Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. П. Елизаров, Методы упрощения систем линейных уравнений над модулями. II,
Тр. по дискр. матем., 2004, том 8, 79–98

https://www.mathnet.ru/tdm122

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.175
15 декабря 2025 г., 19:41:24

Труды по дискретной математике
Том 8, с. 79–98
М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004

МЕТОДЫ УПРОЩЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НАД МОДУЛЯМИ. II

В. П. ЕЛИЗАРОВ

Излагаются методы построения для данной системы линейных уравнений над модулем таких систем линейных уравнений, которые «проще» решать, чем исходную систему, и по множествам решений которых можно получить информацию о множестве решений данной системы. Работа является продолжением работы «Методы упрощения систем линейных уравнений над модулями. I» и выполнена при поддержке гранта № НШ-2358.2003.9 Президента РФ.

Как и в части I работы [6], термин «кольцо» далее означает ассоциативное кольцо с единицей, отличной от нуля, а термин «модуль» — левый унитарный модуль над кольцом. Через $T_{m,n}$ обозначим совокупность всех $m \times n$-матриц с элементами из множества T, и положим $T^{(k)} = T_{k,1}$, $T(k) = T_{1,k}$.

Ссылки в тексте на утверждения или теоремы без указания литературы означают ссылки на утверждения и теоремы из части I работы. Так, ссылка на утверждение 3.2 означает ссылку на утверждение 2 из § 3 части I. Аналогично, ссылка на формулу (1.4) означает ссылку на формулу с таким номером из § 1 части I. Нумерация параграфов продолжает нумерацию из части I.

Над модулем ${}_R\Lambda$ рассматриваются системы линейных уравнений вида (1.1):

$$A\xi^{\downarrow} = \beta^{\downarrow},$$

где $A \in R_{m,n}$, $\beta^{\downarrow} \in \Lambda^{(m)}$ и решения — векторы из $\Lambda^{(n)}$. При $\Lambda = R$ получаем системы (левых) линейных уравнений над кольцом R, которые будут записываться в виде (1.2):

© В. П. Елизаров, 2004

$$AX^{\downarrow} = B^{\downarrow}.$$

Через $L(A, \beta^{\downarrow})$ и $L(A, B^{\downarrow})$ обозначаем множества всех решений систем уравнений (1.1) и (1.2) соответственно.

Как и в части I, будем строить такие системы уравнений (1.4)

$$F\eta^{\downarrow} = \gamma^{\downarrow}$$

над модулем ${}_R\Lambda$ или над некоторым связанным с ним модулем ${}_S\Omega$, чтобы систему (1.4) было проще исследовать и решать, чем систему (1.1), и чтобы по множеству $L(F, \gamma^{\downarrow})$ можно было получить достаточно хорошую информацию о множестве $L(A, \beta^{\downarrow})$.

В § 8 рассматривается возможность перехода от системы уравнений (1.1) к системе уравнений (1.4) с разделяющимися неизвестными, т. е. фактически к нескольким системам уравнений, каждая из которых состоит из меньшего числа уравнений, зависящих от меньшего числа неизвестных, чем исходная система (1.1). В § 9 рассматриваются системы (1.1) над модулем ${}_R\Lambda$, где R — коммутативное кольцо. Изучаются случаи, когда система уравнений равносильна подсистеме, имеющей полный ранг, а также — системы уравнений полного ранга и системы уравнений с общим элементом, которые могут быть сведены к системам уравнений над модулем ${}_{\bar{R}}\bar{\Lambda}$, где $\bar{R}$ — факторкольцо кольца R, а $\bar{\Lambda}$ — фактормодуль модуля Λ. В § 10 осуществляется переход от системы уравнений (1.1) к системе уравнений с квазитреугольной матрицей.

