

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. A. Kiiko, Formulation of the problem on aeroelastic vibrations of a conic shell of small opening with supersonic gas flow inside,  
*Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 2004, Number 3, 58–61

<https://www.mathnet.ru/eng/vmumm1252>

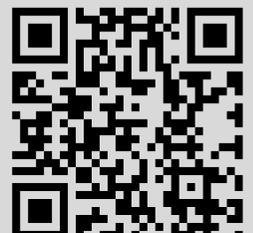
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.88

June 20, 2025, 15:54:15



Таким образом, как следствие мы имеем следующий результат.

**Теорема 4.** Пусть  $f \in L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  и  $\varphi \in \Phi$ .

1. Если  $\varphi \in B_2$ , то условия

$$E_n(f)_p = O \left[ \varphi \left( \frac{1}{n} \right) \right] \quad \text{и} \quad \|f - f_h\|_p = O[\varphi(h)]$$

эквивалентны.

2. Если  $\varphi \in B_1$ , то условия

$$E_n(f)_p = O \left[ \varphi \left( \frac{1}{n} \right) \right] \quad \text{и} \quad \|f - f_h^*\|_p = O[\varphi(h)]$$

эквивалентны.

Заметим, что так как условие (1) эквивалентно условию ( $B_2$ ) (см. [5]), то утверждение 1 теоремы 4 обобщает большинство результатов работы [1] (в частности, теорему 1); остальные результаты этой работы следуют из эквивалентностей (2)–(5).

Аналогичные результаты можно записать для наилучших приближений функции из  $L_p(\mathbb{R})$  целыми функциями экспоненциального типа.

Работа выполнена при поддержке NSERC (грант А 4816), РФФИ (проекты № 03-01-00080 и 03-01-06155) и Программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-1657.2003.1).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ланина Е.Г. Наилучшее приближение функций и приближения функциями Стеклова // Вестн. Моск. ун-та. Матем. механ. 2000. № 2. 49–52.
2. Ditzian Z., Ivanov K.G. Strong converse inequalities // J. Anal. Math. 1993. 61. 61–111.
3. Butzer P.L., Berens H. Semi-groups of operators and approximation. N.Y.: Springer-Verlag, 1967.
4. Барн Н.К., Стечкин С.Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. матем. о-ва. 1956. 5. 483–522.
5. Тихонов С.Ю. Обобщенные классы Липшица и коэффициенты Фурье // Матем. заметки. 2004. 75, вып. 5–6.

Поступила в редакцию  
17.12.03

УДК 539.3:534.1

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ АЭРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЯХ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ МАЛОГО РАСТВОРА, ВНУТРИ КОТОРОЙ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ ПРОТЕКАЕТ ГАЗ

И. А. Кийко

В работах по аэроупругим колебаниям и устойчивости оболочек (панельный флаттер) давление аэродинамического взаимодействия оболочки с потоком вычисляется, как правило, по формуле “поршневой” теории [1, 2]. Однако в ряде случаев, как показывают исследования [3, 4], это делается без достаточных на то оснований. К задаче, которая сформулирована в заголовке, данное замечание относится в полной мере; ниже устанавливается, что формулу “поршневой” теории следует дополнить слагаемыми, которые более полно учитывают неравномерность характеристик основного потока.

Представим себе (в сферической системе координат  $r, \theta, \psi$ ) коническую поверхность  $\theta = \theta_0$ ,  $r \in [r_0, \infty)$ ; ее часть  $[r_1 > r_0, r_2]$  занимает тонкая упругая оболочка, остальную часть поверхности будем считать жесткой. Угол раствора конуса  $\theta_0$  считаем малым, так что  $\theta_0^2 \ll 1$ . Внутри этой конструкции в положительном направлении оси  $r$  протекает газ. В невозмущенном состоянии (как если бы оболочка покоилась) течение газа полагаем радиальным, его параметры  $\rho_0, p_0, u_0, a_0$  — соответственно плотность, давление, радиальная скорость, скорость звука — известные функции полярного радиуса  $r$ . По предположению  $M^2 = (u_0/a_0)^2 \gg 1$ .

Колебания оболочки с малыми амплитудами вызывают возмущение основного потока и возникновение дополнительного давления аэродинамического взаимодействия  $\Delta p$ . В настоящее время имеются хорошо разработанные варианты теории оболочек, поэтому при постановке задач колебаний и устойчивости (панельный флаттер) основную проблему составляет определение  $\Delta p$ .

