O. G. Parfenov, On the properties of embedding operators of some classes of analytic functions,
Algebra i Analiz, 1991, Volume 3, Issue 2, 199–222

Алгебра и анализ
Том 3 (1991), вып. 2

О СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРОВ ВЛОЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

О. Г. Парфенов

Работа посвящена исследованию операторов вложения некоторых классов аналитических функций в пространства $L_2(\mu)$. Сейчас хорошо известны критерии ограниченности и компактности таких операторов. В работе исследуются необходимые и достаточные условия принадлежности операторов вложения симметрично-нормированным идеалам.

Приводятся общие результаты такого типа для пространств функций, имеющих воспроизводящее ядро. Далее, для конкретных пространств (классы Бергмана, Харди, Дирихле, Фока) на основе этих общих результатов находятся критерии принадлежности операторов вложения классам Шаттена–Неймана $\sigma_p, p > 0$.

§ 1. Введение

1. Рассмотрим область G в пространстве $\mathbb{C}^n$, борелевскую меру μ в G и некоторое пространство $X^2(G)$, состоящее из функций, аналитических в (G), и наделенное гильбертовой нормой. Эта статья посвящена оценкам спектра „оператора вложения"

$$J : X^2(G) \to L_2(\mu), \tag{1}$$

сопоставляющего каждой функции $f \in X^2(G)$ ее же, но как элемент пространства $L_2(\mu)$. Разумеется, сама возможность такого сопоставления налагает определенные, зависящие от $X^2(G)$, ограничения на меру μ. Классическим примером может служить теорема вложения Карлесона. Она относится к случаю

$$G = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}; \quad X^2(G) = H^2, \tag{2}$$

где H^2 обозначает класс Харди, состоящий из всевозможных функций f, аналитических в $\mathbb{D}$, и таких, что

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n, \quad \sum_n |a_n|^2 < \infty.$$

Карлесон дал явное геометрическое описание мер μ, для которых оператор (1) в ситуации (2) определен и непрерывен ([1], другое доказательство см. в [16]). Теорема Карлесона послужила образцом для целого ряда других результатов такого же типа, отвечающих другим естественным классам $X^2(G)$.

Каждый такой результат нетрудно преобразовать в теорему, доставляющую критерий *компактности* оператора J. После этого естественно возникает новая задача — изучить асимптотические свойства s-чисел оператора J. Напомним,

Ключевые слова: симметрично-нормированные идеалы, классы Шаттена–Неймана, воспроизводящее ядро, классы Харди, Бергмана, Дирихле, Фока.

что $s_n(J)$ есть $\lambda_n((J^*J)^{1/2})$; через $\{\lambda_n(T)\}$ обозначается последовательность собственных чисел неотрицательного компактного оператора T, расположенная по убыванию и с учетом кратности.

Интерес к оценкам s-чисел оператора J оправдан следующими обстоятельствами. Во-первых, $s_n(J)$ имеет простой аппроксимационный смысл, именно

$$s_n(J) = d_n(X^2(G), L_2(\mu)) =$$
$$\inf_{L_n} \sup_{x\in X^2(G), \|x\|\leqslant 1} \inf_{Y\in L_n} \|x-y\|_{L_2(\mu)},$$

где L_n — произвольное n-мерное подпространство в $L_2(\mu)$. Величина $d_n(X^2(G), L_2(\mu))$ есть n-й поперечник по А. Н. Колмогорову. Как видно из определения, это есть расстояние в метрике $L_2(\mu)$ от единичного шара пространства $X^2(G)$ до „самого близкого“ n-мерного подпространства в $L_2(\mu)$. Отметим, что в нашей ситуации есть и другие полезные аппроксимационные описания (поперечники по И. М. Гельфанду, линейные и т.д.). Таким образом, наша тема смыкается с исследованиями количественных характеристик компактных семейств аналитических функций (в этой связи отметим работы [17, 18]).

Во-вторых операторы (1) порождают серию интересных примеров конкретных операторов Ганкеля. А именно, если в ситуации (2) мера μ сосредоточена на отрезке $(-1,1)$, то оператором Ганкеля будет J^*J. Оценкам s-чисел операторов Ганкеля, в частности критериям их принадлежности операторным идеалам σ_p и $\sigma_{p,q}$ (их определения см. ниже), посвящены известные работы В. В. Пеллера [9,10].

В третьих, оценки s-чисел операторов J углубляют наше понимание механизма непрерывных и компактных вложений типа (1), играющих существенную роль в комплексном анализе (в особенности в теории интерполяции аналитических функций).

Общий подход, предложенный в настоящей работе, позволяет для ряда конкретных пространств $X^2(G)$ дать в терминах „убывания“ меры μ вблизи границы необходимые и достаточные условия принадлежности J некоторым операторным идеалам. В работе рассмотрены следующие классы: $A^2(\mathbb{B}^n)$ — класс Бергмана в единичном шаре $\mathbb{B}^n$ из $\mathbb{C}^n$, $A^2(G)$ — класс Бергмана в плоской области G, $H^2(\mathbb{B}^n)$ — класс Харди в $\mathbb{B}^n, F_\lambda$, — классы целых функций типа Фока–Бергмана, $\mathcal{D}_\alpha$ — классы Дирихле в единичном круге (их определения см. ниже).

Вывод конкретных критериев принадлежности операторов J какому–либо идеалу основан на рассмотрениях абстрактного характера, в которых мы отвлекаемся от природы элементов пространства $X^2(G)$, используя лишь то обстоятельство, что оно имеет воспроизводящее ядро K. Это по определению означает, что для любой $f \in X^2(G)$ и любой точки $x \in G$ справедливо представление

$$f(x) = (f(\cdot), K(x,\cdot))_{X^2(G)}.$$

В терминах ядра K мы дает необходимые и (отдельно) достаточные условия принадлежности оператора J тому или иному операторному идеалу. Для конкретных пространств $X^2(G)$, перечисленных выше, эти условия совпадают, доставляя окончательные результаты.

2. Напомним необходимые для дальнейшего определения теории операторных идеалов в гильбертовом пространстве H. Пусть T — компактный оператор в H.

Будем говорить, что T принадлежит классу Шаттена-Неймана $\sigma_p, p > 0$, если

$$\|T\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p(T))^{1/p} < \infty.$$

При $p \geqslant 1$ величина $\|T\|_p$ есть норма, а при $p < 1$ справедливо неравенство С.Ю.Ротфельда [7]:

$$\|A+B\|_p^p \leqslant \|A\|_p^p + \|B\|_p^p. \tag{3}$$

Далее, T принадлежит классу Шаттена-Лоренца $\sigma_{p,q}$, $0 < p, q < \infty$, если

$$\|T\|_{p,q} = (\sum_{n=1}^{\infty} s_n^q(T) \cdot n^{qp^{-1}-1})^{1/q} < \infty, \tag{4}$$

и классу $\sigma_{p,\infty}$, если

$$\|T\|_{p,\infty} = \sup_n n^{1/p} s_n(T) < \infty.$$

Очевидно, $\sigma_{p,p} = \sigma_p$. При $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, а также при $p = q = 1$ величина $\|T\|_{p,q}$ эквивалентна некоторой норме, в остальных случаях это — квазинорма (см. [8]).

Мы будем использовать общее понятие симметрично-нормированного идеала (с.-н.идеала) в гильбертовом пространстве (см. [5], гл.III). Нам потребуется доминационное свойство (см. [6], с.239) — пусть $\mathfrak{A}$ — с.н.идеал, будем говорить, что $\mathfrak{A}$ обладает доминационным свойством ($\mathfrak{A}$ есть D-идеал), если для любого $S \in \mathfrak{A}$ и любого ограниченного оператора T из неравенств

$$\sum_{n=1}^{N} s_n(T) \leqslant \sum_{n=1}^{N} s_n(S),$$

справедливы при любом N, следует, что $T \in \mathfrak{A}$ и $\|T\|_{\mathfrak{A}} \leqslant \|S\|_{\mathfrak{A}}$.

Для D-идеалов справедлива теорема о взаимно-однозначном соответствии этих идеалов идеалам в пространстве последовательностей $c_0/\{a_n\} \in c_0$, если $a_n \to 0, n \to \infty$ ((с доминационным свойством) см.[6], теорема 15.4.5, с.241). Норму в идеале последовательностей, соответствующую норме с.н.идеала $\mathfrak{A}$, будем обозначать буквой $\mathcal{A}$.

3. Теперь приведем определения основных функциональных пространств, используемых в работе.

Пусть $\mathbf{D}$ — единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}, T$ — единичная окружность. Класс Дирихле $\mathcal{D}_\alpha$, α — любое вещественное число, — множество аналитических в $\mathbf{D}$ функций с гильбертовой нормой:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n; \quad \|f\|_\alpha^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^\alpha |a_n|^2.$$

При $\alpha = 0$ получается класс Харди H^2, при $\alpha = -1$ — класс Бергмана A^2, при $\alpha = 1$ — обычный класс Дирихле.