§ 8. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Систему уравнений (1.4) над модулем ${}_R\Lambda$, где $F \in R_{k,l}$ и $\gamma^{\downarrow} \in \Lambda^{(k)}$, назовем системой уравнений с разделяющимися неизвестными типа $[l_1, \dots, l_t]$, где $l_i \in \mathbf{N}$ и $l_1 + \dots + l_t = l$, если система (1.4) является объединением t систем уравнений

$$F_i\eta_i^{\downarrow} = \gamma_i^{\downarrow}$$

над модулем ${}_R\Lambda$, $i = 1, \dots, t$, где $F_i \in R_{k_i,l_i}$, $k_1 + \dots + k_t = k$, $\eta_i^{\downarrow} = (\eta_{i1}, \dots, \eta_{il_i})^T$ и не пересекаются множества $\{h_{i1}, \dots, h_{il_i}\}$, $i = 1, \dots, t$.

Матрицы $D, G \in R_{k,l}$ называются эквивалентными, если существуют такие обратимые матрицы $U \in R_{k,k}$ и $V \in R_{l,l}$, что $UDV = G$. В частности, подобные квадратные матрицы (такие $D, G \in R_{k,k}$, что $G = U^{-1}DU$) эквивалентны.

Матрицу $H \in R_{k,l}$ назовем квазираспавшейся на p клеток, если

$$H = \begin{pmatrix} \boxed{H_1} & & & 0 \\ & \boxed{H_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{H_p} \end{pmatrix}, \tag{8.1}$$

где $H_i \in R_{s_i,u_i}$, $s_1 + \ldots + s_p = k$ и $u_1 + \ldots + u_p = l$. Частными видами квазираспавшихся матриц являются распавшиеся и диагональные матрицы. Для краткости матрицу H из (8.1) обозначим через $\mathrm{Diag}(H_1, \ldots, H_p)$.

Теорема 8.1. *Если матрица A системы уравнений* (1.1) *эквивалентна квазираспавшейся на t клеток матрице $F = \mathrm{Diag}(F_1, \ldots, F_t)$, где $F_i \in R_{s_i,u_i}$, $i = 1, \ldots, t$, то система* (1.1) *конгруэнтна системе уравнений с разделяющимися неизвестными типа $[u_1, \ldots, u_t]$.*

Доказательство. По условию существуют такие обратимые матрицы $U \in R_{m,m}$ и $V \in R_{n,n}$, что $UAV = F$. Так как обратимая матрица U регулярна слева над Λ, то по следствию 1 утверждения 4.3 система (1.1) равносильна системе уравнений $UA\xi^{\downarrow} = U\beta^{\downarrow}$. Последняя же система по утверждению 4.1 конгруэнтна системе уравнений $UAV\eta^{\downarrow} = U\beta^{\downarrow}$, т. е. системе

$$\mathrm{Diag}(F_1, \ldots, F_t)\,\eta^{\downarrow} = \delta^{\downarrow}, \tag{8.2}$$

где $\delta^{\downarrow} = U\beta^{\downarrow}$. Система уравнений (8.2) — система с разделяющимися неизвестными типа $[u_1, \ldots, u_t]$.

Приведем пример на применение теоремы 8.1. Утверждение 2.3 позволяет при наличии (правого) линейного соотношения между столбцами матрицы A перейти от системы (1.1) к системе уравнений с меньшим числом неизвестных, но с тем же числом уравнений. Согласно следствию утверждения 4.4 при наличии (левого) линейного соотношения между строками матрицы $(A, \beta^{\downarrow})$ можно перейти от системы (1.1) к системе уравнений с меньшим числом уравнений, но с тем же числом неизвестных.

Покажем, что если между некоторым частям матрицы A имеются и правое и левое линейные соотношения, то можно перейти от системы (1.1) к конгруэнтной системе уравнений с разделяющимися неизвестными. Через E_k обозначим единичную $k \times k$-матрицу.

