Ю. В. Боровских, Подобные зоны в задаче сравнения сдвиговых параметров двух показательных распределений при неизвестных дисперсиях, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1974, том 43, 6–14

ПОДОБНЫЕ ЗОНЫ В ЗАДАЧЕ СРАВНЕНИЯ СДВИГОВЫХ ПАРАМЕТРОВ ДВУХ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ ДИСПЕРСИЯХ

Ю.В.Боровских

Пусть $x_1, \ldots, x_{n_1}$, $y_1, \ldots, y_{n_2}$ – две независимые повторные выборки соответственно из распределений с плотностями $\frac{1}{b_1} p\left(\frac{x-a_1}{b_1}\right)$ и $\frac{1}{b_2} p\left(\frac{x-a_2}{b_2}\right)$, где $p(x)=0$, если $x<0$, и $p(x)=e^{-x}$, если $x \geqslant 0$. Предположим, что все четыре параметра a_1, a_2 $(|a_1|, |a_2|<\infty)$, b_1, b_2 $(b_1, b_2>0)$ неизвестны и неизвестны какие-либо связи между ними. Нас интересует вопрос о подобных зонах для проверки нулевой гипотезы: $a_1=a_2$.

Пусть нулевая гипотеза верна.

Достаточными статистиками будут следующие три

$$\bar{x}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_i, \quad \bar{y}=\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} y_j, \quad z=\min(x_1,\ldots,x_{n_1}, y_1,\ldots,y_{n_2}) \quad (\mathrm{I})$$

при трех мешающих параметрах: b_1, b_2, $a_1=a_2=a$. Покажем, что в алгебре достаточных статистик зон, удовлетворяющих соответствующему условию подобия, не существует. Случайные величины (I) задаются в области

$$\begin{gathered} a \leqslant z<\infty \\ z \leqslant \bar{x} \\ z \leqslant \bar{y} \end{gathered} \tag{2}$$

распределением с плотностью

$$\pi=-\frac{\vartheta_1^{n_1}}{\Gamma(n_1)} \frac{\vartheta_2^{n_2}}{\Gamma(n_2)} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial z}\left[(\bar{x}-z)^{n_1-1}(\bar{y}-z)^{n_2-1}\right] e^{-\vartheta_1(\bar{x}-a)-\vartheta_2(\bar{y}-a)}, \tag{3}$$

где $\vartheta_1=\frac{n_1}{b_1}$, $\vartheta_2=\frac{n_2}{b_2}$ (доказательство мы предоставляем читателю). Пусть некоторая ограниченная функция $\Phi(z,\bar{x},y)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_a^\infty \int_z^\infty \int_z^\infty \Phi(z, \bar{x}, \bar{y})\, \pi\, dz\, d\bar{x}\, d\bar{y}= \tag{4}$$

$$=\alpha \int_a^\infty \int_z^\infty \int_z^\infty \pi\, dz\, d\bar{x}\, d\bar{y}.$$

тождественно по $\vartheta_1, \vartheta_2 > 0$ и $|a| < \infty$, причем α - константа. Путем тривиальных преобразований (4) приводится к виду

$$\int_a^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(z, u+z, v+z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)(u^{n_1-1} v^{n_2-1}) \times$$
$$\times e^{-\vartheta_1(u+z) \cdot \vartheta_2(v+z)} dz\, du\, dv = \tag{5}$$
$$= \alpha \int_a^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)(u^{n_1-1} v^{n_2-1})\, e^{-\vartheta_1(u+z) - \vartheta_2(v+z)} dz\, du\, dv.$$

В силу (5) почти везде по мере Лебега на a-оси должно быть

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(a, u+a, v+a) \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)(u^{n_1-1} v^{n_2-1})\, e^{-\vartheta_1 u - \vartheta_2 v} du\, dv =$$
$$= d \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)(u^{n_1-1} v^{n_2-1}) e^{-\vartheta_1 u - \vartheta v} du\, dv. \tag{6}$$

Тем самым почти везде в области (2) $\Phi(z, \bar{x}, \bar{y}) = \alpha$. Следовательно в алгебре достаточных статистик нет даже рандомизованных подобных тестов для проверки гипотезы $a_1 = a_2 = a$, если b_1 , b_2 и a - мешающие параметры.

