname{sh}(2kx_i)}.$$

Поскольку функции  $\rho, x_i$  — действительны, то постоянная интегрирования удовлетворяет условию  $\varkappa \in \mathbb{R}$ .

Вводя обозначение  $u = \operatorname{ch}(2kx_i)$ , имеем достаточно простое дифференциальное уравнение

$$\partial_z u = -4k \sqrt{\varkappa^2 u^2 - k^2 - \varkappa^2},$$

решая которое, получаем (постоянная интегрирования выбрана так, чтобы функция  $u(z)$  была четной функцией)

$$u(z) = \sqrt{1 + \left(\frac{k}{\varkappa}\right)^2} \operatorname{ch}(4k\varkappa z).$$

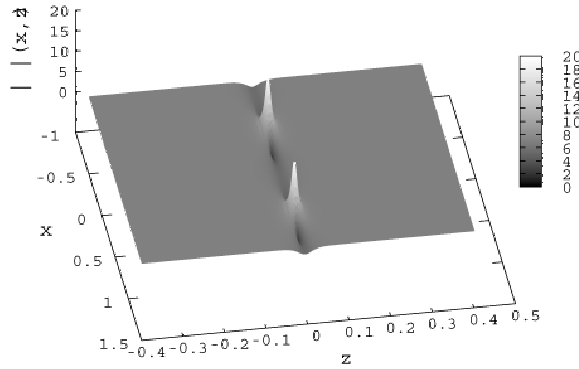
Переходя в равенстве (20) от  $\rho, x_i$  к  $z$  и положив  $x_r \equiv 0$ , имеем

$$|\psi|^2 = \varkappa^2 + k^2 + \frac{4k^2 \varkappa (\sqrt{\varkappa^2 + k^2} \cos(2kx) \operatorname{ch}(4k\varkappa z) - \varkappa)}{(\sqrt{\varkappa^2 + k^2} \operatorname{ch}(4k\varkappa z) - \varkappa \cos(2kx))^2}.$$

При этом решение (19) уравнения (4) имеет вид

$$\begin{aligned} \psi = \frac{(\varkappa \sqrt{\varkappa^2 + k^2} \cos(2kx) + (k^2 - \varkappa^2) \operatorname{ch}(4k\varkappa z) + 2ik \operatorname{sh}(4k\varkappa z))}{(\sqrt{\varkappa^2 + k^2} \operatorname{ch}(4k\varkappa z) - \varkappa \cos(2kx))} \times \\ \times \exp \{2i(\varkappa^2 + k^2)z\}, \end{aligned} \quad (22)$$

и представляет собой бризер Ахмедиева, подвергнутый масштабному преобразованию. Абсолютная величина решения (22) при  $k = \pi$ ,  $\varkappa = 2\pi$  изображена на рис. 5.

Рис. 5. Тригонометрическое решение при  $k = \pi$ ,  $\varkappa = 2\pi$ 

### 3. ВЫРОЖДЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ ПО $x$

Заменяя в (19) тригонометрические функции гиперболическими, ищем решение в виде

$$\psi = e^{if(z)} \left\{ k \operatorname{cth} k(x - x_r - ix_i) - k \operatorname{cth} k(x - x_r + ix_i) + k \operatorname{cth}(2ikx_i) + \rho(z) \right\}. \quad (23)$$

Вычисляя  $\psi\psi^*$ , имеем

$$|\psi|^2 = \rho^2 - k^2 - \frac{k^2}{\operatorname{sh}^2(2ikx_i)} - \frac{k^2}{\operatorname{sh}^2 k(x - x_r - ix_i)} - \frac{k^2}{\operatorname{sh}^2 k(x - x_r + ix_i)}. \quad (24)$$

Подставляя (23), (24) в (4), получаем

$$\begin{aligned} \partial_z x_r = 0, \quad \partial_z x_i = -2\rho, \quad \partial_z f = 2\rho^2 - 2k^2 + \frac{6k^2}{\sin^2(2kx_i)}, \\ \partial_z \rho = -\frac{4k^3 \cos(2kx_i)}{\sin^3(2kx_i)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Из (25) следует, что

$$\rho^2 = \varkappa^2 - \frac{k^2}{\sin^2(2kx_i)}, \quad \partial_z x_i = -2 \frac{\sqrt{\varkappa^2 \sin^2(2kx_i) - k^2}}{\sin(2kx_i)}.$$

Вводя обозначение  $u = \cos(2kx_i)$  сводим задачу нахождения зависимости полюсов от  $z$  к дифференциальному уравнению

$$\partial_z u = 4k \sqrt{\varkappa^2 - k^2 - \varkappa^2 u^2},$$

решая которое, получаем

$$u = \sqrt{1 - \left(\frac{k}{\varkappa}\right)^2} \cos(4k\varkappa z).$$

Нетрудно понять, что на постоянную интегрирования  $\varkappa^2$  должно быть наложено ограничение  $\varkappa^2 > k^2$ .