Утверждение 8.2. *Пусть система уравнений* (1.1) *записана в виде*

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \xi^{\downarrow} = \begin{pmatrix} \beta_1^{\downarrow} \\ \beta_2^{\downarrow} \end{pmatrix}, \tag{8.3}$$

где $A_1 \in R_{k,l}$, $1 \leqslant k < m$, $1 \leqslant l < n$ *и* $\beta_1^{\downarrow} \in \Lambda^{(k)}$. *Если для некоторых матриц* $T_1 \in R_{l,n-l}$ *и* $T_2 \in R_{m-k,k}$ *справедливы равенства* $A_2 = A_1T_1$ *и* $A_3 = T_2A_1$, *то система* (1.1) *конгруэнтна системе уравнений с разделяющимися неизвестными типа* $[l, n-l]$.

Доказательство. Справедливы равенства

$$\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ -T_2 & E_{m-k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_1T_1 \\ T_2A_1 & A_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_l & -T_1 \\ 0 & E_{n-l} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 & A_1T_1 \\ 0 & A_4 - T_2A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_l & -T_1 \\ 0 & E_{n-l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 - T_2A_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ -T_2 & E_{m-k} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ T_2 & E_{m-k} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} E_l & -T_1 \\ 0 & E_{n-l} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E_l & T_1 \\ 0 & E_{n-l} \end{pmatrix},$$

показывающие, что эквивалентны матрицы

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 - T_2A_2 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ -T_2 & E_{m-k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1^{\downarrow} \\ \beta_2^{\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1^{\downarrow} \\ \beta_2^{\downarrow} - T_2\beta_1^{\downarrow} \end{pmatrix},$$

то по теореме 8.1 система (1.1) конгруэнтна системе уравнений

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 - T_2A_2 \end{pmatrix}\eta^{\downarrow} = \begin{pmatrix} \beta_1^{\downarrow} \\ \beta_2^{\downarrow} - T_2\beta_1^{\downarrow} \end{pmatrix}, \tag{8.4}$$

являющейся системой с разделяющимися неизвестными типа $[l, n-l]$.

В (8.4) вместо матрицы $A_4 - T_2A_2$ можно записать равную ей матрицу $A_4 - A_3T_1$.

Следствие. *Если система уравнений* (1.1) *записана в виде* (8.3), *где* $A_1 \in R_{k,k}$, $1 \leqslant k < t$, $t = \min\{m, n\}$, $\beta_1^{\downarrow} \in \Lambda^{(k)}$ *и матрица* A_1 *обратима, то система* (1.1) *конгруэнтна системе уравнений*

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 - A_3A_1^{-1}A_2 \end{pmatrix}\eta^{\downarrow} = \begin{pmatrix} \beta_1^{\downarrow} \\ \beta_2^{\downarrow} - A_3A_1^{-1}\beta_1^{\downarrow} \end{pmatrix}. \tag{8.5}$$

Доказательство. Ввиду равенств $A_2 = A_1A_1^{-1}A_2$ и $A_3 = A_3A_1^{-1}A_1$ в утверждении 8.2 можно положить $T_1 = A_1^{-1}A_2$ и $T_2 = A_3A_1^{-1}$. Теперь (8.5) следует из (8.4).

Укажем некоторые другие возможности применения теоремы 8.1.

Если R — область главных правых и главных левых идеалов, то любая матрица над R эквивалентна диагональной матрице (см. [12] или [1, гл. 3]). Существенно ослабить условие «быть кольцом главных односторонних идеалов» нельзя: если любая матрица над кольцом R эквивалентна диагональной матрице, то R — правое и левое кольцо Безу, т. е. каждый конечно порожденный односторонний идеал является главным [15], а если R выбирается из класса коммутативных нётеровых колец, то оно должно быть кольцом главных идеалов [16, 14].

Для квадратной матрицы A над полем известны: критерий подобия диагональной матрице (в терминах свойств минимального многочлена матрицы) и достаточные условия подобия распавшейся матрице (в терминах свойств характеристического многочлена матрицы) [2]. Условия, при которых квадратная матрица A над конечным или артиновым коммутативным кольцом подобна распавшейся матрице, приведены соответственно в [10] и [11].