Далее, класс Фока F_λ, $\lambda > 0$, — множество целых функций на комплексной плоскости с гильбертовой нормой:

$$\|f\|_\lambda^2 = \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \exp(-|z|)^{2\lambda}) dS(z),$$

dS — плоская мера Лебега.

Пусть $\mathbf{B}^n$ — единичный шар в $\mathbb{C}^n$, S^n — его граница. Класс Бергмана $A^2(\mathbf{B}^n)$ — множество аналитических в $\mathbf{B}^n$ функций с нормой

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbf{B}^n} |f(z)|^2 dV(z),$$

dV — $2n$-мерная мера Лебега в $\mathbb{C}^n$. Аналогично определяется класс Бергмана $A^2(G)$ для любой ограниченной области.

Класс $H^2(\mathbb{B}^n)$ определяется как множество аналитических в $\mathbb{B}^n$ функций с нормой

$$\|f\|^2 = \sup_{0<\rho<1} \int_{S^n} |f(\rho z)|^2 d\tau(z),$$

$d\tau$ — $(2n-1)$-мерная мера Лебега на сфере S^n.

4. Критерии ядерности (принадлежность σ_1) для операторов вложения различных классов аналитических функций исследовались автором [11]. Критерий принадлежности σ_p для операторов вложения классов Дирихле $\mathcal{D}_\alpha$ при некоторых условиях получен Д. Люкингом [12]. Сформулируем результат Д. Люкинга в удобных для нас терминах. Определим сначала диадическое разбиение круга $\mathbb{D}$:

$$\mathbb{D} = \cup_{n,k}\Delta_{n,k},$$

$$\Delta_{n,k} = \{z \in \mathbb{D} | 2^{-n-1} < 1 - |z| \leqslant 2^{-n}, \frac{2\pi k}{2^n} < \arg z \leqslant \frac{2\pi(k+1)}{2^n}\},$$

$$n = 0,1,\ldots; \quad k = 0,1,\ldots 2^n - 1.$$

Теорема 1[12]. *Пусть $p > 0, \alpha < 1, p\alpha < 2$. Для того чтобы оператор вложения $J : \mathcal{D}_\alpha \to L_2(\mu)$ принадлежал σ_p, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n,k} (K(z_{n,k}, z_{n,k})\mu(\Delta_{n,k}))^{p/2} < \infty, \tag{5}$$

здесь K — воспроизводящее ядро $\mathcal{D}_\alpha$ и $z_{n,k} \in \Delta_{n,k}$ (выбор точек $z_{n,k}$ не влияет на (5)).

В настоящей работе мы предлагаем общий подход к получению необходимых и достаточных условий принадлежности операторов вложения D-идеалам, в частности σ_p и $\sigma_{p,q}$. Некоторые результаты сохраняются и для идеалов $\sigma_p, p < 1$.

Таким образом, получены новое доказательство теоремы Люкинга при $\alpha < 0$, а также аналогичные результаты для классов $F_\lambda, A^2(\mathbf{B}^n), H^2(\mathbf{B}^n)$.

5. Сформулируем основные результаты работы. Пусть имеется разбиение области G на борелевские подмножества G_n:

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n, \tag{6}$$

Будем говорить, что выполнено свойство (А) (оно относится к классу $X^2(G)$ и разбиению (6)), если справедлива следующая теорема вложения: оператор вложения J класса $X^2(G)$ в $L_2(\mu)$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_n \int_{G_n} K(x,x) d\mu(x) < \infty. \tag{7}$$

Выполнение условия (А) в конкретных ситуациях обсуждается в тексте работы.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (A) *и* $\mathfrak{A}$ *есть* D*-идеал. Тогда существует постоянная* c*, не зависящая от меры* μ*, такая, что выполнено неравенство*

$$\|JJ^*\|_{\mathfrak{A}} \leqslant c\mathcal{A}(\{I_n(\mu)\}_{n=1}^{\infty}),$$
$$I_n(\mu) = \int\limits_{G_n} K(x,x)d\mu(x). \tag{8}$$

Таким образом, неравенство (8) дает достаточное условие принадлежности оператора J D-идеалам.

Для формулировки обратного результата определим свойство (B) для класса $X^2(G)$ и разбиения (6): будем говорить, что выполнено свойство (B), если существуют точки $x_n \in G_n$ и $\gamma_0 > 0$, такое, что для $x \in G_n$ выполнено неравенство

$$|K(x,x_n)|^2 \geqslant \gamma_0 K(x,x)K(x_n,x_n). \tag{9}$$

Определим еще дискретную меру μ_0, полагая

$$\mu_0(\{x_n\}) = (K(x_n,x_n))^{-1}.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия:*

а) *выполнено свойство (B);*

б) *оператор вложения* $J_0 : X^2(G) \to L_2(\mu_0)$ *ограничен;*

в) *оператор вложения* $J : X^2(G) \to L_2(\mu)$ *принадлежит* D*-идеалу* $\mathfrak{A}$.

Тогда существует постоянная c*, не зависящая от меры* μ*, такая, что выполнено неравенство*

$$\|J\|_{\mathfrak{A}} \geqslant c\mathcal{A}(\{J_n^{1/2}(\mu)\}_{n=1}^{\infty}). \tag{10}$$

Теорема 3 дает необходимое условие принадлежности оператора D-идеалу $\mathfrak{A}$. Отметим, что из условия (A) вытекает условие б) теоремы 3.

Если выполнены оба условия (A) и (B), то для D-идеалов $\mathfrak{A}$, промежуточных между σ_2 и σ_∞, получим критерий включения $J \in \mathfrak{A}$, состоящий в том, что

$$\mathcal{A}(\{I_n^{1/2}(\mu)\}) < \infty. \tag{11}$$

В ряде случаев достаточное условие (8) для операторов J удается доказать для идеалов $\sigma_{p_0}, p_0 < 1$. Используя вещественную интерполяцию, получаем критерий (11) для идеалов $\sigma_{2p,2q}, p > p_0$.

Для иллюстрации сформулируем два конкретных результата.

Теорема 4. *Пусть* J *— оператор вложения класса* $A^2(\mathbf{B}^n)$ *в* $L_2(\mu)$*. Тогда* $J \in \sigma_p, p > 0$*, тогда и только тогда, когда*

$$\sum_m [(1-|z_m|^2)^{-n-1}\mu(E_m)]^{p/2} < \infty; \tag{12}$$

здесь

$$\mathbf{B}^n = \cup_m E_m$$

— конечнократное покрытие шара $\mathbf{B}^n$ *гиперболическими шарами* E_m *с центрами в точках* z_m *и фиксированного радиуса в гиперболической метрике.*

Теорема 5. *Пусть J — оператор вложения класса Фока F_1 в $L_2(\mu)$. Тогда $J \in \sigma_{p,q}, 0 < q \leqslant p < \infty$, тогда и только тогда, когда*

$$\sum_n (I_n(\mu))^{q/2} n^{qp^{-1}-1} < \infty,$$

здесь $\mathbb{C} = \cup_n G_n$ — разбиение плоскости на конгруэнтные квадраты со стороной $h_0 > 0$ (значение h_0 будет указано в тексте работы), и

$$I_n(\mu) = \int\limits_{G_n} \exp(|z|^2)\, d\mu(z).$$

Другие конкретные результаты в тексте работы. В следующем § 2 мы доказываем теорему 2, а также рассматриваем достаточные условия для принадлежности идеалам $\sigma_p, p < 1$. В § 3 мы доказываем теорему 3, а также получаем необходимые условия принадлежности идеалам $\sigma_p, p < 1$. Наконец, § 4 посвящен обзору конкретных результатов.

Автор выражает искреннюю благодарность М.З.Соломяку за большую помощь в работе, а также участникам семинара В.П.Хавина и Н.К.Никольского, где автору была предоставлена возможность выступить.

§ 2. Достаточные условия

1. Итак, рассмотрим оператор вложения $J : X^2(G) \to L_2(\mu)$ и фиксированное разбиение области G, обладающее свойством (A). Рассмотрим оператор

$$T_\mu = J \circ J^* : L_2(\mu) \to L_2(\mu).$$

Заметим, что T_μ — интегральный оператор с ядром $K(x,y)$. Это легко следует из основного свойства воспроизводящего ядра.

Условие (A) есть критерий ограниченности оператора вложения, а значит, и T_μ. Далее, для того чтобы $T_\mu \in \sigma_1$, необходимо и достаточно, чтобы $J \in \sigma_2$:

$$\|J\|_2^2 = \int\limits_G \|K(x,\cdot)\|^2_{X^2(G)}\, d\mu(x) = \int\limits_G K(x,x)\, d\mu(x).$$

Следовательно, условие

$$\sum_n \int\limits_{G_n} K(x,x)\, d\mu(x) = \sum_n I_n(\mu) < \infty \tag{13}$$

есть критерий принадлежности $T_\mu \in \sigma_1$.