Переходя в формулах (23), (24) от  $x_i(z)$  к  $z$ , имеем

$$|\psi|^2 = \varkappa^2 - k^2 - \frac{4k^2 \varkappa (\sqrt{\varkappa^2 - k^2} \operatorname{ch}(2kx) \cos(4k\varkappa z) - \varkappa)}{(\sqrt{\varkappa^2 - k^2} \cos(4k\varkappa z) - \varkappa \operatorname{ch}(2kx))^2}$$

и

$$\psi = \frac{\varkappa \sqrt{\varkappa^2 - k^2} \operatorname{ch}(2kx) - (\varkappa^2 + k^2) \cos(4k\varkappa z) - 2ik\varkappa \sin(4k\varkappa z)}{(\sqrt{\varkappa^2 - k^2} \cos(4k\varkappa z) - \varkappa \operatorname{ch}(2kx))} \times \exp \{2i(\varkappa^2 - k^2)z\}. \quad (26)$$

Абсолютная величина решения (26) при  $k = 1/4$ ,  $\varkappa = 2\pi$  изображена на рис. 6.

#### 4. ВЫРОЖДЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ В РАЦИОНАЛЬНОЕ ПО $x$

В результате вырождения  $\zeta$ -функции Вейерштрасса к рациональной функции [9] имеем

$$\psi = e^{if(z)} \left\{ \frac{1}{x - x_r - ix_i} - \frac{1}{x - x_r + ix_i} + \frac{1}{2ix_i} + \rho(z) \right\}, \quad (27)$$

$$|\psi|^2 = \rho^2 + \left( \frac{(x - x_r)^2 - 3x_i^2}{2x_i((x - x_r)^2 + x_i^2)} \right)^2. \quad (28)$$

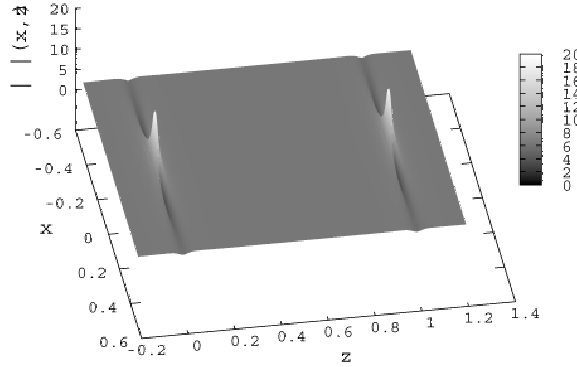


Рис. 6. Гиперболическое решение при  $k = 1/4$ ,  $\varkappa = 2\pi$

Подставляя (27), (28) в (4), получаем

$$\partial_z x_r = 0, \quad \partial_z x_i = -2\rho, \quad \partial_z f = 2\rho^2 + \frac{3}{2x_i^2}, \quad \partial_z \rho = -\frac{1}{2x_i^3}. \quad (29)$$

Интегрируя (29), имеем

$$x_r \equiv 0, \quad x_i = \frac{\sqrt{16\varkappa^4 z^2 + 1}}{2\varkappa}, \quad \rho = -\frac{4\varkappa^3 z}{\sqrt{16\varkappa^4 z^2 + 1}},$$

$$f(z) - f(0) = 2\varkappa^2 z + \operatorname{arctg}(4\varkappa^2 z).$$

В новых обозначениях рациональное по  $x$  решение НУШ (4) имеет вид

$$\psi = \frac{\varkappa(4\varkappa^2 x^2 + 16\varkappa^4 z^2 - 16i\varkappa^2 z - 3)}{(4\varkappa^2 x^2 + 16\varkappa^4 z^2 + 1)} \exp\{2i\varkappa^2 z\}, \quad (30)$$

$$|\psi|^2 = \frac{\varkappa^2(16\varkappa^4 x^4 + 8\varkappa^2(16\varkappa^4 z^2 - 3)x^2 + 256\varkappa^8 z^4 + 160\varkappa^4 z^2 + 9)}{(4\varkappa^2 x^2 + 16\varkappa^4 z^2 + 1)^2},$$

из которого следует, что это решение является солитоном Перегринна. Абсолютная величина решения (30) при  $\varkappa = 10$  изображена на рис. 7.

#### ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Нетрудно понять, что для построения решений НУШ с большим количеством пиков, чем у изображенных в работе, требуется рассмотрение и вырождение конечнозонных решений алгебраического рода

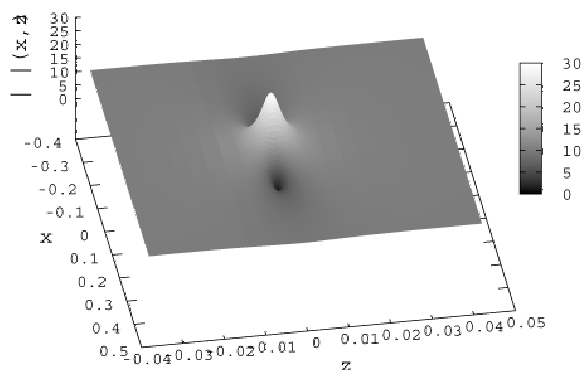


Рис. 7. Рациональное по  $x$  решение при  $\varkappa = 10$

$g > 2$ . Наличие дополнительных фаз позволит усложнить поведение решений и их вырождений. Причем в этом случае вырождения могут быть частичными, например, эллиптически-тригонометрическое по  $x$ , эллиптически-рациональное и т.д. В качестве спектральных кривых для родительских многозонных решений НУШ в эллиптических функциях можно, например, брать кривые, описанные в работах [10–12].

Автор благодарит проф. В. Б. Матвеева за внимание к работе и полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Eur. Phys. J. Special Topics **185** (2010).
2. N. Akhmediev, A. Ankiewicz, M. Taki, *Waves that appear from nowhere and disappear without a trace*. — Phys. Lett. A. **373** (2009), 675–678.
3. V. Kibler, J. Fatome, C. Finot, G. Millot, F. Dias, G. Genty, N. Akhmediev, J. M. Dudley, *The Peregrine soliton in nonlinear fibre optics*. — Nature Physics **6** (2010), 790–795.
4. Z. Yan, *Financial rogue waves appearing in the coupled nonlinear volatility and option pricing model*. — Preprint arXiv:1101.3107v1 (2011).
5. Н. Н. Ахмедиев, В. И. Корнеев, *Модуляционная неустойчивость и периодические решения нелинейного уравнения Шредингера*. — ТМФ. **69** (1986), вып. 2, 189–194.
6. Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич, *Солитоны*. ФИЗМАТЛИТ, М., 2003.
7. А. О. Смирнов, *Об одном классе эллиптических потенциалов оператора Дирака*. — Мат. сб. **188** (1997), вып. 1, 109–128.

8. Б. А. Дубровин, *Тэта-функции и нелинейные уравнения*. — УМН **36** (1981), вып. 2, 11–80.
9. Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*. Гостехиздат, М., 1948.
10. А. О. Смирнов, *Конечнозонные решения абелевой цепочки Тоды рода 4 и 5 в эллиптических функциях*. — ТМФ **78** (1989), вып. 1, 11–21.
11. А. О. Смирнов, *Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза*. — Мат. сб. **185** (1994), вып. 8, 103–114.
12. А. О. Смирнов, *Эллиптические по  $t$  решения нелинейного уравнения Шредингера*. — ТМФ **107** (1996), вып. 2, 188–200.

Smirnov A. O. Elliptic breather for nonlinear Schrödinger equation.

Two-phase elliptic solution of the nonlinear Schrödinger equation is constructed. The conditions on the parameters for the periodic rogue wave solution are given. It is shown that degenerations of this solution lead to Akhmediev breather and to Peregrin soliton.

Санкт-Петербургский государственный  
университет аэрокосмического приборостроения,  
Б.Морская ул. 67, С.-Петербург 190000, Россия  
*E-mail*: [alsmir@guap.ru](mailto:alsmir@guap.ru)

Поступило 18 сентября, 2011