



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Рябцева, О резольвентном множестве спектральной функции изометрического оператора с бесконечными индексами дефекта,
Изв. вузов. Матем., 1968, номер 3, 75–79

<https://www.mathnet.ru/ivm3290>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.86

13 мая 2025 г., 15:54:32



УДК 519.55

В. М. Рябцева

О РЕЗОЛЬВЕНТНОМ МНОЖЕСТВЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ИЗОМЕТРИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА С БЕСКОНЕЧНЫМИ ИНДЕКСАМИ ДЕФЕКТА

Пусть U — замкнутый изометрический оператор, действующий в гильбертовом пространстве H ; D_U и Δ_U — соответственно области определения и значений оператора U .

Резольвентным множеством спектральной функции E_t ($0 \leq t \leq 2\pi$) оператора U называется множество точек комплексной плоскости ζ , $|\zeta| \neq 1$, вместе со всеми точками $\zeta = e^{-it}$, каждая из которых содержится в каком-нибудь открытом интервале $(e^{-i\alpha}; e^{-i\beta})$ единичной окружности, через который обобщенная резольвента оператора U

$$R_\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{dE_t}{1 - \zeta e^{it}},$$

соответствующая этой спектральной функции, допускает аналитическое продолжение из внутренности единичного круга во внешность его, причем это продолжение совпадает с указанной обобщенной резольвентой при $|\zeta| > 1$.

Известная формула А. В. Штрауса [2], описывающая множество всех обобщенных резольвент произвольного замкнутого симметрического оператора, переложена на случай изометрического оператора М. Е. Чумакиным [8]. Им показано, что всякая обобщенная резольвента R_ζ замкнутого изометрического оператора U , действующего в гильбертовом пространстве H , представима в виде

$$R_\zeta = [E - \zeta(U \oplus \Phi_\zeta)]^{-1}, \quad |\zeta| < 1, \quad (1)$$

где Φ_ζ — некоторый линейный оператор из $H \ominus D_U$ в $H \ominus \Delta_U$, являющийся аналитической в единичном круге операторной функцией параметра ζ и не превосходящий по норме единицы.

Переноса результат, полученный Р. Мак-Келви [6] для симметрического оператора, на случай изометрического оператора, М. Е. Чумакин [8] сформулировал условия, при которых формула (1) остается в силе и для некоторых значений ζ , по модулю равных единице, в терминах предельных значений резольвенты.

В настоящей работе условия принадлежности точек единичной окружности резольвентному множеству спектральной функции замкнутого изометрического оператора формулируются в терминах некоторого оператора V_ζ (близкого по определению к параллельному

проектору, введенному А. В. Штраусом [1] для случая замкнутого эрмитова оператора) и семейства операторов Φ_ζ .

Используя метод А. В. Штрауса ([3], лемма 3) и лемму 3 из работы Ю. Л. Шмудьяна [4], представим гильбертово пространство в виде прямой суммы подпространств, связанных с замкнутым изометрическим оператором и его точкой регулярного типа, расположенной на единичной окружности комплексной плоскости. Условимся обозначать через N_ζ при любом ζ из комплексной плоскости подпространство $H \ominus (E - \zeta U)D_U$, а через P_F — оператор ортогонального проектирования в H на любое подпространство $F \subset H$.

Лемма 1. Пусть ζ^{-1} ($|\zeta| = 1$) — точка регулярного типа оператора U . Тогда имеют место равенства:

$$H = (E - \zeta U)D_U \dot{+} (H \ominus D_U), \quad (2)$$

$$H = (E - \zeta U)D_U \dot{+} (H \ominus \Delta_U), \quad (3)$$

$$H = D_U \dot{+} N_\zeta, \quad (4)$$

$$H = \Delta_U \dot{+} N_\zeta. \quad (5)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение оператор $F_\zeta = T_0 - \zeta^{-1}E$, где $T_0 = U \oplus 0$. В условиях леммы 3 Ю. Л. Шмудьяна оператор $F_\zeta^{-1} = (T_0 - \zeta^{-1}E)^{-1}$ существует, ограничен и определен всюду в H . Заметим, что