С хорошим приближением возмущенное течение можно считать потенциальным [5]; обозначим через  $\bar{u}$  вектор скорости потока:

$$\bar{u} = \{u_r, u_\theta, u_\psi\} = \left\{ u_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right\}, \quad (1)$$

возмущение скорости звука определим из интеграла Коши-Лагранжа:

$$a = -\frac{\gamma - 1}{2a_0} \left( u_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (2)$$

Для описания движения газа воспользуемся известным уравнением [5]

$$a^2 \bar{\nabla} \cdot \bar{u} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \cdot [(\bar{u} \cdot \bar{\nabla}) \bar{u}].$$

Подставим в него (1) и (2), линеаризуем по малым возмущениям, введем безразмерную переменную  $r' = r/l$ ,  $l = r_2 - r_1$ , положим, как обычно,  $\varphi = \varphi_1 \exp(\omega t) \cos m\psi$  и оставим прежние обозначения. В результате получим

$$\begin{aligned} (M^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \left[ 2M \frac{l\omega}{a_0} + 2 \frac{M^2}{a_0} \frac{\partial u_0}{\partial r} \left( \frac{\gamma - 1}{2} M + \frac{1}{M} \right) - \frac{2}{r} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \\ + \left[ \frac{l^2 \omega^2}{a_0^2} + (\gamma - 1) \frac{M^2}{a_0} \frac{l\omega}{a_0} \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \varphi - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Обозначим через  $W_0(r, \psi, t)$  нормальные прогибы оболочки и положим  $W_0 = W \exp(\omega t) \cos m\psi$ ; условие непроницаемости на поверхности оболочки запишется при этом в следующем виде (после линеаризации):

$$\frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = u_0 \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{l\omega}{u_0} W - \frac{1}{r} W \right). \quad (4)$$

На оси оболочки скорость  $u_0$  обращается в нуль:

$$u_\theta|_{\theta=0} = \frac{1}{l} \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \Big|_{\theta=0} = 0. \quad (5)$$

Для дополнительного давления примем  $\Delta p = \Delta q \exp(\omega t) \cos m\psi$ , при этом  $\Delta q$  определится известным линеаризованным выражением

$$\Delta q = -\frac{\rho_0 u_0}{l} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\omega l}{u_0} \varphi \right)_{\theta=\theta_0}. \quad (6)$$

Упрощение задачи (3)–(5) основано на предположении о малой конусности:  $\theta_0^2 \ll 1$ ; при этом  $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2 \approx 1$ . В пределах оболочки безразмерная переменная  $r$  изменяется мало ( $r \gg 1$ ), поэтому введем новую переменную  $\zeta = r \sin \theta$ , так что  $d\zeta = r d\theta$ . Внесем это в (3) и учтем, что  $M^2 \gg 1$  и  $2/r \ll 1$ ; окончательно получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} - \frac{m^2}{\zeta^2} \varphi - M^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - A(r) \frac{\partial \varphi}{\partial r} - B(r) \varphi = 0. \quad (7)$$

Последнее слагаемое в правой части (4) мало в сравнении с первым, поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_0} = u_0 \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{l\omega}{u_0} W \right), \quad \zeta_0 = r \sin \theta_0 \quad (8)$$

и вместо (6) получим

$$\Delta q = -\frac{\rho_0 u_0}{l} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\omega l}{u_0} \varphi \right)_{\zeta=\zeta_0}. \quad (9)$$

В уравнении (7) введены обозначения:

$$A(r) = 2M \frac{l\omega}{a_0} + 2 \frac{M^2}{a_0} \left( \frac{\gamma-1}{2} M + \frac{1}{M} \right) \frac{\partial u_0}{\partial r}, \quad B(r) = \frac{l^2 \omega^2}{a_0^2} + (\gamma-1) \frac{M^2}{a_0} \frac{l\omega}{a_0} \frac{\partial u_0}{\partial r}.$$

