ИЮЛЬ 1977 г., ТОМ XIII, № 7

УДК 517.925.14

Б. ПУЖА

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим дифференциальную систему

$$dx_i/dt = f_i(t, x_1, x_2) \quad (i = 1, 2), \tag{1}$$

где $f_i : [0, +\infty) \times R^2 \to R$ $(i = 1, 2)$ удовлетворяют локальным условиям Каратеодори и неравенствам

$$(-1)^{i-1} f_i(t, x_1, x_2) \operatorname{sign} x_{3-i} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2). \tag{2}$$

Нетривиальное решение x_1, x_2 системы (1), заданное на некотором бесконечном промежутке $[t_0, +\infty)$, назовем правильным, если

$$\sup \{ |x_1(s)| + |x_2(s)| : s \geqslant t\} > 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0.$$

Правильное решение назовем колеблющимся, если обе его компоненты имеют последовательности нулей, сходящиеся к $+\infty$.

Наряду с системой (1) рассмотрим систему

$$dx_i/dt = g_i(t, x_1, x_2) \quad (i = 1, 2), \tag{3}$$

правые части которой $g_i:[0, +\infty)\times R^2 \to R$ $(i=1, 2)$ также удовлетворяют локальным условиям Каратеодори.

Наша задача — доказать, что справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть соблюдаются неравенства (2) и*

$$\begin{aligned} &[g_1(t, x_1, y_2) - f_1(t, x_1, x_2)] \operatorname{sign} x_2 \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x_2 y_2 \geqslant 0,\ |x_2| \leqslant |y_2|, \\ &[g_2(t, y_1, x_2) - f_2(t, x_1, x_2)] \operatorname{sign} x_1 \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x_1 y_1 \geqslant 0,\ |x_1| \leqslant |y_1|. \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда из колеблемости всех правильных решений системы (1) вытекает колеблемость всех правильных решений системы (3).

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1, приведем одну лемму, которая является частным случаем теоремы 2.1 работы [1].

Лемма. *Пусть $t_0 \in [0, +\infty)$, $k \in \{1, 2\}$ и существуют абсолютно непрерывны на каждом конечном отрезке промежутка $[t_0, +\infty)$ функции $\alpha_{ij}(i, j = 1, 2)$ такие, что $\alpha_{1j}(t) \leqslant \alpha_{2j}(t)$ при $t \geqslant t_0$ $(j = 1, 2)$ и на множестве $t \geqslant t_0$, $\alpha_{1j}(t) \leqslant x_j \leqslant \alpha_{2j}(t)$ $(j = 1, 2)$ соблюдаются неравенства*

$$\begin{aligned} &(-1)^{i+k}[f_1(t, \alpha_{i1}(t), x_2) - \alpha'_{i1}(t)] \geqslant 0, \\ &(-1)^{i+k}[f_2(t, x_1, \alpha_{i2}(t)) - \alpha'_{i2}(t)] \leqslant 0 \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \tag{5}$$

Тогда, какое бы ни было $c_0 \in [\alpha_{1k}(t_0), \alpha_{2k}(t_0)]$, система (1) имеет решение x_1, x_2, удовлетворяющее условиям

$$x_k(t_0) = c_0, \quad \alpha_{1j}(t) \leqslant x_j(t) \leqslant \alpha_{2j}(t) \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0 \ (j = 1, 2). \tag{6}$$

Сформулированная лемма позволяет нам доказать несколько более общее предложение, чем теорема 1; а именно имеет место такая

Теорема 2. *Пусть соблюдаются неравенства (2) и все правильные решения системы (1) являются колеблющимися. Пусть далее функции $y_i:[a, +\infty) \to R (i=1,2)$,* *где* $a \geqslant 0$, *абсолютно непрерывны на каждом конечном отрезке промежутка* $[a, +\infty)$,

$$\sup \{ |y_i(s)| : s \geqslant t \} > 0 \quad \text{\textit{при}} \quad t \geqslant a \ (i = 1, 2) \tag{7}$$

и

$$\begin{aligned} &[y_1'(t) - f_1(t, y_1(t), x_2)] \operatorname{sign} y_2(t) \geqslant 0 \quad \text{\textit{при}} \quad t \geqslant a, \ x_2 y_2(t) \geqslant 0, \ |x_2| \leqslant |y_2(t)|, \\ &[y_2'(t) - f_2(t, x_1, y_2(t))] \operatorname{sign} y_1(t) \leqslant 0 \quad \text{\textit{при}} \quad t \geqslant a, \ x_1 y_1(t) \geqslant 0, \ |x_1| \leqslant |y_1(t)|. \end{aligned} \tag{8}$$

Тогда как y_1, *так и* y_2 *имеют последовательности нулей, сходящиеся к* $+\infty$.

Доказательство. Допустим обратное. Тогда существуют $l \in \{1, 2\}$ и $t_0 \in [a + \infty)$ такие, что

$$y_l(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0.$$

Для определенности будем считать, что $l = 1$ и

$$y_1(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0. \tag{9}$$

Из (2), (8) и (9) вытекает, что

$$y_2'(t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0.$$

Ввиду последнего неравенства и условия (7) без ограничения общности можем считать, что

$$(-1)^{k-1} y_2(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0, \tag{10}$$

где $k \in \{1, 2\}$.