$$F_\zeta D_U = (T_0 - \zeta^{-1}E)D_U = (U - \zeta^{-1}E)D_U = (E - \zeta U)D_U, \quad (6)$$

$$F_\zeta (H \ominus D_U) = (T_0 - \zeta^{-1}E)(H \ominus D_U) = H \ominus D_U. \quad (7)$$

Пусть h — произвольный элемент пространства H . Из равенств (6) и (7) следует, что в сумме

$$h = \chi + g \quad (8)$$

элемент $\chi = F_\zeta P_{D_U} F_\zeta^{-1} h \in (E - \zeta U)D_U$, а элемент $g = F_\zeta P_{H \ominus D_U} F_\zeta^{-1} h \in H \ominus D_U$. С другой стороны, предположим, что разложение (8) имеет место. Применяя к обеим частям равенства (8) оператор F_ζ^{-1} , будем иметь

$$F_\zeta^{-1} h = F_\zeta^{-1} \chi + F_\zeta^{-1} g. \quad (9)$$

Но в силу (7) $F_\zeta^{-1} g \in H \ominus D_U$, а в силу (6) $F_\zeta^{-1} \chi \in D_U$, поэтому $F_\zeta^{-1} g = P_{H \ominus D_U} F_\zeta^{-1} h$, $F_\zeta^{-1} \chi = P_{D_U} F_\zeta^{-1} h$, откуда $g = F_\zeta P_{H \ominus D_U} F_\zeta^{-1} h$, $\chi = F_\zeta P_{D_U} F_\zeta^{-1} h$. Итак, если представление (8) имеет место, то оно единственно. Равенство (2) доказано.

Аналогично, используя соотношения

$$F_\zeta^* (H \ominus \Delta_U) = (T_0^* - \zeta E)(H \ominus \Delta_U) = H \ominus \Delta_U, \quad (10)$$

$$F_\zeta^* \Delta_U = (T_0^* - \zeta E)U D_U = (E - \zeta U)D_U, \quad (11)$$

можно доказать равенство (3).

Переходим к доказательству равенства (4). Из (11) следует, что $(F_\zeta^*)^{-1}$ отображает $(E - \zeta U)D_U$ на Δ_U , а потому F_ζ^{-1} отображает $H \ominus \Delta_U$ на N_ζ . Кроме того, из (6) следует, что F_ζ^{-1} отображает $(E - \zeta U)D_U$ на D_U . Так как $F_\zeta^{-1} H = H$, то, применяя к обеим частям равенства (3) оператор F_ζ^{-1} , получим равенство (4).

Аналогично из справедливости равенства (2) выводится справедливость равенства (5). Лемма доказана.

Далее рассмотрим два предложения, которые аналогичны соответственно лемме 2 и теореме 4 из работы М. А. Красносельского [7].

Лемма 2. Для каждого элемента $f \in N_\zeta$ ($|\zeta|=1$) справедливо равенство

$$UP_{D_U}f = \zeta^{-1}P_{\Delta_U}f. \quad (12)$$

Доказательство. При любом $\varphi \in D_U$ и $f \in N_\zeta$ ($|\zeta|=1$) имеем:

$$\begin{aligned} (\zeta^{-1}f - UP_{D_U}f, U\varphi) &= \zeta^{-1}(f, U\varphi) - (UP_{D_U}f, U\varphi) = \\ &= (f, \zeta U\varphi) - (f, \varphi) = (f, (\zeta U - E)\varphi) = 0, \end{aligned}$$

т. е. элемент $\zeta^{-1}f - UP_{D_U}f$ ортогонален к Δ_U . Следовательно,

$P_{\Delta_U}(\zeta^{-1}f - UP_{D_U}f) = 0$, или $UP_{D_U}f = \zeta^{-1}P_{\Delta_U}f$. Лемма доказана.