§ 9. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ НАД МОДУЛЕМ ${}_R\Lambda$, ГДЕ R — КОММУТАТИВНОЕ КОЛЬЦО

Получим сначала условия, при которых система уравнений (1.1) равносильна некоторой своей подсистеме. Пусть R — коммутативное кольцо. Рангом матрицы $F \in R_{m,n}$ называют наибольший из порядков ее ненулевых миноров или нуль, если таких миноров нет (обозначение: $\operatorname{rang} F$). Обобщим это понятие на матрицы, у которых все элементы принадлежат R, кроме элементов одного столбца, принадлежащих ${}_R\Lambda$.

Для матрицы $D = (D_1^{\downarrow}, \dots, D_k^{\downarrow}) \in R_{k,k}$ и вектора $\lambda^{\downarrow} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)^T \in \Lambda^{(k)}$ значением определителя

$$|D_1^{\downarrow}, \dots, D_{k-1}^{\downarrow}, \lambda^{\downarrow}| \tag{9.1}$$

называют элемент

$$\delta = \sum_{i=1}^{k} \bar{d}_{ik}\lambda_i \in \Lambda,$$

где $\bar{d}_{ik}$ — алгебраическое дополнение к элементу d_{ik} в матрице D (см., например, [13]).

Рангом матрицы $(A, \beta^{\downarrow})$, где $A \in R_{m,n}$ и $\beta^{\downarrow} \in \Lambda^{(m)}$, называют наибольший из порядков ее ненулевых миноров или нуль, если таких миноров нет (обозначение: $\operatorname{rang}(A, \beta^{\downarrow})$).

Для матрицы $D \in R_{k,k}$ через D^* обозначим матрицу, взаимную к D.

Лемма 9.1. *Пусть R — коммутативное кольцо, Λ — R-модуль, $D \in R_{k,k}$, $F^{\downarrow} \in R^{(k)}$, $\vec{G} \in R^k$, $h \in R$, $\lambda^{\downarrow} \in \Lambda^{(k)}$ и $\mu \in \Lambda$. Тогда*

$$\begin{vmatrix} D & \lambda^{\downarrow} \\ \vec{G} & \mu \end{vmatrix} = (-\vec{G}D^*, |D|)\begin{pmatrix} \lambda^{\downarrow} \\ \mu \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} D & F^{\downarrow} \\ \vec{G} & h \end{vmatrix} = (-\vec{G}D^*, |D|)\begin{pmatrix} F^{\downarrow} \\ h \end{pmatrix} = (\vec{G}, h)\begin{pmatrix} -D^*F^{\downarrow} \\ |D| \end{pmatrix}. \tag{9.2}$$

Доказательство. По определению

$$\begin{vmatrix} D & \lambda^{\downarrow} \\ \vec{G} & \mu \end{vmatrix} = (-1)^{k+1+1}\begin{vmatrix} \vec{D}_2 \\ \dots \\ \vec{D}_k \\ \vec{G} \end{vmatrix}\lambda_1 + \ldots + (-1)^{k+1+k}\begin{vmatrix} \vec{D}_1 \\ \dots \\ \vec{D}_{k-1} \\ \vec{G} \end{vmatrix}\lambda_k + |D|\mu.$$

Переставляя в выписанных определителях строку $\vec{G}$ на 1-е, 2-е, и так далее, $k-1$-е место, запишем

$$\begin{vmatrix} D & \lambda^{\downarrow} \\ \vec{G} & \mu \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{G} \\ \vec{D}_2 \\ \dots \\ \vec{D}_k \end{vmatrix}\lambda_1 - \ldots - \begin{vmatrix} \vec{D}_1 \\ \dots \\ \vec{D}_{k-1} \\ \vec{G} \end{vmatrix}\lambda_k + |D|\mu = (-\vec{G}D^*)\lambda^{\downarrow} + |D|\mu.$$

Этим доказано первое равенство в (9.2). Второе равенство в (9.2) доказывается аналогично.

Для элемента $r \in R$ положим $\operatorname{Ann}_{\Lambda} r = \{\lambda \in \Lambda \mid r\lambda = \theta\}$.