Остается проинтерполировать условия (A) и (13). Для этого определим пространство X_0 комплекснозначных мер в области G с нормой

$$\|\mu\|_{X_0} = \int\limits_G K(x,x)\, d|\mu|(x) = \sum_n I_n(|\mu|).$$

Как обычно, $|\mu|$ — полная вариация комплекснозначной меры μ. Определим еще пространство мер X_1 в области G с нормой

$$\|\mu\|_{X_1} = \sup_n I_n(|\mu|).$$

Далее, R — класс всех линейных ограниченных операторов в $L_2(\mu)$. Зададим линейное отображение

$$\mathcal{T} : X_1 \to R, \qquad \mathcal{T}\mu = T_\mu,$$

$\mathcal{T}$ — линейное ограниченное отображение пары (X_0, X_1) в пару (σ_1, R). Можно применить любую интерполяционную теорему. Применим интерполяционную теорему Кальдерона–Митягина (см.[13], с.130): для того чтобы промежуточное между L_1 и L_∞ банахово пространство было интерполяционным с интерполяционной константой единица, необходимо и достаточно выполнение свойства — если $y \in E$, то $x \in L_1 + L_\infty$ и

$$\int_0^t x^*(\tau)\,d\tau \leqslant \int_0^t y^*(\tau)\,d\tau$$

при всех $t \geqslant 0$ влечет за собой $x \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$. Здесь x^*,y^* перестановка функций в убывающем порядке. В случае дискретной меры (для пространств промежуточных между l_1 и l_∞) мы приходим к условию, что норма в промежуточном пространстве E обладает доминационным свойством.

Тем самым интерполяционные пространства между X_0 и X_1 суть в точности идеалы в c_0 с доминационным свойством; описание интерполяционных пространств между σ_1 и R дано в [14], с.109–115. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Систематически теория интерполяции в этом круге вопросов введена в обиход работой М.Ш.Бирмана и М.З.Соломяка [8].

2. Обратимся теперь к получению достаточных условий принадлежности σ_p при $p < 1$, когда схема п.1 неприменима.

Введем операторы вложения

$$J_n : X^2(G) \to L_2(G_n, \mu), \tag{14}$$

а также операторы естественного вложения

$$j_n : L_2(G_n, \mu) \to L_2(\mu).$$

Имеем

$$J = \sum_n j_n \circ J_n.$$

Из этого в силу неравенства (2) получим

$$\|J\|_p^p \leqslant \sum_n \|j_n \circ J_n\|_p^p \leqslant \sum_n \|J_n\|_p^p.$$

Все сводится к оценке нормы $\|J_n\|_p$.

Приведем теперь теорему о такой оценке при условии симметрии области G. А именно будем предполагать, что в области G действует группа преобразований Γ такая, что

(C) Существуют компактные множества $\Delta_0 \subset G$,$x_0 \in \Delta_0$ такие, что для любого элемента разбиения G_n найдется преобразование $\gamma_n \in \Gamma$,

$$\gamma_n(G_n) \subset \Delta_0, \quad \gamma_n(x_n) = x_0.$$

Отображение вложения $J_0 : X^2(G) \to C(\Delta_0)$ компактно и принадлежит классу σ_p (см. [6], с.217). Здесь $C(\Delta_0)$ — пространство непрерывных функций на компакте Δ_0. Класс σ_p определяется так

$$\|J_0\|_p^p = \sum_n s_n^p(J_0) < \infty,$$

где $s_n(J_0)$ — n-е аппроксимационное число оператора J_0:

$$s_n(J_0) = \inf_{F\in\mathcal{F}_n} \|J_0 - F\|_{X^2(G)\to C(\Delta_0)},$$

$\mathcal{F}_n$ — множество ограниченных операторов ранга не выше n из $X^2(G)$ в $C(\Delta_0)$.

(E) Обозначим π_n оператор в $X^2(G)$:

$$(\pi_n f)(x) = f(\gamma_n^{-1}x).$$

Мы требуем, чтобы π_n был ограничен для любого n. Положим

$$M_n = \|\pi_n\|_{X^2(G)\to X^2(G)}.$$

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (C), (D), (E). *Тогда существует постоянная* $c > 0$ *такая, что при* $p \leqslant 1$

$$\|J_n\|_p^p \leqslant cM_n^p(\mu(G_n))^{p/2}. \tag{15}$$

Доказательство. Построим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X^2(G) & \xrightarrow{J_n} & L_2(G_n,\mu) \\ {\scriptstyle\tau_n}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle\pi_n} \\ X^2(G) & \xrightarrow{J_n^0} & L_2(G_n^0,\mu^0) \end{array}$$

здесь $G_n^0 = \gamma_n(G_n)$, оператор τ_n определяется так:

$$(\tau_n f)(x) = f(\gamma_n x).$$

Мера μ^0 есть „пересадка“ меры μ : $\mu^0(e) = \mu(\gamma_n^{-1}e)$. (Заметим, что τ_n — изометрия). Наконец, J_n^0 — оператор вложения. Имеем

$$\|J_n\|_p^p \leqslant M_n^p\|J_n^0\|_p^p.$$

Оценим норму $\|J_n^0\|_p$. Для этого факторизуем оператор J_n^0, используя свойство (D):

$$\begin{array}{ccc} X^2(G) & \xrightarrow{J_n^0} & L_2(G_n^0,\mu^0) \\ {\scriptstyle J_0}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle\beta_n} & \\ C(\Delta_0) & & \end{array}$$

здесь β_n — оператор вложения. Имеем

$$\|J_n^0\|_p^p \leqslant \|J_0\|_p^p \cdot \|\beta_n\|^p \leqslant c(\mu(G_n))^{p/2},$$

здесь $c = \|J_0\|_p^p$. Теорема 6 доказана.

В § 4 мы убедимся в том, что теорема 6 дает правильные достаточные условия в конкретных ситуациях.

Замечание 2. В формулировках теорем 2,6 можно заменить разбиения на конечнократные покрытия. Действительно, если для покрытия

$$G = \cup_n \tilde{G}_n \tag{16}$$

выполнено условие (A), то легко построить разбиение

$$G = \cup_n G_n, \tag{17}$$

вписанное в покрытие (16). При этом для разбиения (17) в силу конечной кратности будет также выполнено условие (A), а следовательно, и утверждение теоремы 2.

Далее, если мы введем операторы вложения

$$\tilde{J}_n : X^2(G) \to L_2(\tilde{G}_n, \mu),$$

причем $G_n \subset \tilde{G}_n$, то в силу вариационного принципа

$$\|J_n\|_p^p \leqslant \|\tilde{J}_n\|_p^p,$$

что и доказывает теорему 6 для покрытий.

§ 3. Необходимые условия

1. Сначала поясним смысл условия (B). Для этого рассмотрим подпространство $X^2(G, x_0)$:

$$X^2(G, x_0) = \{f \in X^2(G) | f(x_0) = 0\},$$

Оно замкнуто в силу непрерывности функционала

$$f \to f(x_0), \qquad f \in X^2(G).$$

Заметим, что имеет место разложение

$$X^2(G) = X^2(G, x_0) \oplus L_{x_0}, \tag{18}$$

L_{x_0} — одномерное подпространство, натянутое на функцию

$$f_{x_0}(x) = K(x, x_0)(K(x_0, x_0))^{-1/2}.$$

Обозначим $K_{x_0}(x, y)$ воспроизводящее ядро пространства $X^2(G, x_0)$. Из (18) получим

$$K(x, x) = K_{x_0}(x, x) + |f_{x_0}(x)|^2. \tag{19}$$

Отсюда следует, что всегда

$$|f_{x_0}(x)|^2 \leqslant K(x, x).$$

Таким образом, условие (B) означает, что на множестве G_n

$$|f_{x_n}(x)|^2 \asymp K(x, x). \tag{20}$$

Соотношение $f(x) \asymp g(x), x \in E$ равносильно тому, что для некоторых постоянных c_1,c_2

$$c_1 f(x) \leqslant g(x) \leqslant c_2 f(x).$$

Кроме того, условие (B) равносильно тому, что существует постоянная δ_0,$0 < \delta_0 <$ 1, такая, что

$$K_{x_n}(x, x) \leqslant \delta_0 K(x, x), \qquad x \in G_n. \tag{21}$$

Наконец, интегрируя (20), получим для любой меры μ

$$\int\limits_{G_n} |f_{x_n}(x)|^2\,d\mu(x) \asymp I_n(\mu),\ n \to \infty. \tag{22}$$

2 Нам потребуется понятие слабо ортонормированной системы в гильбертовом пространстве H: система $\{f_n\}_1^\infty$ называется слаобо ортонормированной, если для любой скалярной последовательности $\{c_n\} \in l^2$ выполнено неравенство

$$\|\sum_n c_n f_n\|_H^2 \leqslant M \sum_n |c_n|^2, \tag{23}$$

M не зависит от $\{c_n\}$. Это условие равносильно тому, что существует ортонормированный базис $\{f_n^0\}_1^\infty$ пространства H и ограниченный оператор U в H такие, что

$$Uf_n^0 = f_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Лемма 1. *Пусть μ_0 — дискретная мера, определенная в теореме 3, и оператор вложения J_0 пространства $X^2(G)$ в $L_2(\mu_0)$ ограничен. Тогда система функций $\{f_{x_n}(x)\}_1^\infty$ слабо ортонормирована в $X^2(G)$.*

Доказательство. Требуется установить оценку

$$\|\sum_n c_n f_{x_n}\|_{X^2(G)}^2 \leqslant M \sum_n |c_n|^2. \tag{24}$$

Неравенство (24) равносильно ограниченности оператора

$$S : l^2 \to X^2(G); \quad S(\{c_n\}) = \sum_n c_n f_{x_n}.$$

Полуторалинейная форма оператора S имеет вид

$$(S(\{c_n\}), g)_{X^2(G)} = \sum_n c_n (K(x_n, x_n))^{-1/2} \cdot \overline{g(x_n)}. \tag{25}$$

Из (25) следует, что $S^* = J_0$, что и доказывает лемму 1.