Следствие. Для каждого элемента $f \in N_\zeta$ ($|\zeta|=1$) справедливо равенство

$$\|P_{H \ominus D_U}f\| = \|P_{H \ominus \Delta_U}f\|. \quad (13)$$

Предположим, что Φ — изометрический оператор, действующий из $H \ominus D_U$ в $H \ominus \Delta_U$. Известно, что если ζ^{-1} ($|\zeta|=1$) — собственное значение оператора $T = U \oplus \Phi$, то соответствующий собственный элемент принадлежит N_ζ .

Лемма 3. Если f — собственный элемент оператора T , соответствующий собственному значению ζ^{-1} ($|\zeta|=1$), то

$$TP_{H \ominus D_U}f = \zeta^{-1}P_{H \ominus \Delta_U}f. \quad (14)$$

Доказательство. Преобразуем левую часть доказываемого равенства: $TP_{H \ominus D_U}f = T(f - P_{D_U}f) = \zeta^{-1}f - \zeta^{-1}P_{\Delta_U}f = \zeta^{-1}P_{H \ominus \Delta_U}f$.

Лемма доказана.

Определим при любом $|\zeta|=1$ оператор V_ζ с помощью равенства

$$V_\zeta P_{H \ominus D_U}f = \zeta^{-1}P_{H \ominus \Delta_U}f, f \in N_\zeta. \quad (15)$$

Как следует из равенства (13), данное определение корректно, а введенный оператор V_ζ изометричен. Пусть ζ^{-1} ($|\zeta|=1$) — точка регулярного типа оператора U , тогда оператор V_ζ из (15) отображает $H \ominus D_U$ на $H \ominus \Delta_U$. Действительно, применяя к обеим частям равенства (4) оператор $P_{H \ominus D_U}$, а к обеим частям равенства (5) оператор $P_{H \ominus \Delta_U}$, получим

$$P_{H \ominus D_U}N_\zeta = H \ominus D_U, P_{H \ominus \Delta_U}N_\zeta = H \ominus \Delta_U^1).$$

Обозначим через S сужение оператора $P_{H \ominus D_U}$ на N_ζ , а через Q — сужение оператора $P_{H \ominus \Delta_U}$ на N_ζ . Если ζ^{-1} ($|\zeta|=1$) — точка регулярного типа оператора U , то подпространства D_U и N_ζ , а также подпространства Δ_U и N_ζ линейно независимы, и, следовательно,

¹⁾ Отметим, что этот факт, по существу, был получен Ю. Л. Шмульяном [4], теорема 8).

операторы S и Q обладают обратными. В этом случае для любого элемента $g \in H \ominus D_U$ найдется в N_ζ такой элемент f , что $S^{-1}g = f$. Откуда, используя (15), получим $V_\zeta g = V_\zeta S f = \zeta^{-1} Q f = \zeta^{-1} Q S^{-1} g$, $g \in H \ominus D_U$.

Теорема 1. *Для того чтобы точка ζ^{-1} ($|\zeta| = 1$) регулярного типа оператора U была собственным значением произвольного унитарного расширения $T = U \oplus \Phi$ оператора U , необходимо и достаточно, чтобы оператор $\Phi - V_\zeta$ аннулировал некоторый ненулевой элемент из $H \ominus D_U$.*