Теперь мы покажем, что подобные зоны есть в алгебре статистик

$$\bar{x}, \quad \bar{y}, \quad x = \min(x_1, \ldots, x_{n_1}), \quad y = \min(y_1, \ldots, y_{n_2}) \tag{7}$$

и даже в подалгебре этой алгебры. Прежде всего решим вопрос существования в принципе.

Поскольку статистики

$$\xi = \frac{n_1 x - \bar{x}}{n_1 - 1}, \qquad \eta = \frac{n_2 y - \bar{y}}{n_2 - 1} \tag{8}$$

суть несмещенные оценки для a , и статистики

$$\zeta_1 = \frac{n_1(\bar{x} - x)}{n_1 - 1}, \qquad \zeta_2 = \frac{n_2(\bar{y} - y)}{n_2 - 1} \tag{9}$$

несмещенно оценивают соответственно b_1 и b_2 (эти факты можно вывести из формулы (I2)) критерий для проверки нулевой гипотезы было бы разумно основывать на статистиках

$$\xi - \eta, \quad \zeta_1, \quad \zeta_2. \tag{10}$$

Такие критерии, подобные пространству выборок, действительно существуют. Именно это мы сейчас и будем исследовать.

<u>Теорема I</u>. Для проверки нулевой гипотезы в пространстве статистик

$$t_1=\frac{\frac{n_1-1}{n_1}\zeta_1+\left|\eta-\xi+\frac{\zeta_2}{n_2}-\frac{\zeta_1}{n_1}\right|}{\frac{n_2-1}{n_2}\zeta_2},$$

$$t_2=\frac{\frac{n_1-1}{n_1}\zeta_1}{\frac{n_2-1}{n_2}\zeta_2+\left|\eta-\xi+\frac{\zeta_2}{n_2}-\frac{\zeta_1}{n_1}\right|} \tag{II}$$

существует нерандомизованный подобный тест любого уровня $\alpha\in(0,1)$.

Доказательство. Можно показать, на чем мы не останавливаемся, что совместная плотность величин (7) равна

$$\frac{\vartheta_1^{n_1}\ \vartheta_2^{n_2}}{\Gamma(n_1-1)\ \Gamma(n_2-1)}(\bar{x}-x)^{n_1-2}(\bar{y}-y)^{n_2-2}\ e^{-\vartheta_1(\bar{x}-a)-\vartheta_2(\bar{y}-a)}, \tag{I2}$$

где $\vartheta_1=\frac{n_1}{b_1}$, $\vartheta_2=\frac{n_2}{b_2}$, если

$$a\le x\le \bar{x},\qquad a\le y\le \bar{y}, \tag{I3}$$

и равна нулю, если это условие нарушено. Рассмотрим величины

$$u=x-a,\quad v=y-a,\quad t_1,\ t_2, \tag{I4}$$

где t_1 и t_2 даются формулой (II). Учитывая (8) и (9), мы находим

$$t_1=\frac{\bar{x}-x+|y-x|}{\bar{y}-y},\qquad t_2=\frac{\bar{x}-x}{\bar{y}-y+|y-x|}. \tag{I5}$$

Преобразование (I4) взаимно однозначно:

$$x=u+a,\qquad y=v+a,$$
$$\bar{x}=u+a+\frac{t_2(t_1+1)}{t_2-t_1}|v-u|, \tag{I6}$$
$$\bar{y}=v+a+\frac{t_2+1}{t_1-t_2}|v-u|.$$

Якобиан преобразования равен

$$\frac{D(x,y,\bar{x},\bar{y})}{D(u,v,t_1,t_2)}=\frac{(t_1+1)(t_2+1)}{(t_1-t_2)^3}(v-u)^2. \tag{I7}$$

Отметим еще, что неравенства (I3) равносильны неравенствам

$$u,v>0,\qquad t_1\ge t_2\ge 0. \tag{I8}$$

Эти сведения достаточны, чтобы, следуя общим правилам, написать совместную плотность распределения вероятностей величин (I4). Мы имеем для нее выражение

$$p=\frac{\vartheta_1^{n_1}\ \vartheta_2^{n_2}}{\Gamma(n_1-1)\ \Gamma(n_2-1)}\times$$

$$\times|v-u|^{n_1+n_2-2}\ t_2^{n_1-2}\ (t_1+1)^{n_1-1}\ (t_2+1)^{n_2-1}\ (t_1-t_2)^{-(n_1+n_2-1)}\times \tag{19}$$

$$\times\exp\left\{-\vartheta_1\left[u+\frac{t_2(t_1+1)}{t_1-t_2}|v-u|\right]-\vartheta_2\left[v+\frac{t_2+1}{t_1-t_2}|v-u|\right]\right\}.$$