3. Доказательство теоремы 3. Воспользуемся теоремой 15.4.3 из [6], с.240: если $\mathfrak{A}$ — D-идеал, то для оператора $S \in \mathfrak{A}, S : H \to K$, имеем

$$\|S\|_{\mathfrak{A}} = \sup\{\mathcal{A}(\{S \circ Xe_n, Ye_n)\}) : \|X\| \leqslant 1, \|Y\| \leqslant 1\}, \tag{26}$$

$\{e_n\}$ — стандартный базис l^2,X — линейный ограниченный оператор из l^2 в H, Y — линейный ограниченный оператор из l^2 в K. Из (26) следует, что если $\{f_n\}$ — слабо ортонормированная система в H,$\{g_n\}$ — слабо ортонормированная система в K, то найдется постоянная $c_0 > 0$ такая, что

$$\|S\|_{\mathfrak{A}} \geqslant c_0 \mathcal{A}(\{(Sf_n, g_n)\}). \tag{27}$$

Применим оценку (27) к оператору вложения J. В качестве системы $\{f_n\}$ возьмем систему функций $\{f_{x_n}(x)\}$, в силу леммы 1 она слабо ортонормирована. Далее, положим

$$g_n(x) = \lambda_n f_{x_n}(x) \cdot \chi_n(x), \qquad \lambda_n > 0,$$

χ_n — характеристическая функция G_n. Система $\{g_n\}$ ортогональна в $L_2(\mu)$. Выберем λ_n так, чтобы

$$\|g_n\|_{L_2(\mu)} \asymp 1, \qquad n \to \infty;$$

тем самым $\{g_n\}$ будет системой Рисса, тем более слабо ортонормированной. Учитывая соотношение (22), получим

$$\|g_n\|^2_{L_2(\mu)} \asymp \lambda_n^2 \int\limits_{G_n} |f_{x_n}|^2\, d\mu \asymp \lambda_n^2\, I_n(\mu).$$

Итак, потребуем, чтобы $\lambda_n \asymp I_n^{-1/2}(\mu)$. Теперь вычислим

$$(Jf_{x_n}, g_n)_{L_2(\mu)} = \lambda_n \int\limits_{G_n} |f_{x_n}|^2\, d\mu \asymp I_n^{1/2}(\mu). \tag{28}$$

Из (27) и (28) следует теорема 3.

4. Рассмотрим необходимые условия принадлежности σ_p при $p < 1$.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия*

а) *оператор вложения* $J_0 : X^2(G) \to L_2(\mu_0)$ *ограничен;*

б) *выполнено условие* (В), *причем* $\gamma_0 > 1/2$*;*

в) *оператор вложения* $J : X^2(G) \to L_2(\mu)$ *принадлежит идеалу* $\sigma_p, p \leqslant 1$.

Тогда имеет место оценка

$$\sum_n I_n^{p/2}(\mu) < \infty. \tag{29}$$

Доказательство. По условию а) и лемме 1 система функций $\{f_{x_n}(x)\}$ слабо ортонормирована в $X^2(G)$. Следовательно, существуют ортонормированная система $\{e_n\}$ в $X^2(G)$ и ограниченный оператор U в $X^2(G)$, такие, что $Ue_n = f_{x_n}$. Пусть H_0 — подпространство в $X^2(G)$, натянутое на $\{e_n\}_1^\infty$.

Положим

$$K_n^2 = \int\limits_{G_n} |f_{x_n}|^2\, d\mu; \psi_n = K_n^{-1} f_{x_n} \chi_{G_n}.$$

Система $\{\psi_n\}$ ортонормирована в $L_2(\mu)$. Обозначим через $\tilde{H}_0$ подпространство в $L_2(\mu)$, натянутое на $\{\psi_n\}_1^\infty$, через P — ортогональный проектор в $L_2(\mu)$ на подпространство $\tilde{H}_0$.

Рассмотрим оператор $\tilde{J} = P \circ J \circ U$ как оператор, действующий из H_0 в $\tilde{H}_0$. Вычислим его матрицу в базисах $\{e_n\}$,$\{\psi_n\}$:

$$(\tilde{J}e_n, \psi_m)_{L_2(\mu)} = (P \cdot J \cdot f_{x_n}, \psi_m) = (Jf_{x_n}, \psi_m) =$$
$$= K_m^{-1} \int\limits_{G_m} f_{x_n} f_{x_m}\, d\mu = A_{nm}.$$

Обозначим A_0 диагональную матрицу с диагональю (A_{nn}) и положим $\Gamma = A - A_0$. В силу неравенства С.Ю.Ротфельда (2)

$$\|A\|_p^p \geqslant \|A_0\|_p^p - \|\Gamma\|_p^p. \tag{30}$$

Далее, по условию (В)

$$\|A_0\|_p^p = \sum_n K_n^p \geqslant \gamma_0^{p/2} \sum_n I_n^{p/2}(\mu). \tag{31}$$

Оценим норму $\|\Gamma\|_p$. Разобъем матрицу Γ на строки Γ_n. Отметим, что оператор, отвечающий Γ_n, одномерный, и поэтому

$$\|\Gamma_n\|_p = \|\Gamma_n\|_2, \qquad p > 0.$$

Оценим $\|\Gamma_n\|_2$:

$$\|\Gamma_n\|_2^2 = \sum_{m=1, m\neq n} |A_{nm}|^2 = K_n^{-2} \sum_{m=1, m\neq n} |\int_{G_n} f_{x_n} \cdot f_{x_m}\, d\mu|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m=1, m\neq n} \int_{G_n} |f_{x_m}|^2\, d\mu = \int_{G_n} (K(x,x) - |f_{x_n}(x)|^2)\, d\mu \leqslant$$
$$\leqslant (1-\gamma_0)\, I_n(\mu). \tag{32}$$

Таким образом, получим

$$\|\Gamma\|_p^p \leqslant \sum_n \|\Gamma_n\|_p^p = \sum_n \|\Gamma_n\|_2^p \leqslant$$
$$\leqslant (1-\gamma_0)^{p/2} \sum_n I_n^{p/2}(\mu).$$

Наконец,

$$\|\tilde{J}\|_p^p \geqslant (\gamma_0^{p/2} - (1-\gamma_0)^{p/2} \sum_n I_n^{p/2}(\mu).$$

Остается заметить, что $\|J\|_p^p \geqslant \|U\|^{-p} \|\tilde{J}\|_p^p$.

Теорема 7 доказана.

Замечание 3. Если матрица

$$B = \{K_n^{-2}(f_{x_n}, f_{x_m})_{L_2(\mu)}\}$$

обратима, то существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$s_n^2(J) \geqslant c(I_n(\mu))^*; \tag{33}$$

здесь символ $(a_n)^*$ обозначает перестановку последовательности $\{a_n\} \in c_0$ в убывающем порядке.

Действительно, имеем $A = A_0 \circ B$. В силу обратимости B

$$s_n(A) \geqslant \|B^{-1}\|^{-1} s_n(A_0).$$

Далее,

$$s_n(A_0) = (K_n)^* \geqslant \gamma_0^{1/2} (I_n^{1/2}(\mu))^*.$$

Замечание 4. В теоремах 3, 7 можно заменить разбиения на конечнократные покрытия. Действительно, если $G = \cup_n \tilde{G}_n$ — покрытие кратности не выше N, то его можно представить в виде

$$G = \bigcup_{j=1}^{N} g_j;\ g_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i^{(j)};\ G_{i_1}^{(j)} \bigcap G_{i_2}^{(j)} = \emptyset,\ i_1 \neq i_2,$$

$G_i^{(j)}$ — элементы исходного покрытия. Введем операторы $J_j : X^2(G) \to L_2(g_j, \mu)$. Если J принадлежит с.-н.идеалу $\mathfrak{A}$, то $J_j \in \mathfrak{A}$, а следовательно, выполнены утверждения теорем 3,7.