Доказательство. Пусть f — собственный элемент оператора T , соответствующий собственному значению ζ^{-1} : $Tf = \zeta^{-1}f$, $f \neq 0$. Представляя оператор Φ в виде TSS^{-1} и учитывая лемму 3, получим для элемента $g = Sf \neq 0$ $(\Phi - V_\zeta)g = (TS - \zeta^{-1}Q)S^{-1}Sf = TSf - \zeta^{-1}Qf = \zeta^{-1}Qf - \zeta^{-1}Qf = 0$. Обратно, пусть теперь $(\Phi - V_\zeta)g = 0$, $g \neq 0$. Представляя g в виде Sf , $f \in N_\zeta$, и используя равенство (12), получим, что $(\Phi - V_\zeta)g = (TS - \zeta^{-1}Q)S^{-1}Sf = TSf - \zeta^{-1}Qf = T(f - P_{D_U}f) - \zeta^{-1}(f - P_{\Delta_U}f) = Tf - UP_{D_U}f - \zeta^{-1}f + \zeta^{-1}P_{\Delta_U}f = Tf - \zeta^{-1}f = 0$ при $f \neq 0$, т. е. что ζ^{-1} — собственное значение оператора T . Теорема доказана.

Теорема 2. *Если ζ^{-1} ($|\zeta| = 1$) — точка регулярного типа оператора U , то уравнение*

$$Tx - \zeta^{-1}x = h \quad (16)$$

имеет решение при всех $h \in H$ тогда и только тогда, когда $(\Phi - V_\zeta)(H \ominus D_U) = H \ominus \Delta_U$.

Доказательство. Пусть уравнение (16) имеет решение при любом $h \in H$. При этом если $h \in H \ominus \Delta_U$, то $x \in N_\zeta$. В самом деле, при любом $\varphi \in D_U$ $(x, (E - \zeta U)\varphi) = (x, (U^{-1}U - \zeta U)\varphi) = (x, (U^{-1} - \zeta E)U\varphi) = (x, (T^* - \zeta E)U\varphi) = ((T - \zeta^{-1}E)x, U\varphi) = (h, U\varphi) = 0$. Применяя теперь к элементу $g = Sx$ оператор $\Phi - V_\zeta$, будем иметь $(\Phi - V_\zeta)g = Tx - \zeta^{-1}x = h$. Итак, для любого $h \in H \ominus \Delta_U$ найдется элемент $g \in H \ominus D_U$ такой, что $(\Phi - V_\zeta)g = h$. Обратно, предположим, что $(\Phi - V_\zeta)(H \ominus D_U) = H \ominus \Delta_U$. Произвольный элемент $h \in H$ представим в силу (3) в виде $h = \psi + (E - \zeta U)\varphi$, $\psi \in H \ominus \Delta_U$, $\varphi \in D_U$. Для элемента ψ , согласно предположению, найдется такой элемент $g \in H \ominus D_U$, что $(\Phi - V_\zeta)g = \psi$. Введем в рассмотрение элемент $x = S^{-1}g - \zeta\varphi$ и применим к нему оператор $T - \zeta^{-1}E$. Будем иметь

$$\begin{aligned} (T - \zeta^{-1}E)x &= (T - \zeta^{-1}E)S^{-1}g - \zeta(T - \zeta^{-1}E)\varphi = TS^{-1}g - \\ &\quad - \zeta^{-1}S^{-1}g + (E - \zeta U)\varphi = UP_{D_U}S^{-1}g + \Phi SS^{-1}g - \\ &\quad - \zeta^{-1}S^{-1}g + (E - \zeta U)\varphi = \Phi g + \zeta^{-1}P_{\Delta_U}S^{-1}g - \zeta^{-1}S^{-1}g + \\ &\quad + (E - \zeta U)\varphi = \Phi g - \zeta^{-1}(S^{-1}g - P_{\Delta_U}S^{-1}g) + (E - \zeta U)\varphi = \Phi g - \\ &\quad - \zeta^{-1}QS^{-1}g + (E - \zeta U)\varphi = (\Phi - V_\zeta)g + (E - \zeta U)\varphi = \psi + (E - \zeta U)\varphi = h. \end{aligned}$$

Итак, для любого $h \in H$ найдется элемент x такой, что $(T - \zeta^{-1}E)x = h$, т. е. уравнение (16) разрешимо при любом $h \in H$. Теорема доказана.