Из величин (14) нам нужны только две t_1 и t_2. Совместную плотность последних мы получим, проинтегрировав (19) по квадранту $u, v\geqslant 0$:

$$\iint\limits_{u,v\geq 0} p\,du\,dv=\int\limits_0^\infty du\int\limits_u^\infty p\,dv+\int\limits_0^\infty dv\int\limits_v^\infty p\,du=$$

$$=\frac{\vartheta_1^{n_1}\cdot\vartheta_2^{n_2}}{\vartheta_1+\vartheta_2}\cdot\frac{\Gamma(n_1+n_2-1)}{\Gamma(n_1-1)\Gamma(n_2-1)}\ t_2^{n_1-2}\times \tag{20}$$

$$\times\left\{\frac{(t_2+1)^{n_2-1}}{(t_1+1)^{n_2}}\cdot\frac{1}{(\vartheta_1 t_2+\vartheta_2)^{n_1+n_2-1}}+\frac{(t_1+1)^{n_1-1}}{(t_2+1)^{n_1}}\cdot\frac{1}{(\vartheta_1 t_1+\vartheta_2)^{n_1+n_2-1}}\right\}.$$

Разумеется, здесь

$$t_1\geqslant t_2\geqslant 0. \tag{21}$$

Для обнаружения существования подобных зон в терминах t_1 и t_2 теперь естественно обратиться к теореме, доказанной в [1],[8] которая однажды уже сослужила службу в весьма похожей ситуации при исследовании проблемы Беренса-Фишера [2], [3]. Эта теорема имеет следующую формулировку: *Пусть на прямоугольнике $M: a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d$ заданы n вероятностных плотностей $p_s(x,y)$, $s=1,\dots,n$. Тогда по данному $\alpha\in(0,1)$ можно построить множество $A=A_\alpha\subset M$ такое, что если $\chi_A(x,y)$ – характеристическая функция множества A, то при $s=1,\dots,n$*

$$\int\limits_a^b\left[\chi_A(x,y)-\alpha\right]p_s(x,y)\,dx=0 \tag{22}$$

почти для всех $y\in[c,d]$ и

$$\int\limits_c^d\left[\chi_A(x,y)-\alpha\right]p_s(x,y)\,dy=0 \tag{23}$$

почти для всех $x\in[a,b]$.

Выделим в области (21) бесконечное число прямоугольников

$$\Delta_n:\ 2^n\leqslant t_1\leqslant 2^{n+1},\quad 2^{n-1}\leqslant t_2\leqslant 2^n, \tag{24}$$

$n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$. Затем на каждом прямоугольнике Δ_n определим вероятностную плотность

$$c_n \frac{t_2^{n_1-2}}{(t_1+1)^{n_2}(t_2+1)^{n_1}}, \tag{25}$$

подобрав соответствующим образом константу c_n . Пусть $\alpha \in (0, 1)$ На основании приведенной выше теоремы из [I] для каждого n найдется множество $A_n \subset \Delta_n$, что

$$\int_{2^n}^{2^{n+1}} [\chi_{A_n}(t_1, t_2) - \alpha] c_n \frac{t_2^{n_1-2}}{(t_1+1)^{n_2}(t_2+1)^{n_1}} dt = 0 \tag{26}$$

почти для всех $t_2 \in [2^{n-1}, 2^n]$ и

$$\int_{2^{n-1}}^{2^n} [\chi_{A_n}(t_1, t_2) - \alpha] c_n \frac{t_2^{n_1-2}}{(t_1+1)^{n_2}(t_2+1)^{n_1}} dt_2 = 0 \tag{27}$$

почти для всех $t_1 \in [2^n, 2^{n+1}]$.