§ 4. Приложения и комментарии

1. Рассмотрим оператор вложения: $J : A^2(\mathbf{B}^n) \to L_2(\mu)$. Докажем теорему 4. Воспроизводящее ядро класса $A^2(\mathbf{B}^n)$ имеет вид

$$K(z,w) = (1 - \langle z,w\rangle)^{-n-1} = (1 - \sum_{i=1}^{n} z^{(i)}\overline{w}^{(i)})^{-n-1};$$

здесь $z = (z^{(1)},\dots,z^{(n)}), w = (w^{(1)},\dots,w^{(n)})$.

Рассмотрим конечнократное покрытие $\mathbf{B}^n$ гиперболическими шарами E_m с центрами z_m и гиперболического радиуса ρ_0. Иначе говоря, если φ_m — автоморфизм шара $\mathbf{B}^n$ такой, что $\varphi_m(z_m) = 0$, то выполнено условие

$$\varphi_m(E_m) = \{z||z| < \rho_0\}, \quad \rho_0 < 1.$$

Условие (A) для $A^2(\mathbf{B}^n)$ и этого покрытия выполнено в силу теоремы вложения В.Л.Олейника [4], тем самым применима теорема 2. Это дает достаточность в теореме 4 при $p \geqslant 2$.

Для того чтобы получить достаточность при $p < 1$, применим теорему 6. Все условия теоремы 6 проверяются легко, требуется лишь оценить постоянные M_m. Напомним, что $M_m = \|\pi_m\|$, где

$$\pi_m : A^2(\mathbf{B}^n) \to A^2(\mathbf{B}^n), \quad (\pi_m f)(z) = f(\varphi_m^{-1}(z)).$$

Обозначим $\det\varphi'_m$ — комплексный якобиан отображения φ_m. Тогда (см.[15], с.36)

$$M_m \leqslant \max_z |\det\varphi'_m 9z)| \leqslant (1 - |z_m|^2)^{-\frac{n+1}{2}}. \tag{34}$$

Это дает требуемую оценку. Достаточность при $1 \leqslant p \leqslant 2$ получается с помощью вещественной интерполяции. Более того, вещественная интерполяция приводит к следующей теореме:

Теорема 8. *Пусть $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$ и выполнено условие*

$$\sum_m [(1 - |z_m|^2)^{-n-1}\mu(E_m)]^{q/2} \cdot m^{qp^{-1}-1} < \infty. \tag{35}$$

Тогда оператор вложения $J : A^2(\mathbf{B}^n) \to L_2(\mu)$ принадлежит классу Шаттена–Лоренца $\sigma_{p,q}$.

Обратимся к необходимым условиям. Для этого проверим условие (B) для класса $A^2(\mathbf{B}^n)$ и нашего покрытия. Напомним соотношение (см.[15], с.34)

$$1 - |\varphi_m(z)|^2 = (1 - |z_m|^2)(1 - |z|^2)|1 - \langle z, z_m\rangle|^{-2}. \tag{36}$$

Из (36) следует, что условие (B) выполнено, коль скоро

$$\rho_0 < 1 - (1 - \gamma_0)^{1/m+1}. \tag{37}$$

Из (37) следует, что для достаточно малых ρ_0 можно принять $\gamma_0 > 1/2$. Таким образом, применимы теоремы 3 и 7, что и доказывает теорему 4 в части необходимости при всех $p > 0$.

2. Пусть теперь J оператор вложения класса Харди $H^2(\mathbf{B}^n)$ в $L_2(\mu)$. Воспроизводящее ядро класса $H^2(\mathbf{B}^n)$ называется ядром Сеге и имеет вид

$$K(z,w) = (1 - \langle z,w\rangle)^{-n}.$$

Теорема вложения карлесонового типа получена Л.Хермандером [2]. Обозначим

$$D_a(\zeta) = \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, |1 - \langle z, \zeta\rangle| < \frac{a}{2}(1 - |z|^2)\},$$

здесь $\zeta \in S^n, a > 1$. Область $D_a(\zeta)$ называется областью Кораньи. Из теоремы вложения Хермандера следует, что если носитель меры μ принадлежит некоторой фиксированной области $D_a(\zeta)$, то теорему вложения можно записать в виде условия (A) для покрытия $\mathbf{B}^n$ гиперболическими шарами E_m. Далее, постоянные M_m в этой ситуации оцениваются аналогично п.1. Учитывая эти факты и вещественную интерполяцию, получаем

Теорема 9. *Пусть* $\operatorname{supp}\mu \subset D_a(\zeta), 0 < p < \infty, 0 < q \leqslant \infty$, *и выполнено условие*

$$\sum_m [(1 - |z_m|^2)^{-n} \mu(E_m)]^{q/2} m^{qp^{-1}-1} < \infty. \tag{38}$$

Тогда оператор вложения $J : H^2(\mathbf{B}^n) \to L_2(\mu)$ *принадлежит классу Шаттена–Лоренца* $\sigma_{p,q}$.

Условие (B) вместе с оценкой $\gamma_0 > 1/2$ для покрытия $\mathbf{B}^n$ гиперболическими шарами проверяется аналогично случаю класса $A^2(\mathbf{B}^n)$. Таким образом, получим

Теорема 10. *Пусть* $p > 0$ *и оператор вложения* J *класса* $H^2(\mathbf{B}^n)$ *в* $L_2(\mu)$ *принадлежит классу* σ_p. *Тогда имеет место оценка (38) при* $q = p$.

Из теорем 9,10 следует критерий принадлежности оператора вложения $J : H^2(\mathbf{B}^n) \to L_2(\mu)$ классу $\sigma_p, p > 0$ при дополнительном ограничении $\operatorname{supp}\mu \subset D_a(\zeta)$.

3. В этом пункте рассмотрим вложение $J : A^2(G) \to L_2(\mu)$, G — ограниченная область с гладкой границей на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Теорема вложения типа Карлесона для широкого класса областей (включающего области с гладкой границей) получена В.Л.Олейником [4]. Она равносильна условию (A) для разбиения Уитни области G. Напомним, что разбиение

$$G = \bigcup_n G_n$$

называется разбиением Уитни, если диаметр области G_n пропорционален расстоянию от G_n до „границы“ области G.

Ради удобства мы будем иметь дело с конечнократным покрытием Уитни, состоящим из кругов (а не с разбиением).

Теорема 11. *Пусть* G *— ограниченная область с гладкой границей. Существует уитниевское покрытие кругами области* G *такое, что следующие условия эквивалентны:*

а) *оператор вложения* $J : A^2(G) \to L_2(\mu)$ *принадлежит* $\sigma_p, p > 0$;

б) *выполнено условие*

$$\sum_n (d_n^{-2} \mu(G_n))^{p/2} < \infty, \tag{39}$$

здесь d_n *— расстояние от центра круга* G_n *до границы области* G.

Сначала докажем лемму 2.

Лемма 2. *Пусть K — воспроизводящее ядро $A^2(G)$,$d(z)$ — расстояние от точки z до границы области G. Имеет место соотношение*

$$K(z,z) \asymp (d(z))^{-2}, \quad z \in G. \tag{40}$$

Доказательство. Пусть L_z — функционал на $A^2(G)$, равный значению в точке z. Хорошо известно, что

$$K(z,z) = \|L_z\|^2.$$

Функционал L_z можно рассматривать как оператор вложения $A^2(G)$ в $L_2(\delta_z)$, где δ_z — мера Дирака в точке z. Тогда из теоремы В.Л.Олейника вместе с оценкой нормы оператора вложения следует соотношение (40).

Как уже отмечалось, условие (A) имеет место. По теореме 2 получим достаточность при $p \geqslant 2$. Докажем достаточность при $p < 1$. Теорема 6 уже неприменима (например, если G многосвязна, то группа автоморфизмов области G недостаточно богата). Оценим нормы $\|J_n\|_p$ при $p < 1$ иначе. Пусть

$$G_n = \{z \,|\, |z - z_n| \leqslant 1/4d_n.$$

Положим

$$\overline{G_n} = \{z||z - z_n| \leqslant 1/2d_n\}, \, \Gamma_n = \partial\overline{G_n}.$$

Введем операторы вложения

$$J_n^{(1)} : A^2(G) \to H^2(\overline{G_n}); \quad J_n^{(2)} : H^2(\overline{G_n}) \to L_2(G_n, \mu),$$

$H^2(\overline{G_n})$ — класс Харди H^2 в круге $\overline{G_n}$. Имеем $J_n = J_n^{(2)} \circ J_n^{(1)}$. Отсюда

$$\|J_n\|_p \leqslant \|J_n^{(1)}\|_2 \circ \|J_n^{(2)}\|_p.$$

Оценим норму $\|J_n^{(1)}\|_2$:

$$\|J_n^{(1)}\|_2^2 = \int\limits_G \int\limits_{\Gamma_n} |K(z,w)|^2 \, dS(w)|dz| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Gamma_n} K(z,z)|dz| \leqslant c d_n^{-1}. \tag{41}$$

Для s-чисел оператора $J_n^{(2)}$ имеем элементарную оценку

$$s_m(J_n^{(2)}) \leqslant c(1/2)^m d_n^{-1/2}(\mu(G_n))^{1/2} \tag{42}$$

(рассматриваем подпространство $(z - z_n)^m H^2(G_n)$).