Отметим, что теоремы 1 и 2 являются перенесением теорем 6 и 7 из работы Ю. Л. Шмудьяна [5] на тот случай, когда расширение T унитарно, а $|\zeta| = 1$. Из справедливости теорем 1 и 2 следует

Теорема 3. Для того чтобы оператор $[E - \zeta(U \oplus \Phi)]^{-1}$ ($|\zeta| = 1$), где Φ — некоторый изометрический оператор, отображающий $H \ominus D_U$ на $H \ominus \Delta_U$, существовал, был определен всюду в H и ограничен, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) ζ^{-1} — точка регулярного типа оператора U ;
- 2) оператор $\Phi - V_\zeta$ обладает обратным и отображает все $H \ominus D_U$ на все $H \ominus \Delta_U$.

Все сказанное выше позволяет сформулировать условия принадлежности точки единичной окружности резольвентному множеству спектральной функции E_t ($0 \leq t \leq 2\pi$) изометрического оператора U в терминах оператора V_ζ .

Теорема 4. Для того чтобы точка $\zeta_0 = e^{-it_0}$ единичной окружности принадлежала резольвентному множеству спектральной функции E_t ($0 \leq t \leq 2\pi$) замкнутого изометрического оператора U , действующего в гильбертовом пространстве H и имеющего произвольные равные индексы дефекта (m, m) , необходимо и достаточно, чтобы существовал некоторый открытый интервал Δ_e единичной окружности, содержащий точку ζ_0 , такой, что

1) для каждой точки $\zeta \in \Delta_e$ ζ^{-1} — точка регулярного типа оператора U ;

2) семейство операторов Φ_ζ , соответствующее E_t ($0 \leq t \leq 2\pi$), допускает непрерывное продолжение (в смысле сходимости по норме) из внутренности единичного круга на Δ_e , и при любом $\zeta \in \Delta_e$ оператор Φ_ζ изометрически отображает $H \ominus D_U$ на $H \ominus \Delta_U$;

3) для каждого $\zeta \in \Delta_e$ оператор $(\Phi_\zeta - V_\zeta)^{-1}$ существует и определен всюду в $H \ominus \Delta_U$ ¹⁾.

Пользуясь случаем, автор благодарит проф. А. В. Штрауса за полезные советы.

г. Ульяновск

Поступило
11 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Штраус А. В. К теории эрмитовых операторов. ДАН СССР, т. 67, № 4, 1949, с. 611—614.
2. Штраус А. В. К теории обобщенных резольвент симметрического оператора. ДАН СССР, т. 78, № 2, 1951, с. 217—220.
3. Штраус А. В. Обобщенные резольвенты симметрических операторов. ИАН СССР. Сер. матем., т. 18, № 1, 1954, с. 51—86.
4. Шмультян Ю. Л. Изометрические операторы с бесконечными индексами дефекта и их ортогональные расширения. ДАН СССР, т. 87, № 1, 1952, с. 11—14.
5. Шмультян Ю. Л. Строение операторов с точечным спектром, заполняющим единичный круг либо полуплоскость. Автореф. кандид. диссерт., Изд. Ин-та матем. АН УССР, 1956.
6. Mc Kelveу R. The spectra of minimal self-adjoint extensions of a symmetric operator. Pacific J. Math., v. 12, № 3, 1962, p. 1003—1022.
7. Красносельский М. А. О самосопряженных расширениях эрмитовых операторов. УМЖ, 1949, № 1, с. 21—38.
8. Чумакин М. Е. Спектральные функции изометрического оператора. Автореф. кандид. диссерт., Изд. Ленинградск. педин-та, 1964.

¹⁾ Требование ограниченности оператора $(\Phi_\zeta - V_\zeta)^{-1}$ выполняется автоматически.