Умножим (26) на

$$\frac{1}{c_n} \cdot \frac{\vartheta_1^{n_1} \vartheta_2^{n_2}}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \cdot \frac{\Gamma(n_1+n_2-1)}{\Gamma(n_1-1)\Gamma(n_2-1)} \cdot \frac{(t_2+1)^{n_2-1}}{(\vartheta_1 t_2 + \vartheta_2)^{n_1+n_2-1}}, \tag{28}$$

а (27) на

$$\frac{1}{c_n} \cdot \frac{\vartheta_1^{n_1} \vartheta_2^{n_2}}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \cdot \frac{\Gamma(n_1+n_2-1)}{\Gamma(n_1-1)\Gamma(n_2-1)} \cdot \frac{(t_1+1)^{n_1+n_2-1}}{(\vartheta_1 t_1 + \vartheta_2)^{n_1+n_2-1}} \tag{29}$$

и проинтегрируем первое из получившихся равенств по t_2 по промежутку $[2^{n-1}, 2^n]$, а второе по t_1 по промежутку $[2^n, 2^{n+1}]$, вслед за чем оба результата почленно сложим. Мы увидим, что

$$\iint_{\Delta_n} [\chi_{A_n}(t_1, t_2) - \alpha] \frac{\vartheta_1^{n_1} \vartheta_2^{n_2}}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \cdot \frac{\Gamma(n_1+n_2-1)}{\Gamma(n_1-1)\Gamma(n_2-1)} t_2^{n_1-2} \times \tag{30}$$
$$\times \left\{ \frac{(t_2+1)^{n_2-1}}{(t_1+1)^{n_2}} \cdot \frac{1}{(\vartheta_1 t_2 + \vartheta)^{n_1+n_2-1}} + \frac{(t_1+1)^{n_1-1}}{(t_2+1)^{n_1}} \cdot \frac{1}{(\vartheta_1 t_1 + \vartheta_2)^{n_1+n_2-1}} \right\} dt_1\, dt_2 = 0,$$

каковы бы ни были $\vartheta_1, \vartheta_2 \geqslant 0$, $n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$.

Остается образовать множество

$$A = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} A_n. \tag{3I}$$

Очевидно

$$A \subset \Delta = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \Delta_n. \tag{32}$$

В немногих словах можно убедиться в справедливости соотношения

$$\iint\limits_{t_1\geq t_2\geq 0}\left[\chi_A(t_1,t_2)-\alpha\right]\frac{\vartheta_1^{n_1}\vartheta_2^{n_2}}{\vartheta_1+\vartheta_2}\cdot\frac{\Gamma(n_1+n_2-1)}{\Gamma(n_1-1)\Gamma(n_2-1)}\, t_2^{n_1-2}\times$$

$$\times\left\{\frac{(t_2+1)^{n_2-1}}{(t_1+1)^{n_2}}\cdot\frac{1}{(\vartheta_1 t_2+\vartheta_2)^{n_1+n_2-1}}+\frac{(t_1+1)^{n_1-1}}{(t_2+1)^{n_1}}\cdot\frac{1}{(\vartheta_1 t_1+\vartheta_2)^{n_1+n_2-1}}\right\}dt_1\,dt_2=0, \tag{33}$$

где $\chi_A(t_1,t_2)$ – характеристическая функция множества A, каковы бы ни были $\vartheta_1,\vartheta_2\geq 0$. Действительно, интеграл в (33) сводится к интегралу по множеству Δ и, следовательно, представляется в виде суммы интегралов по Δ_n, $n=\ldots,-1,0,1,\ldots$. Но все интегралы по Δ_n равны нулю, ибо внутри Δ_n $\chi_A(t_1,t_2)=\chi_{A_n}(t_1,t_2)$ и имеет место формула (30). Вместе с (33) мы доказали и нашу теорему: (33) означает, что A есть подобная зона в пространстве (21).

Замечание к теореме 1. Анализ доказательства теоремы 1 показывает, что для проверки нулевой гипотезы в пространстве статистик t_1 и t_2 существует весьма большое число подобных зон любого фиксированного объема $\alpha\in(0,1)$.

Итак можно быть уверенным, что в алгебре статистик (7) нерандомизованные подобные тесты есть. Сейчас мы постараемся указать конкретно один из таких тестов. Он будет находиться в алгебре, порожденной статистиками (10); однако не в алгебре, порожденной t_1 и t_2.