В итоге получим

$$\|J_n\|_p^p \leqslant c(d_n^{-2}\mu(G_n))^{p/2}.$$

Это доказывает достаточность при $p < 1$. Достаточность при $1 \leqslant p \leqslant 2$ следует из интерполяции.

Переходим к доказательству необходимости. Проверим условие (B) в форме (21), т.е. оценим кернфункцию подпространства

$$A^2(z_n) = \{f \in A^2(G) | f(z_n) = 0\}$$

через кернфункцию $K(z,z)$ на множестве G_n.

Введем оператор деления

$$S_n : A^2(z_n) \to A^2(G); \quad (S_n f)(z) = f(z)(z - z_n)^{-1}$$

и оператор умножения

$$V_n : l^2 \to L^2; \quad V_n(\{x_k\}) = \{(z - z_n)x_k\}.$$

Линейный функционал U_n^z — значение в точке z на пространстве $A^2(z_n)^{-1}$ можно представить в виде

$$U_n^2 = V_n \circ L_z \circ S_n.$$

Отсюда

$$\|U_n^z\| \leqslant \|V_n\|\|L_z\|\|S_n\|.$$

Несложные вычисления показывают, что существует постоянная c, не зависящая от n, такая, что

$$\|S_n\| \leqslant c\, d_n^{-1}.$$

Таким образом, если

$$c\, d_n^{-1} \max_{z \in G_n} |z - z_n| < 1,$$

то условие (B) выполнено, а для достаточно малых кругов G_n (диаметр G_n мал по сравнению с d_n) выполнено и условие $\gamma_0 > 1/2$. Это доказывает применимость теорем 3 и 7 в данной ситуации, т.е. необходимость в теореме 11.

4. Обратимся к классам целых функций $F_\lambda, \lambda > 0$. Докажем следующий результат:

Теорема 12. *Существует конечнократное покрытие плоскости $\mathbb{C}$ кругами G_n*

$$\mathbb{C} = \cup_n G_n, \qquad G_n = \{z \big| |z - z_n| < r_n\}$$

такое, что следующие условия эквивалентны

а) *оператор вложения $J : F_\lambda \to L_2(\mu)$ принадлежит классу $\sigma_p, p > 0$;*

б) *имеет место неравенство*

$$\sum_n I_n^{p/2}(\mu) < \infty;$$

здесь, как обычно,

$$I_n(\mu) = \int_{G_n} K(z,z)\, d\mu(z),$$

и $K(z,w)$ — воспроизводящее ядро F_λ.

Сначала приведем теорему вложения В.Л.Олейника для F_λ:

Теорема 13. [4]. *Следующие условия эквивалентны*

а) *оператор вложения $J : F_\lambda \to L_2(\mu)$ ограничен;*

б) *существуют постоянные $c_1, c_2 > 0$ такие, что*

$$\sup_{|w| \geqslant c_1} \int_{D_w} |w|^{-2(1-\lambda)} \exp(|z|^{2\lambda})\, d\mu(z) < \infty, \tag{43}$$

$$D_w = \{z \big| |z - w| \leqslant c_2 |w|^{1-\lambda}\}.$$

Лемма 3. *При* $|z| \geqslant c_1$ *имеет место соотношение*

$$K(z, z) \asymp |z|^{-2(1-\lambda)} \exp(|z|^{2\lambda}), \tag{44}$$

K — воспроизводящее ядро F_λ.

Формула (44) неявно содержится в [4], впрочем, она доказывается аналогично лемме 2.

Таким образом, если разбиение (или конечнократное покрытие)

$$\mathbb{C} = \cup_n G_n$$

удовлетворяет условию $G_n \subset D_{z_n}, z_n \in G_n$, то теорема 13 эквивалентна условию (A). Отсюда следует достаточность в теореме 12 при $p \geqslant 2$.

Достаточность при $p < 1$ опять докажем без использования теоремы 6.

Итак, введем операторы вложения

$$J_n : F_\lambda \to L_2(G_n, \mu),$$

введем подпространство

$$F_\lambda(z_n) = \{f \in F_\lambda | f(z_n) = 0\}$$

и одномерное подпространство $L(z_n)$, порожденное функцией $K(z, z_n)$. Имеет место ортогональное разложение

$$F_\lambda = F_\lambda(z_n) \oplus L(z_n). \tag{45}$$

Соответственно разложению (45) введем операторы вложения

$$J_n^{(1)} : F_\lambda(z_n) \to L_2(G_n, \mu),$$
$$J_n^{(2)} : L(z_n) \to L_2(G_n, \mu).$$

Очевидно, $J_n = J_n^{(1)} + J_n^{(2)}$. Отсюда при $p < 1$

$$\|J_n\|_p^p \leqslant \|J_n^{(1)}\|_p^p + \|J_n^{(2)}\|_p^p. \tag{46}$$

Имеем

$$\|J_n^{(2)}\|_p = \|J_n^{(2)}\|_2 \leqslant (\int_{G_n} K(z, z)\, d\mu)^{1/2}. \tag{47}$$

Для оценки величины $\|J_n^{(1)}\|_p$ введем оператор деления

$$S_n : F_\lambda(z_n) \to F_\lambda; (S_n f)(z) = f(z)(z - z_n)^{-1}$$

и оператор умножения

$$T_n : L_2(G_n, \mu) \to L_2(G_n, \mu);\ (T_n f)0(z) = f(z)(z - z_n).$$

Оператор $J_n^{(1)}$ допускает разложение $J_n^{(1)} = T_n \circ J_n \circ S_n$. Отсюда получим

$$\|J_n^{(1)}\|_p \leqslant \|T_n\| \cdot \|S_n\| \cdot \|J_n\|_p.$$

Очевидно,

$$\|T_n\| \leqslant \max_{z \in G_n} |z - z_n| = \alpha_n. \tag{48}$$

Оценим норму оператора S_n. Для этого возьмем ограниченное множество $\tilde{G}_n, \tilde{G}_n \supset G_n$. Выбор $\tilde{G}_n$ мы уточним позже. Для $f \in F_\lambda$ получим

$$\|f\|_\lambda^2 = \int\limits_{\tilde{G}_n} |f|^2\, dS_\lambda + \int\limits_{\mathbb{C}\setminus\tilde{G}_n} |f|^2 dS_\lambda,$$

здесь $dS_\lambda(z) = \exp(-|z|^{2\lambda})\, dS(z)$. Оператор вложения

$$\tilde{J}_n : F_\lambda \to L_2(\tilde{G}_n,\, dS_\lambda)$$

принадлежит σ_2, поэтому

$$\int\limits_{\tilde{G}_n} |f|^2\, dS_\lambda \leqslant (\int\limits_{\tilde{G}_n} K(z,z)\, dS_\lambda)\|f\|_\lambda^2.$$

Потребуем теперь, чтобы выполнялось соотношение

$$\sup_n \int\limits_{\tilde{G}_n} K(z,z)\, dS_\lambda(z) = h_0 < 1. \tag{49}$$

Из (49) получим

$$\|f\|_\lambda^2 \leqslant (1-h_0)^{-1} \int\limits_{\mathbb{C}\setminus\tilde{G}_n} |f|^2\, dS_\lambda.$$

Обозначим $\beta_n = \min|z - z_n|, z \in \mathbb{C}\setminus\tilde{G}_n$.

В итоге получим оценку

$$\|f\|_\lambda^2 \leqslant (1-h_0)^{-1}\beta_n^{-2} \int\limits_{\mathbb{C}} |f|^2 |z-z_n|^2\, dS_\lambda(z),$$

т.е.

$$\|S_n\| \leqslant (1-h_0)^{-1/2}\beta_n^{-1}.$$

Теперь выберем $\tilde{G}_n$ так, чтобы выполнялись неравенство (49) и неравенство

$$(1-h_0)^{-1/2} \sup_n \alpha_n\beta_n^{-1} = r_0 < 1. \tag{50}$$

Если выполнены эти оценки, то окончательно получим

$$\|J_n\|_p^p \leqslant (1-r_0)^{-1}(\int\limits_{G_n} K(z,z)\, d\mu)^{p/2},$$

что и доказывает достаточность в теореме 12 при $p < 1$.

Покажем, что выбор $\tilde{G}_n$, чтобы выполнялись оценки (49), (50), возможен. Для этого положим

$$G_n = \{z |\, |z - z_n| \leqslant k_1|z_n|^{1-\lambda}\},$$
$$\tilde{G}_n = \{z |\, |z - z_n| \leqslant k_2|z_n|^{1-\lambda}\}.$$

Для достаточно малых $k_2 > 0$ условие (49) следует из формулы (44). Далее, при таком выборе G_n, $\tilde{G}_n$ получим при любом n

$$\alpha_n\beta_n^{-1} = k_1 \cdot k_2^{-1},$$

что и доказывает выполнимость (50) при достаточно малом $k_1 \cdot k_2^{-1}$.