Положим

$$\alpha_{11}(t) = 0, \qquad \alpha_{21}(t) = y_1(t),$$

$$\alpha_{12}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k = 1, \\ y_2(t) & \text{при} \quad k = 2, \end{cases} \qquad \alpha_{22}(t) = \begin{cases} y_2(t) & \text{при} \quad k = 1, \\ 0 & \text{при} \quad k = 2. \end{cases}$$

Тогда, как это ясно из (2) и (8)—(10), на множестве $t \geqslant t_0$, $\alpha_{1j}(t) \leqslant x_j \leqslant \alpha_{2j}(t)$ ($j = 1, 2$) соблюдаются неравенства (5).

Поэтому, согласно приведенной выше лемме, для любого $c_0 \in (\alpha_{1k}(t_0), \alpha_{2k}(t_0))$ система (1) имеет решение x_1, x_2, удовлетворяющее условию (6). Если $k = 1$, будем иметь

$$x_1(t_0) = c_0 > 0, \quad 0 \leqslant x_i(t) \leqslant y_i(t) \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0 \quad (i = 1, 2).$$

Отсюда ввиду (2) вытекает

$$x_1'(t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0,$$

$$x_1(t) \geqslant c_0 > 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0.$$

Аналогично, если $k = 2$,

$$x_2(t) \leqslant c_0 < 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0.$$

Следовательно, в обоих случаях x_1, x_2 является правильным неколеблющимся решением системы (1). Но это противоречит принятому в теореме предположению. Поэтому полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательство теоремы 1. Отметим прежде всего, что из (2) и (4) вытекают равенства

$$g_1(t, x, 0) = g_2(t, 0, x) = 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant 0, \ x \in R. \tag{11}$$

Пусть y_1, y_2 — произвольное правильное решение системы (3), заданное в промежутке $[a, +\infty)$.

Докажем сперва, что соблюдаются условия (7). В самом деле, в противном случае для некоторых $t_0 \in [a, +\infty)$ и $l \in \{1, 2\}$ имели бы

$$y_l(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0.$$

Для определенности будем считать, что $l = 1$. Тогда ввиду (11)

$$y_2'(t) = g_2(t, 0, y_2(t)) = 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0.$$

Следовательно,

$$y_2(t) = c_0 = \text{const} \neq 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0$$

и

$$g_1(t, 0, c_0) = 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0.$$

Согласно последнему равенству и условию (4),

$$f_1(t,\ 0,\ c_0)=0 \qquad \text{при} \qquad t\geqslant t_0.$$

Отсюда ясно, что $x_1=0$, $x_2=c_0$ является правильным неколеблющимся решением системы (1), заданным на отрезке $[t_0,\ +\infty)$. Но это невозможно, так как все правильные решения системы (1) колеблющиеся. Тем самым мы доказали, что соблюдаются условия (7).

С другой стороны, ввиду (4) ясно, что соблюдаются условия (8). Поэтому в силу теоремы 2 y_1, y_2 являются колеблющимися. Теорема доказана.

Замечание. В случае, когда f_1 не убывает по третьему, а f_2 не возрастает по второму аргументу, для выполнения (4) достаточно, чтобы

$$(-1)^{i-1}g_i(t,\ x_1,\ x_2)\operatorname{sign} x_{3-i}\geqslant(-1)^{i-1}f_i(t,\ x_1,\ x_2)\operatorname{sign} x_{3-i} \quad (i=1,\ 2).$$

Анализируя доказательства теорем 1 и 2, легко убедиться в справедливости следующего предложения.

Теорема 3. *Пусть соблюдаются условия (2) и (4). Тогда из существования хотя бы одного неколеблющегося правильного решения системы (3) вытекает существование континуума неколеблющихся правильных решений системы (1).*

В качестве примера рассмотрим системы

$$dx_i/dt=a_i(t)\,|\,x_{3-i}\,|^{\lambda_i}\operatorname{sign} x_{3-i} \quad (i=1,\ 2) \tag{12}$$

и

$$dx_i/dt=b_i(t)\,|\,x_{3-i}\,|^{\lambda_i}\operatorname{sign} x_{3-i} \quad (i=1,\ 2), \tag{13}$$

где $\lambda_i>0$ $(i=1,\ 2)$, а функции $a_i:[0,\ +\infty)\to R$ и $b_i:[0,\ +\infty)\to R$ суммируемы на каждом конечном отрезке.

Непосредственным следствием теорем 1 и 3 является следующая

Теорема 4. *Пусть*

$$b_1(t)\geqslant a_1(t)\geqslant 0, \qquad b_2(t)\leqslant a_2(t)\leqslant 0 \qquad \textit{при} \qquad t\geqslant 0.$$

Тогда: 1) из колеблемости всех правильных решений системы (12) вытекает колеблемость всех правильных решений системы (13); 2) из существования хотя бы одного неколеблющегося правильного решения системы (13) вытекает существование континуума неколеблющихся правильных решений системы (12).

При $\lambda_1\cdot\lambda_2=1$ аналогичный результат содержится в работе Д. Д. Мирзова [2].

Литература

1. Кигурадзе И. Т., Пужа Б. Дифференц. уравнения, **12**, № 12, 1976.
2. Mirzov J. D. Journ. of Math. Anal. and Appl., **53**, № 2, 1976.

Поступила в редакцию
25 мая 1976 г.

Университет им. Палацкого,
г. Оломоуц, ЧССР