Фиксируем $\alpha\in(0,1)$.

Теорема 2. Для проверки нулевой гипотезы зона R:

$$\left(\frac{|y-x|}{\bar{y}-y}-\alpha^{-\frac{1}{n_2-1}}\right)\frac{1+\operatorname{sign}(y-x)}{2}+$$

$$+\left(\frac{|y-x|}{\bar{x}-x}-\alpha^{-\frac{1}{n_1-1}}\right)\frac{1-\operatorname{sign}(y-x)}{2}\geq -1 \tag{34}$$

в пространстве статистик (7) есть подобная зона объема α.

Доказательство. Вместо переменных $x, y, \bar{x}, \bar{y}$ введем переменные

$$u=x-a,\qquad v=y-a,$$

$$s_1=\frac{|y-x|}{\bar{y}-y}\cdot\frac{1+\operatorname{sign}(y-x)}{2}+\frac{|y-x|}{\bar{x}-x}\cdot\frac{1-\operatorname{sign}(y-x)}{2},$$

$$s_2=\frac{\bar{x}-x}{\bar{y}-\bar{y}}\cdot\frac{1+\operatorname{sign}(y-x)}{2}+\frac{\bar{y}-y}{\bar{x}-x}\cdot\frac{1-\operatorname{sign}(y-x)}{2}. \tag{35}$$

и, исходя из (12), найдем их совместное распределение. Для этого выразим старые переменные через новые:

$$x = u + a, \qquad y = v + a,$$

$$\bar{x} = u + a + |v-u|\left(\frac{s_2}{s_1}\frac{1+\operatorname{sign}(v-u)}{2} + \frac{1}{s_1}\cdot\frac{1-\operatorname{sign}(v-u)}{2}\right), \tag{36}$$

$$\bar{y} = v + a + |v-u|\left(\frac{1}{s_1}\cdot\frac{1+\operatorname{sign}(v-u)}{2} + \frac{s_2}{s_1}\cdot\frac{1-\operatorname{sign}(v-u)}{2}\right).$$

Приведенная формула оказывается полезной в трех отношениях. Во первых, вместе с (35) она показывает, что новые переменные изменяются под условием

$$u,\ v,\ s_1,\ s_2 \geqslant 0. \tag{37}$$

Во вторых, мы получаем возможность осуществить замену в (I2). В третьих, в силу (36)

$$\frac{D(x, y, \bar{x}, \bar{y})}{D(u, v, s_1, s_2)} = \frac{(v-u)^2}{s_1^3}. \tag{38}$$

С учетом сказанного можно без особого труда придти к следующему выражению для совместной плотности величин (35) в области (37):

$$\frac{\vartheta_1^{n_1}\ \vartheta_2^{n_2}}{\Gamma(n_1-1)\Gamma(n_2-1)}\ |v-u|^{n_1+n_2-2}\ \frac{1}{s_1^{\,n_1+n_2-1}}\cdot$$

$$\cdot\begin{cases} s_2^{n_1-2}\ e^{-(\vartheta_1+\vartheta_2)u}\ \exp-\left[\vartheta_1\frac{s_2}{s_1} + \vartheta_2\left(1+\frac{1}{s_1}\right)\right](v-u), & v>u \\ s^{n_2-2}\ e^{-(\vartheta_1+\vartheta_2)v}\ \exp-\left[\vartheta_1\left(1+\frac{1}{s_1}\right) + \vartheta_2\frac{s_2}{s_1}\right](u-v), & v<u. \end{cases} \tag{39}$$

В (39) мы исключим интегрированием s_2, в результате чего найдем совместную плотность величин u, v, s_1:

$$p = \frac{\vartheta_1^{n_1}\ \vartheta_2^{n_2}}{\Gamma(n_1-1)\Gamma(n_2-1)}\times$$

$$\times\begin{cases} \frac{\Gamma(n_1-1)}{\vartheta_1^{n_1-1}}\cdot\frac{(v-u)^{n_2-1}}{s_1^{n_2}}\ e^{-(\vartheta_1+\vartheta_2)u}\ \exp-\vartheta_2\left(1+\frac{1}{s_1}\right)(v-u), & v>u \\ \frac{\Gamma(n-1)}{\vartheta_2^{n_2-1}}\cdot\frac{(u-v)^{n_1-1}}{s_1^{n_1}}\ e^{-(\vartheta_1+\vartheta_2)v}\ \exp-\vartheta_1\left(1+\frac{1}{s_1}\right)(u-v), & v<u. \end{cases} \tag{40}$$