Достаточность при $1 \leqslant p \leqslant 2$ получается с помощью вещественной интерполяции.

Докажем теорему 12 в части необходимости. Для этого проверим условие (B) для F_λ и разбиения плоскости $\mathbb{C}$, использованном в части достаточности.

Обозначим L_n^z — линейный функционал, равный значению в точке z на пространстве $F_\lambda(z_n)$. Далее, L^z — линейный функционал, равный значению в точке z на классе F_λ. Операторы S_n,T_n имеют прежний смысл. Имеем соотношение

$$L_n^z = T_n \circ L^z \circ S_n.$$

Остается применить оценки норм операторов T_n,S_n, что и даст условие (B) для достаточно мелких разбиений. На этом же пути можно получить и усиленное условие (B), т.е. условие $\gamma_0 > 1/2$ (рассматривая более мелкие разбиения). Таким образом, применимы теоремы 3 и 7, что и доказывает теорему 12 в части необходимости.

5. В этом пункте докажем индивидуальную оценку снизу для S-чисел оператора вложения класса F_1. Обычно этот класс обозначается символом F^2. Воспроизводящее ядро класса F^2 имеет вид

$$K(z, w) = \exp(z\overline{w}).$$

Мы опускаем несущественный множитель π^{-1}.

Рассмотрим сначала свойства полноты и базисности системы функций $\{K(z, z_{n,m})\}$. Пусть $h > 0$ фиксировано. Обозначим

$$z_{n,m} = h(n + im), \quad n, m \in \mathbf{Z}; \quad f_{n,m}(z) = \exp(z\bar{z}_{n,m} - \frac{1}{2}|z_{n,m}|^2).$$

Теорема 14. *Пусть $h < \sqrt{\pi}$. Тогда система функций $\{f_{n,m}\}$ полна в F^2.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда существует функция $g_0(z)$,$g_0 \in F^2$,$g_0 \not\equiv 0$ и

$$(g_0, f_{n,m})_{F^2} = 0; n, m \in \mathbf{Z}.$$

Отсюда получим

$$g_0(z_{n,m}) = 0. \tag{51}$$

Можно считать, что $g_0(0) \neq 0$. В противном случае положим

$$g_0(z) = z^k \tilde{g}_0(z),$$

k — кратность нуля в точке 0. Функция $\tilde{g} \in F^2$ и для нее выполнено соотношение (51).

Применим формулу Иенсена: для любого $R > 0$

$$\int_0^R \frac{n_{g_0}(t)}{t}\, dt = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \ln |g_0(\Re^{it})| dt - \ln |g_0(0)|, \tag{52}$$

$n_{g_0}(t)$ — число нулей функции g_0 в круге $|z| < t$. Из соотношений (51) следует, что

$$n_{g_0}(t) \geqslant \pi t^2/h^2[1 + o(1)], \qquad t \to \infty. \tag{53}$$

С другой стороны, для любой функции $f \in F^2$

$$\max_{|z|=R} |f(z)| \leqslant \exp(\frac{1}{2}R^2)\|f\|_{F^2}. \tag{54}$$

Из соотношений (52)–(54) следует, что

$$\pi R^2(2h^2)^{-1}[1+o(1)] \leqslant \frac{1}{2}R^2 + O(1).$$

Отсюда получим $h^2 \geqslant \pi$, что противоречит условию теоремы. Теорема 14 доказана.

С другой стороны имеет место

Теорема 15. *Пусть $h > (1+\sqrt{2})\sqrt{\pi}$. Тогда система функций $\{f_{n,m}\}$ образует базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу Грама

$$\Gamma = \{(f_{n,m}, f_{n',m'})_{F^2}\}.$$

Достаточно доказать оценку

$$\|\mathbf{I} - \Gamma\|_{l^2 \to l^2} < 1.$$

Для этого воспользуемся критерием Шура: если $A = (a_{\alpha\beta})$ и выполнены соотношения

$$\sup_\alpha \sum_\beta |a_{\alpha\beta}| \leqslant M,$$

$$\sup_\beta \sum_\alpha |a_{\alpha\beta}| \leqslant N,$$

то $\|A\|^2 \leqslant MN$.

Положим $\alpha = (m,n), \beta = (n',m')$. Имеем

$$(f_\alpha, f_\beta)_{F^2} = \exp(z_\alpha \bar{z}_\beta - \frac{1}{2}|z_\alpha|^2 - \frac{1}{2}|z_\beta|^2) =$$

$$= \exp(-\frac{1}{2}|z_\alpha - z_\beta|^2) \cdot \theta_{\alpha\beta}, \qquad |\theta_{\alpha\beta}| = 1.$$

Достаточно оценить

$$S = \sum_{\alpha \neq 0} \exp(-\frac{1}{2}|z_\alpha|^2) =$$

$$\sum_{n,m \in \mathbf{Z}} \exp(-\frac{1}{2}|z_{n,m}|^2) - 1 = (\sum_n \exp(-\frac{1}{2}n^2h^2))^2 - 1.$$

Заметим, что

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}, n \neq 0} \exp(-\frac{1}{2}n^2h^2) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{h^2x^2}{2})\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{h}.$$

Отсюда получим

$$S \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{h}(\frac{\sqrt{\pi}}{h} + 2).$$

Элементарная оценка показывает теперь, что при условии $h > (1+\sqrt{2})\sqrt{\pi}$ имеем $S < 1$. Теорема 15 доказана.

Для формулировки основного результата этого пункта положим

$$\Delta_{n,m} = \{z | z = n + x + i(m+y),\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Далее,

$$I_{n,m}(\mu) = \int\limits_{\Delta_{n,m}} \exp(|z|^2)\, d\mu(z).$$

Наконец, пусть $\{b_n(\mu)\}$ — перестановка последовательности $\{I_{n,m}(\mu)\}$ в убывающем порядке. Разумеется, мы предполагаем что выполнен критерий компактности оператора вложения $J : F^2 \to L_2(\mu)$

$$I_{n,m}(\mu) \to 0, \qquad |n| + |m| \to \infty,$$

вытекающий из теоремы 13.

Теорема 16. *Пусть J оператор вложения $F^2 \to L_2(\mu)$. Тогда существует $h > 0$ такое, что при всех n*

$$s_n(J) \geqslant b_n^{1/2}(\mu). \tag{55}$$

Доказательство. Пусть $h > (1+\sqrt{2})\sqrt{\pi}$. Тогда по теореме 15 система функций $\{f_\alpha\}_{\alpha\in \mathbf{Z}^2}$ образует базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки H_0. Положим

$$\psi_\alpha(z) = I_\alpha^{-1/2}(\mu) f_\alpha(z) \cdot \chi_\alpha(z),$$

χ_α — характеристическая функция Δ_α. Система функций $\{\psi_\alpha\}$ является базисом Рисса в замыкании своей линейной оболочки $\tilde{H}_0$ в пространстве $L_2(\mu)$. Можно считать, что системы $\{f_\alpha\}$ и $\{\psi_\alpha\}$ ортонормированы в F^2 и $L_2(\mu)$ соответственно, если перейти к топологически эквивалентным скалярным произведениям в $H_0, \tilde{H}_0$. Теперь используем замечание 3 к теореме 7. Согласно этому замечанию 3, рассмотрим матрицу $B = (b_{\alpha\beta})$:

$$b_{\alpha\beta} = I_\beta^{-1/2}(\mu) \cdot (f_\alpha, \psi_\beta)_{L^2(\mu)} =$$
$$= I_\beta^{-1}(\mu) \int\limits_{\Delta_\beta} \exp(-\frac{1}{2}|z - z_\alpha|^2 - \frac{1}{2}|z - z_\beta|^2 + |z|^2)\, d\mu \cdot \theta_{\alpha\beta}.$$

Заметим, что $|\theta_{\alpha\beta}| = 1$,

$$|z - z_\alpha|^2 + |z - z_\beta|^2 \geqslant \frac{1}{2}|z_\alpha - z_\beta|^2.$$

Отсюда получим

$$|b_{\alpha\beta}| \leqslant \exp(-\frac{1}{4}|z_\alpha - z_\beta|^2).$$

Из этой оценки уже следует обратимость матрицы B, что и доказывает теорему 16.

Из теоремы 16 следует теорема 5 в части необходимости (достаточность в теореме 5 доказана в более общем случае $F_\lambda, \lambda > 0$).

6. В этом пункте мы дополним теорему Люкинга. Рассмотрим оператор вложения $J : \mathcal{D}_\alpha \to L_2(\mu)$. Сначала отметим следующий простой факт.