Утверждение 9.2. *Пусть R — коммутативное кольцо и система уравнений* (1.1) *над модулем ${}_R\Lambda$ записана в виде*

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\xi^{\downarrow} = \begin{pmatrix} \beta_1^{\downarrow} \\ \beta_2^{\downarrow} \end{pmatrix}, \tag{9.3}$$

где $A_1 \in R_{t,t}$, $\beta_1^{\downarrow} \in \Lambda^{(t)}$ и $1 \leqslant t < \min\{m, n\}$. Тогда:

а) *если система* (1.1) *разрешима, то разрешима подсистема*

$$(A_1, A_2)\xi^{\downarrow} = \beta_1^{\downarrow} \tag{9.4}$$

и

$$L(A, \beta^{\downarrow}) \subset L((A_1, A_2), \beta_1^{\downarrow});$$

б) *если* $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A, \beta^{\downarrow}) = t$ *и подсистема* (9.4) *разрешима, то ее решения — решения системы уравнений*

$$|A_1|(A_3, A_4)\xi^{\downarrow} = |A_1|\beta_2^{\downarrow};$$

в) *если при условиях* б) *дополнительно* $\mathrm{Ann}_\Lambda|A_1| = \{\theta\}$, *то система* (1.1) *равносильна подсистеме* (9.4).

Доказательство. а) Утверждение очевидно.

б) Пусть $(A_1, A_2)\lambda^\downarrow = \beta_1^\downarrow$, где $\lambda^\downarrow \in \Lambda^{(n)}$. Умножив последнее равенство слева на матрицу $A_3A_1^*$, получим

$$A_3A_1^*(A_1, A_2)\lambda^\downarrow = A_3A_1^*\beta_1^\downarrow. \tag{9.5}$$

Так как $\operatorname{rang} A = t < \min\{m, n\}$ и $|A_1|$ — минор порядка t матрицы A, то любой минор

$$\begin{vmatrix} A_1 & (A_2)_j^\downarrow \\ (\vec{A}_3)_i & a_{t+i,t+j} \end{vmatrix}, \qquad i = 1, \dots, m-t, \qquad j = 1, \dots, n-t,$$

равен нулю. По лемме 9.1 получаем равенства

$$|A_1|a_{t+i,t+j} = (\vec{A}_3)_i A_1^*(A_2)_j^\downarrow, \qquad i = 1, \dots, m-t, \qquad j = 1, \dots, n-t. \tag{9.6}$$

Изменяя в (9.6) i в пределах от 1 до $m-t$ и j в пределах от 1 до $n-t$, приходим к равенству $|A_1|A_4 = A_3A_1^*A_2$ и, значит, к равенству

$$|A_1|(A_3, A_4) = A_3A_1^*(A_1, A_2). \tag{9.7}$$

Так как $\operatorname{rang}(A, \beta^\downarrow) = t < \min\{m, n\}$, то всякий минор

$$\begin{vmatrix} A_1 & \beta_1^\downarrow \\ (\vec{A}_3)_i & \beta_{t+i} \end{vmatrix}, \qquad i = 1, \dots, t,$$

равен нулю. Рассуждая как выше, получаем

$$|A_1|\beta_2^\downarrow = A_3A_1^*\beta_1^\downarrow. \tag{9.8}$$

Ввиду (9.7) и (9.8) из (9.5) выводим

$$|A_1|(A_3, A_4)\lambda^\downarrow = |A_1|\beta_2^\downarrow. \tag{9.9}$$

в) Так как $\mathrm{Ann}_\Lambda|A_1| = \{\theta\}$, то из (9.9) следует $L(A_1, \beta_1^\downarrow) \subset L(A_2, \beta_2^\downarrow)$. Поэтому $L(A_1, \beta_1^\downarrow) \subset L(A, \beta^\downarrow)$. С учетом а) это означает, что системы уравнений (1.1) и (9.4) равносильны.

Равенства (9.6) в других обозначениях и другим методом получены в [8, доказательство теоремы 1.2].

Условие $\mathrm{Ann}_\Lambda|A_1| = \{\theta\}$ в утверждении 9.2 в) существенно.

