Л. А. Аксентьев, Геометрические вопросы в обратных краевых задачах,
Тр. сем. по обратн. краев. задачам, 1964, выпуск 1, 14–18

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ В ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ

Л. А. АКСЕНТЬЕВ

В [1] доказано соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma(w_k) = n_w - n_z, \tag{1}$$

связывающее индексы особых точек и граничное вращение векторного поля $\overline{z'(w)}$. На основе (1) выделяются простейшие конформные модели областей, которые являются решениями обратных краевых задач. Это будут области с границами в виде n_z-листных окружностей. При $n_z = 0$ граничная кривая имеет вид восьмерки.

Свобода в выборе $\gamma(w_k)$ (лишь бы равенство (1) было соблюдено) определяет целый класс областей при одних и тех же граничных данных. Поэтому для единственности решения обратной задачи нужно задавать положение и характер особенностей функции $\ln z'(w)$.

В случае $n_z = 1$ простейшей конформной моделью является единичный круг. Круг конформно эквивалентен однолистной или неоднолистной области. Так как в прикладных задачах интерес представляют только *однолистные области,* то нужно уметь определять, когда получится однолистная область, когда — неоднолистная область. Дадим два подхода к решению вопросов однолистности.

Первый подход характеризуется исследованием функции, отображающей каноническую область на искомую, [2]. Типичным является такой вопрос.

Пусть в круге $|\zeta| < 1$ задана регулярная функция

$$f(\zeta) = \int \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\theta)\,\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\,d\theta\right) d\zeta.$$

Требуется разбить функциональный класс A, которому принадлежит $P(\theta)$, на два подкласса A_1 и A_2 так, чтобы при $P(\theta) \in A_1$ функция $f(\zeta)$ была однолистной в $|\zeta| \leqslant 1$, при $P(\theta) \in A_2$ — неоднолистной.

Можно привести конкретные классы A, для которых этот вопрос решается полностью $\left(a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta,\ \sum_{k=1}^{n} a_k \ln[1 - \cos(\theta - \theta_k)]\right)$.

Отметим некоторые общие факты.

1°. Пусть $P(\theta)$ имеет вид:

$$P(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta.$$

Тогда

1) функция $f(\zeta)$ будет неоднолистной, если $|a_1 + ib_1| > 4$ или $|a_2 + ib_2| > 17$;

2) имеются однолистные функции $f(\zeta)$ с $|a_1 + ib_1| < \pi$ или $|a_2 + ib_2| < 2{,}5$;

3) $f(\zeta)$ будет однолистной, если $b_k=0$, $a_k \geqslant 0$, $k=1, 2, \ldots$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant \ln 2$.

2°. Если $P(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mu(\varphi) \operatorname{ctg} \frac{\theta-\varphi}{2}\, d\varphi$, то $f(\zeta)$ будет выпуклой тогда и только тогда, когда $\int\limits_0^{2\pi} |d(\varphi+\mu(\varphi))| = 2\pi$.

При $\int\limits_0^{2\pi} |d(\varphi+\mu(\varphi))| \angle 4\pi$ $f(\zeta)$ является однолистной (почти выпуклой). Если $\int\limits_0^{2\pi} |d(\varphi+\mu(\varphi))| = a \geqslant 4\pi$, то при любом таком a имеются и однолистные, и неоднолистные функции.

Второй подход основан на следующем критерии.

Теорема. Необходимое и достаточное условие того, что аналитический контур L: $z=t(s)$ — является решением обратной краевой задачи с условием $w=f(s)$, $0 \leqslant s \leqslant l$, состоит в аналитичности функции $f[s(t)]$, где $s(t)$ — функция, обратная к $t(s)$.

1. Необходимость. Пусть по условию $w=f(s)$ найден контур L с уравнением $z=t(s)$ и определена функция $w=F(z)$ по левую или по правую сторону от этого контура, причем $F[t(s)]=f(s)$. Функция $F(z)$ является аналитической и не имеет особенностей вблизи контура L, включая этот контур. Значит, будет аналитической функция

$$F(t)=F\{t[s(t)]\}=f[s(t)].$$

2. Достаточность. Если функция $f[s(t)]$ является аналитической, то ее можно продолжить по левую или по правую сторону от контура L. Функция

$$w=f[s(z)]=F(z)$$

представляет собой аналитическую функцию, определенную в области, границей которой является кривая L.