Теперь заметим, что неравенство (34) равносильно неравенству

$$s_1 \geqslant \alpha^{-\frac{1}{n_2-1}}\ \frac{1+\operatorname{sign}(v-u)}{2} + \alpha^{-\frac{1}{n_1-1}}\ \frac{1-\operatorname{sign}(v-u)}{2} - 1. \tag{4I}$$

Нам нужно доказать, что вероятность этого неравенства есть α, каковы бы ни были v_1 и v_2. Плотность величин u, v, s_1 нам известна, и потому мы сразу можем написать

$$P(R)=\int_{\alpha^{-\frac{1}{n_2-1}}-1}^{\infty} ds_1 \int_0^{\infty} du \int_u^{\infty} p\,dv + \int_{\alpha^{-\frac{1}{n_1-1}}-1}^{\infty} ds_1 \int_0^{\infty} dv \int_v^{\infty} p\,du =$$

$$=\frac{v_1}{v_1+v_2}\int_{\alpha^{-\frac{1}{n_2-1}}-1}^{\infty}\frac{n_2-1}{(1+s_1)^{n_2}}ds_1+\frac{v_2}{v_1+v_2}\int_{\alpha^{-\frac{1}{n_1-1}}-1}^{\infty}\frac{n_1-1}{(1+s_1)^{n_1}}ds_1. \tag{42}$$

Интегралы во второй строке (42) легко вычисляются, и мы убеждаемся, что $P(R)=\alpha$, каковы бы ни были v_1 и v_2 (параметр a был исключен заранее). Теорема доказана.

В заключение приведем один любопытный вариант теоремы I. Пусть в области (2I) заданы семейства распределений (20); каждое отдельное семейство характеризуется парой (n_1, n_2).

Теорема 3. Если произвольное множество пар $\{(n_1, n_2)\}$ конечно, то для любого уровня $\alpha\in(0,1)$ в области (2I) существует зона подобная для всех соответствующих семейств одновременно.

Доказательство этой теоремы сводится к повторению аргументов доказательства теоремы I, начиная с текста, идущего после формулы (2I), с той лишь разницей, что теперь надо в полной мере использовать утверждение теоремы из [I]. Сделать это нетрудно, и мы здесь не будем задерживаться.

Теорема 3 означает, что для любого конечного числа пар выборок объема n_1 и n_2 (см.начало работы) в пространстве (2I) существует нерандомизованный тест, являющийся подобным одновременно для всех этих пар выборок и имеющий предписанный уровень.

Заканчивая работу заметим, что ранее [4] в общем случае были известны лишь приближенно подобные зоны. Аналогичные зоны строились и в проблеме Беренса-Фишера. По этому поводу см. [5] и более ранние работы [6] и [7].

Цитированная литература

[I] Романовский И.В., Судаков В.Н. О существовании независимых разбиений. - Труды МИАН СССР им.В.А.Стеклова, 1965, т.79.

[2] Каган А.М., Шалаевский О.В. Проблема Беренса-Фишера; подобные зоны в алгебре достаточных статистик. - ДАН СССР, 1964, 155, 6.

[3] Линник Ю.В., Судаков В.Н., Романовский И.В. Нерандомизованный однородный тест в проблеме Беренса--Фишера. - ДАН СССР, 1964, 155, 6.

[4] Пагурова В.И. Сравнение параметров сдвига двух показательных распределений. - Теория вероятностей и ее применения, 1969, 14, 4.

[5] Пагурова В.И. О сравнении средних значений в двух нормальных выборках. - Теория вероятностей и ее применения, 1968, 13, 3.

[6] Шалаевский О.В. Труды Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике. Ереван, 1960.

[7] Шалаевский О.В. Некоторые замечания к уравниванию наблюдений с неизвестными весами. - ДАН СССР, 1960, 130, 1.

[8] Линник Ю.В. Статистические задачи с мешающими параметрами. М., 1966.