Приближенное решение задачи (7), (8) основано на том, что при малой конусности  $M(r)$ ,  $A(r)$ ,  $B(r)$  — это мало и плавно меняющиеся функции. Введем вместо  $r$  переменную  $z$ , отсчитываемую от левого торца оболочки, и оставим за всеми функциями прежние обозначения; в сверхзвуковом течении  $u_0 = 0$  и  $\Delta p = 0$  при  $z \leq 0$ , откуда следует  $\varphi = 0$ ,  $\partial \varphi / \partial z = 0$  при  $z \leq 0$ . Перейдем в (7), (8) к изображениям Лапласа, полагая  $M(z)$ ,  $A(z)$ ,  $B(z)$  “почти постоянными” параметрами; получим в результате ( $s$ — параметр преобразования)

$$\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \zeta} - \left( \beta^2 + \frac{m^2}{\zeta^2} \right) \varphi^* = 0, \quad \frac{\partial \varphi^*}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_0} = u_0 \left( s + \frac{l\omega}{u_0} \right) W^*, \quad (10)$$

$$\beta^2 = M^2 s^2 + As + B. \quad (11)$$

Условие (5) запишется в виде

$$u_{\theta}^*|_{\theta=0} = \frac{1}{l} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = 0. \quad (12)$$

Решение уравнения (10) при условии (12) записывается через модифицированную функцию Бесселя:  $\varphi^* = CI_m(\beta\zeta)$ ; определив  $C$  из (11), окончательно получим

$$\varphi^* = u_0 \left( s + \frac{l\omega}{u_0} \right) \frac{I_m(\beta\zeta)}{\beta I'_m(\beta\zeta_0)} W^*.$$

Преобразованное по Лапласу давление взаимодействия  $\Delta q^*$  определится из (6):

$$\Delta q^* = -\frac{\rho_0 u_0^2}{l} \left( s + \frac{\omega l}{u_0} \right)^2 \frac{I_m(\beta\zeta_0)}{\beta I'_m(\beta\zeta_0)} W^*, \quad (13)$$

в последних формулах штрихом обозначена производная от  $I_m$  по аргументу.

Обратное преобразование (13) приводит к трудному для анализа результату, поэтому предварительно выполним некоторые оценки. Частоты собственных колебаний конической оболочки могут быть вычислены по формуле [6]

$$\omega_j = \frac{\pi C_0}{l} \left( \frac{h}{R} \right)^{1/2} \zeta_j, \quad (14)$$

здесь  $C_0$  — “стержневая” скорость звука в материале оболочки;  $h$  — ее толщина;  $R = (r_1 + r_2) \sin \theta_0 / 2$ ; параметр  $\zeta_j$  зависит от краевых условий, форм колебаний и других параметров задачи и изменяется в пределах от нескольких единиц до величин порядка десяти. Из (14) получим

$$\frac{|\omega|l}{a_0} \sim \frac{\omega_j l}{a_0} = \frac{\pi C}{a_0} \left( \frac{h}{R} \right)^{1/2} \zeta_j$$

для реальных оболочек отсюда следует оценка  $|\omega|l/a_0 \sim (0,1 \div 0,7) \cdot 10$ , учитывая которую при  $M^2 \gg 1$  можно принять  $|\beta\zeta_0| \gg 1$  и использовать асимптотическое разложение  $I_m(\beta\zeta_0)$ . По свойству преобразования Лапласа  $\text{Re } \beta > 0$ , и после несложных выкладок находим

$$\frac{I_m(\beta\zeta_0)}{I'_m(\beta\zeta_0)} \sim 1 + \frac{1}{2\beta\zeta_0}. \quad (15)$$

Положим  $\beta^2 = M^2(s + s_1)(s + s_2)$ ,  $2M^2 s_{1,2} = A \pm \sqrt{A^2 - 4M^2 B}$  и обозначим  $l\omega/u_0 = \Omega$ ; подставив это вместе с (15) в (13), получим

$$\Delta q^* = -\frac{\rho_0 u_0^2}{Ml} \frac{(s + \Omega)^2 W^*(s)}{(s + s_1)^{1/2} (s + s_2)^{1/2}} - \frac{\rho_0 u_0^2}{2\zeta_0 M^2 l} \frac{(s + \Omega)^2 W^*(s)}{(s + s_1)(s + s_2)}.$$