Теорема доказана.

Вообще говоря, искомая функция будет определена на части римановой поверхности, ограниченной контуром L, за исключением разрезов или даже кусков. Чтобы кривая ограничивала плоскую область, нужно потребовать, чтобы функция

$$f[s(z)] \cdot \prod_{k=1}^{n} (z-a_k)^{m_k}$$

(m_k — положительные целые числа) не имела особенностей внутри или вне L. Точки a_k ($k=1, \ldots, n$) представляют собой полюсы функции $f[s(z)]$. Если одно из a_k совпадает с ∞, то вместо бинома $z-a_k$ нужно взять $\frac{1}{z}$.

В случае, когда L — окружность $|t|=\frac{l}{2\pi}$, нужно потребовать сходимость ряда Тейлора по степеням t для функции

$$f\left(-i\frac{l}{2\pi}\ln\frac{2\pi t}{l}\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} (t-a_k)^{m_k}$$

при $|t| \leqslant \frac{l}{2\pi}$ или при $|t| \geqslant \frac{l}{2\pi}$.

Приведем несколько примеров, когда в качестве искомой области получается круг $|z|<1$ $(l=2\pi)$.

1. Граничное значение функции зададим в виде

$$w = \frac{(e^{is} - a)^m}{(e^{is} - b)^n}, \quad 0 \leqslant s \leqslant 2\pi,$$

m, n — целые числа. Получаем круг $|z| < 1$ и функцию $w = \dfrac{(z-a)^m}{(z-b)^n}$.

2. Берем граничное значение функции в виде

$$w = \left(\frac{e^{is} - a}{e^{is} - b}\right)^{\frac{p}{q}}, \quad 0 \leqslant s \leqslant 2\pi,$$

p, q — целые взаимно простые числа, $q \neq 1$. Получим круг $|z| < 1$ с функцией $w = \left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)^{\frac{p}{q}}$ только в случае $|a| > 1$ и $|b| > 1$. Если $|a| < 1$ и $|b| < 1$, то функция остается той же самой, а определена она будет в области на римановой поверхности. Область эта состоит из круга с $q-1$ прикрепленными к нему листами. Два полученных случая соответствуют тому, что ряд для $\left(\dfrac{t-a}{t-b}\right)^{\frac{p}{q}}$ по степеням t будет сходиться при $|t| \leqslant 1$ в случае $|a| > 1$, $|b| > 1$, и будет сходиться при $\max(|a|, |b|) < |t| \leqslant 1$ для $|a| < 1$ и $|b| < 1$.

3. При

$$w = s(s - 2\pi), \; 0 \leqslant s \leqslant 2\pi,$$

после подстановки $s = -i \ln t$ запишем

$$w = -\ln t (\ln t - 2\pi i).$$

Функция $w = -\ln z (\ln z - 2\pi i)$ оказывается определенной в круге $|z| < 1$ с разрезом вдоль отрезка вещественной оси от 0 до 1.

На основании изложенного мы можем в классе областей, соответствующих $n_z = 1$, отделить области с точками ветвления от областей без точек ветвления. В случае, *когда L является простой кривой, область без точек ветвления будет однолистной.*

Дадим теперь *связь решений двух обратных задач* при одном и том же граничном условии, но в предположении, что искомая область располагается по разные стороны от кривой L. Дело в том, что если $f[s(t)]$ — аналитическая функция, то (как уже отмечалось) можно аналитически продолжить эту функцию по разные стороны кривой L. Обозначим через $F^+(z)$ функцию $f[s(z)]$ при продолжении слева от кривой L и через $F^-(z)$ — при продолжении справа от этой кривой. Тогда

$$F^+(z) = \Phi_1 \{\overline{F^-[\Phi(\bar{z})]}\}, \tag{2}$$

где $\Phi(\bar{z})$ и $\Phi_1(\bar{w})$ являются преобразованиями симметрии ([3, глава III], [4]), для кривых L и L_1 (с уравнением $w = f(s)$). Равенство (2) докажем после построения преобразований $\Phi(\bar{z})$ и $\Phi_1(\bar{w})$.

Преобразование симметрии относительно любой замкнутой кривой обобщает обычное зеркальное отражение относительно прямой. Покажем, что *преобразование симметрии можно определить свойством зеркального отражения в малом* (с последующим аналитическим продолжением). Кривая предполагается по-прежнему аналитической.