Лемма 4. *Пусть $\alpha > 1, p\alpha > 2, \mu$ — произвольная конечная мера в круге D. Тогда оператор вложения J принадлежит классу σ_p.*

Доказательство. При $\alpha > 1$ кернфункция пространства $\mathcal{D}_\alpha$ ограничена в круге $\mathbf{D}$(см.[12]), поэтому для любой конечной меры μ оператор J принадлежит σ_2.

При $p \leqslant 2$ воспользуемся оценкой (см.[6],с.244)

$$\|J\|_p^p \leqslant \sum_n \|Jf_n\|_{l_2(\mu)}^p, \tag{56}$$

$\{f_n\}$ — произвольная полная ортонормированная система в $\mathcal{D}_\alpha$. Подставляя в (56)

$$f_n(z) = z^n \cdot n^{-\alpha/2}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

получим требуемое утверждение.

Для формулировки следующего результата определим угол Штольца

$$D_{\theta,\beta} = \{z | \arg(z - \theta)| < \beta\}, \quad \theta \in T, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Теорема 17. *Пусть носитель меры μ лежит в фиксированном угле $D_{\theta,\beta}$ и не имеет предельных точек на T, за возможным исключением θ. Пусть $\alpha < 1$. Тогда для оператора вложения $J : \mathcal{D}_\alpha \to L_2(\mu)$ справедливо утверждение теоремы 1 (критерий принадлежности $\sigma_p, p > 0$).*

Доказательство. Необходимость доказана в [12] (она имеет место для любой меры, без ограничений на носитель). Достаточность в общем случае (без дополнительных условий на меру μ), как показано в [12], не имеет места. Если же носитель меры μ лежит в $D_{\theta,\beta}$, то теорема вложения Стегенги [3] при $\alpha < 1$ эквивалентна условию (A) для диадического разбиения круга $\mathbf{D}$. Мы можем считать, что $p \geqslant 2$, ибо случай $p < 2$ содержится в теореме Люкинга 1. Тем самым достаточность сразу следует из теоремы 2.

Случай $\alpha = 1$ особый. Кернфункция класса $\mathcal{D}_1$ имеет вид

$$K(z, w) = \ln(1 - z\bar{w})^{-1}.$$

Имеется в виду, разумеется, главная ветвь логарифма. Легко проверить, что условие (A) не выполняется для $\mathcal{D}_1$ и диадического разбиения, даже если носитель меры μ лежит на отрезке $(-1, 1)$.

7. В заключение рассмотрим вложение J класса Харди H^2 в круге $\mathbf{D}$ в пространство $L_2(\mu)$, причем носитель меры μ лежит на отрезке $(-1, 1)$. Этот оператор связан с ганкелевыми операторами, с рациональной аппроксимацией и другими вопросами анализа и поэтому представляет особый интерес.

Пусть $0 < q < 1, x_k = 1 - q^k, k = 0, 1, 2, \ldots$, и

$$[0, 1] = \cup_k [x_k, x_{k+1}] = \cup_k \Delta_k.$$

Обозначим $b_n(\mu)$ перестановку в убывающем порядке положительной последовательности $\{q^{-k}\mu(\Delta_k)\}$. Из теоремы вложения Карлесона [1] следует, что условие

$$q^{-k}\mu(\Delta_k) \to 0, \qquad k \to \infty,$$

есть критерий компактности оператора J. Таким образом, для компактных операторов J определение последовательности $b_n(\mu)$ корректно.

Теорема 18. *Пусть J оператор вложения $H^2 \to L_2(\mu)$. Тогда существуют постоянные c и q_0 такие, что $c > 0$ и для $0 < q \leqslant q_0$ имеем следующую оценку*

$$s_n(J) \geqslant c\, b_n^{1/2}(\mu). \tag{57}$$

Доказательство. Пусть

$$f_n(x) = (1 - x_n^2)^{1/2}(1 - xx_n)^{-1}, n = 0, 1, \ldots$$

Функции $\{f_n\}_0^\infty$ образуют базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки H_0 (см. [16], лекция VI).

Рассмотрим функции

$$\psi_k(x) = f_k(x) \cdot \chi_k(x) \cdot q^{k/2}(\mu(\Delta_k))^{-1/2},$$

$\chi_k(x)$ — характеристическая функция Δ_k. Легко проверить, что $\{\psi_k\}$ образуют базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки $\tilde{H}_0$ в пространстве $L_2(\mu)$.

Для того чтобы получить оценку (57), в соответствии с замечанием 3 к теореме 7 требуется доказать обратимость соответствующей матрицы B.

Имеем

$$b_{nm} = q^m(\mu(\Delta_m))^{-1} \int\limits_{\Delta_m} f_n(x) \cdot f_m(x)\, d\mu(x) \asymp$$

$$\asymp 2q^{(n+m)/2}(q^n + q^m)^{-1} = [\mathrm{ch}(\alpha(n - m))]^{-1}, \quad \alpha = \ln q^{-1};$$

здесь $\mathrm{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$. Оценим

$$\sum_{n=0, n\neq m} [\mathrm{ch}(\alpha(n - m))]^{-1} \leqslant 2 \int\limits_0^\infty (\mathrm{ch}\alpha x)^{-1}\, dx = \pi(2\alpha)^{-1}.$$

Таким образом, существует q_0 такое, что при $0 < q < q_0$

$$\sum_{n=0, n\neq m} b_{nm} < 1,$$

и, следовательно, матрица B обратима, что и доказывает теорему 18.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 18, $0 < p < \infty, V > 0, V \geqslant p$. Тогда при $q \leqslant q_0$ оператор $J \in \sigma_{V,p}$ в том и только в том случае, если*

$$\sum_n (q^{-n}\mu(\Delta_n))^{p/2} n^{pV^{-1}-1} < \infty. \tag{58}$$

Доказательство. Достаточность следует из теоремы Люкинга и вещественной интерполяции, при этом нет ограничения $V \geqslant p$.

Необходимость вытекает из оценок

$$\|J\|_{v,p}^p = \sum_n s_n^p(J) \cdot n^{pV^{-1}-1} \geqslant$$

$$\geqslant c \cdot \sum_n (b_n(\mu))^{p/2} n^{pV^{-1}-1} \geqslant$$

$$\geqslant c \sum_n (q^{-n}\mu(\Delta_n))^{p/2} n^{pV^{-1}-1}.$$

В последней оценке использовано неравенство Чебышева (последовательность $b_n(\mu)$ убывает, а последовательность $n^{pV^{-1}-1}$ возрастает).

Список литературы

[1] Carleson L., *Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem*, Ann. Math. **79** (1962), 547–559.

[2] Hormander L., *L^p-estimates for-(pluri)subharmonic functions*, Math. Scand. **20**, 65–78.

[3] Stegenga D., *Multipliers of the Dirichlet spaces*, Ill. J. Math. **24** (1980), 113–139.

[4] Олейник В. Л., *Теоремы вложения для весовых классов гармонических и аналитических функций*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **47** (1974), 120–138.

[5] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*, Наука, М., 1965, с. 448.

[6] Пич А., *Операторные идеалы*, Наука, М., 1982, с. 536.

[7] Ротфельд С. О., *О сингулярных числах суммы вполне непрерывных операторов*, Проблемы математической физики. Изд-во ЛГУ., вып. 3 (1968), 81–87.

[8] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Оценки сингулярных чисел интегральных операторов*, Успехи мат. наук **32**, вып. 1(193) (1977), 17–84.

[9] Пеллер В. В., *Операторы Ганкеля класса γ_p и их приложения (рациональная аппроксимация, гауссовские процессы, проблема мажорации операторов)*, Мат. сб. **113**, вып. 4 (1980), 538–581.

[10] Peller V.V., *Hankel operators of the Schatten-von Neumann class $\gamma_p, o < p < 1$*, LOMI Preprints E-6-82. L. (1982).

[11] Парфенов О. Г., *Ядерность операторов вложения некоторых классов аналитических функций в весовые пространства*, Мат. заметки **43**, вып. 6 (1988), 794–807.

[12] Luecking D., *Trace ideal criteria for Toeplits operators*, J. Funct. Anal. **73** no. 2 (1987), 345–368.

[13] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М., *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978, с. 400.

[14] Брудный Ю. А, Крейн С. Г., Семенов С. М., *Интерполяция линейных операторов*, Итоги науки и техники. Мат. анализ. М. **24** (1986), 3-207.

[15] Рудин У., *Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$*, Мир, М., 1984, с. 455.

[16] Никольский Н. К., *Лекции об операторе сдвига*, Наука, М., 1980, с. 383.

[17] Fisher S. D., Michelli C. A., *The n-width of sets of analytic functions*, Duke Math. J. **47** (1980), 789–801.

[18] Парфенов О. Г., *Оценки сингулярных чисел оператора вложения Карлесона*, Мат. Сб. **131(173)**, вып. 4(12), 501–518.

Поступило 12 марта 1990 г.

Ленинградский государственный университет
кафедра математического анализа
198904, Ленинград, Ст. Петергоф
Библиотечная пл., 2