Оригинал  $\Delta q(z)$  восстанавливается по таблицам и теореме о свертке, интегральные слагаемые оцениваются на основании очевидного неравенства  $|(s_2 - s_1)(s_2 + s_1)| \ll 1$ . В результате выкладок будем иметь

$$\Delta q(z) = -\frac{\gamma p_0}{a_0} \left[ \omega W + u_0 \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{a_0}{2l\zeta_0(z)} W - M \frac{\partial u_0}{\partial z} \left( \frac{\gamma - 1}{2} M + \frac{1}{M} \right) W - \frac{1}{\zeta_0(z)} \frac{\partial u_0}{\partial z} \left( \frac{\gamma - 1}{2} M + \frac{1}{M} \right) \int_0^z e^{-\Omega(z-\tau)} W(\tau) d\tau \right]; \tag{16}$$

при записи интегрального слагаемого приближенно принято  $(s_1 + s_2)/2 = A(\tau)/(2M^2) \cong l\omega/u_0 = \Omega$ .

Первые два слагаемых в правой части (16) отвечают “поршневой” теории, физический смысл следующих двух — это давление взаимодействия изгибаемой оболочки с винклеровским основанием “жесткости”:

$$K^* = \frac{\gamma p_0}{a_0} \left[ \frac{a_0}{2l\zeta_0} - M \frac{\partial u_0}{\partial z} \left( \frac{\gamma - 1}{2} M + \frac{1}{M} \right) \right].$$

Последнее слагаемое в (16) в отличие от предыдущих носит нелокальный характер: давление в точке  $z$  зависит (с затухающей памятью) от значений прогибов на всем предшествующем отрезке.

Обозначим через  $\Phi_1 = \Phi(z) \exp(\omega t) \cos m\psi$  функцию напряжений; систему линейных уравнений, описывающих колебания оболочки, представим в виде

$$\begin{aligned} L_1(\Phi, W) + \rho_1 \omega^2 h W - \Delta q &= 0, \\ L_2(\Phi, W) &= 0; \end{aligned} \tag{17}$$

здесь  $L_1, L_2$  — известные операторы,  $\rho_1$  — плотность материала оболочки. Дополнив систему (17) однородными граничными условиями на торцах  $z = 0$  и  $z = 1$ , получим задачу на собственные значения. Как обычно, устойчивыми будем считать колебания, если  $\text{Re } \omega < 0$ . Обозначим через  $p^*, u^*$  характерные значения давления и скорости невозмущенного потока, так что  $p_0 = p^* p_1, u_0 = u^* u_1$ . Поскольку при других заданных параметрах системы  $\omega = \omega(p^*, u^*, m)$ , область устойчивых движений определится из условия  $\text{Re } \omega(p^*, u^*, m) < 0$ , а критические значения параметров потока (в частности, критическая скорость  $u^*$  флаттера при заданном давлении  $p^*$ ) — из уравнения  $\text{Re } \omega(p^*, u^*, m) = 0$  или, например,  $u^* = u^*(p^*, m)$ . Так как величина  $m$  неизвестна заранее, истинная критическая скорость флаттера определится из условия  $v_{кр} = \min_m u^*(p^*, m)$ , тем самым будет найдено и значение  $m_{кр}^*$ .

Отметим в заключение специфику и трудность сформулированной задачи, состоящие в том, что собственное число  $\omega$  и параметр скорости потока  $u^*$  сложным образом входят в интегральное слагаемое в (16), поскольку  $\Omega = l\omega/(u^* u_1)$ .

Автор выражает благодарность Г. Г. Черному за обсуждение работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 00-01-00592).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и техники: Механика деформируемого твердого тела. Т. II. М.: ВИНТИ, 1978. 67–122.
2. Колосов Г.И., Малинин А.А. Анализ условий возникновения флаттера в сопловых насадках ракетных двигателей // Космонавтика и ракетостроение. 1999. № 16. 93–96.
3. Ильюшин А.А., Кийко И.А. Закон плоских сечений в сверхзвуковой аэродинамике и проблема панельного флаттера // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 1995. № 6. 138–142.
4. Кийко И.А. Постановка задачи о флаттере оболочки вращения и пологой оболочки, обтекаемой потоком газа с большой сверхзвуковой скоростью // Прикл. матем. и механ. 1999. 63, вып. 2. 305–312.
5. Основы газовой динамики / Под ред. Г. Эммонса; Пер. с англ. М.: ИЛ, 1963.
6. Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975.

Поступила в редакцию  
23.09.02