Будем обозначать звездочкой наверху симметричную точку. Точка, симметричная с w относительно прямой $\operatorname{Im} w = 0$, является зеркальным отражением w

$$w^* = \bar{w}. \tag{3}$$

Возьмем прямую с уравнением

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0, \tag{4}$$

то есть
$$\operatorname{Im} w = 0,$$
где $w = (ia + b)(z - z_0)$, $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$. Тогда, согласно (3), получим
$$(ia + b)(z^* - z_0) = (-ia + b)(\bar{z} - \bar{z}_0),$$
откуда
$$z^* - z_0 = -\frac{a + ib}{a - ib}(\bar{z} - \bar{z}_0). \tag{5}$$

Пусть уравнением аналитической кривой L является
$$f(x, y) = 0. \tag{6}$$
Через точку $z_0 = x_0 + iy_0$, которая лежит на этой линии, проведем касательную к ней. Уравнение касательной запишется в форме (4) с коэффициентами
$$a = f_x(x_0, y_0), \ b = f_y(x_0, y_0).$$
Для z, близких к z_0 и лежащих на нормали к кривой (нормаль проходит через z_0), получим выражение (5), которое в дифференциалах перепишется так
$$dz^* = -\frac{f_x + if_y}{f_x - if_y}\, d\bar{z}. \tag{7}$$

Будем считать точку z_0 переменной. Уравнение (6) запишем в виде
$$f\left(\frac{z_0 + \bar{z}_0}{2}, \ \frac{z_0 - \bar{z}_0}{2i}\right) = 0. \tag{8}$$

Возьмем полный дифференциал и найдем оттуда dz_0:
$$f_x(x_0, y_0)(dz_0 + d\bar{z}_0) + f_y(x_0, y_0)(dz_0 - d\bar{z}_0)(-i) = 0;$$
$$dz_0 = -\frac{f_x + if_y}{f_x - if_y}\, d\bar{z}_0. \tag{9}$$

Считая $z^*(\bar{z})$ аналитической функцией и сравнивая (7) и (9), получим, что z^* и $\bar{z}$ связаны уравнением
$$f\left(\frac{z^* + \bar{z}}{2}, \ \frac{z^* - \bar{z}}{2i}\right) = 0. \tag{10}$$
В правой части будет нуль, потому что при $z = z_0$ должно получиться уравнение (8). Уравнение (10) определит симметричные точки для всех z, находящихся внутри или вне L. Решая уравнение (10) относительно z^*, получим несколько ветвей аналитической функции
$$z^* = \Phi(\bar{z}),$$
причем для одной из ветвей выполняется условие: $\Phi(\bar{z}_0) = z_0$, $z_0 \in L$. Это и есть преобразование симметрии. Определена функция $\overline{\Phi(\bar{z})}$ будет на римановой поверхности аналитической функции $\Phi(\bar{z})$.

Параметризуем уравнение (10)
$$z^* = \varphi(\tau), \ \bar{z} = \overline{\varphi(\tau)} \ (\tau = e^{i\theta}, \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi). \tag{11}$$
Найдем функцию, обратную к $\varphi(\tau)$:
$$\tau = \varphi^{-1}(z) = \psi(z),$$
откуда
$$\tau = \frac{1}{\overline{\psi(z)}}.$$
С учетом (11) получим
$$z^* = \varphi\left[\frac{1}{\overline{\psi(z)}}\right].$$

6401

Следовательно, преобразование симметрии запишется в виде

$$\Phi(\bar{z}) = \varphi\left[\frac{1}{\overline{\psi(z)}}\right].$$

Аналогичное выражение получится для $\Phi_1(\overline{w})$.

Равенство (2) доказывается теперь нетрудно. В самом деле, справа стоит аналитическая функция, определенная внутри кривой L. На кривой она совпадает с $F^+(z)$. Значит, эти функции тождественны в общей области определения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Аксентьев. Об индексах функций на римановых поверхностях. ДАН СССР, т. 152, № 1, 1963, стр. 9—12.
2. Л. А. Аксентьев. Автореферат кандидатской диссертации. Казань, 1958.
3. Д. А. Граве. Об основных задачах математической теории построения географических карт. Санкт-Петербург, 1896.
4. Н. В. Ламбин. Метод симметрии и его применение к решению краевых задач. Минск, 1960.