Пример 9.3. Для системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X^{\downarrow} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

над кольцом $Z/4$ справедливы равенства $\operatorname{rang} A = 1 = \operatorname{rang}(A, \beta^{\downarrow})$. Для подсистемы $(2, 0)\, X^{\downarrow} = 2$ верны равенства $\operatorname{rang}(2, 0) = 1 = \operatorname{rang}(2, 0, 2)$. Подсистема имеет решение $X^{\downarrow} = (1, 0)^T$, не являющееся решением системы. Аналогично, система не равносильна подсистеме $(0, 2)\, X^{\downarrow} = 2$.

Систему уравнений $F\eta^{\downarrow} = \gamma^{\downarrow}$ над модулем ${}_R\Lambda$, где $F \in R_{k,l}$ и $\gamma^{\downarrow} \in \Lambda^{(k)}$, назовем системой полного ранга, если $\operatorname{rang} F = k$ (а тогда $\operatorname{rang}(F, \gamma^{\downarrow}) = k$). Рассмотрение систем уравнений полного ранга представляет интерес, например, ввиду утверждения 9.2.

Утверждение 9.4. *Если R — коммутативное кольцо и система уравнений* (1.1) *над модулем ${}_R\Lambda$, имеющая вид*

$$(A_1, A_2)\, \xi^{\downarrow} = \beta^{\downarrow}, \tag{9.10}$$

где $A_1 \in R_{m,m}$, разрешима, то ее следствием является система уравнений

$$(|A_1|\, E_m, A_1^* A_2)\, \xi^{\downarrow} = A_1^* \beta^{\downarrow}. \tag{9.11}$$

Доказательство. Умножив равенство $(A_1, A_2)\, \lambda^{\downarrow} = \beta^{\downarrow}$, где $\lambda^{\downarrow} \in \Lambda^{(n)}$, слева на матрицу A_1^*, получим равенство

$$(|A_1|\, E_m, A_1^* A_2)\, \lambda^{\downarrow} = A_1^* \beta^{\downarrow}.$$

Можно указать условие, достаточное для равносильности систем уравнений (9.10) и (9.11).

Утверждение 9.5. *Пусть R — коммутативное кольцо. Система уравнений* (1.1) *над модулем ${}_R\Lambda$, имеющая вид* (9.10), *где $A_1 \in R_{m,m}$ и $\operatorname{Ann}_{\Lambda} |A_1| = \{\theta\}$, равносильна системе уравнений* (9.11).

Доказательство. Если система уравнений (9.10) разрешима, то по утверждению 9.4 разрешима и система уравнений (9.11). При этом

$$L((A_1, A_2), \beta^{\downarrow}) \subset L((|A_1|\, E_m, A_1^* A_2), A_1^* \beta^{\downarrow}).$$

Пусть теперь разрешима система уравнений (9.11):

$$(|A_1|\, E_m, A_1^* A_2)\, \mu^{\downarrow} = A_1^* \beta^{\downarrow}.$$

Умножив это равенство слева на матрицу A_1, получим $|A_1|(A_1, A_2)\, \mu^{\downarrow} = |A_1|\, \beta^{\downarrow}$. Отсюда ввиду условия утверждения следует $(A_1, A_2)\, \mu^{\downarrow} = \beta^{\downarrow}$. Значит,

$$L((|A_1|\,E_m,\, A_1^* A_2),\, A_1^* \beta^{\downarrow}) \subset L((A_1,\, A_2),\, \beta^{\downarrow}).$$

Таким образом, системы уравнений (9.10) и (9.11) либо одновременно неразрешимы, либо одновременно разрешимы, и в обоих случаях множества их решений совпадают.

Условие $\mathrm{Ann}_{\Lambda}|A_1| = \{\theta\}$ в утверждении 9.5 существенно.

Пример 9.6. Для системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

над кольцом $Z/6$ положим $A_1 = A$. Так как $A_1^* = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ и $|A_1| = 2$, то система уравнений (9.11) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Она имеет решение $X^{\downarrow} = (0, 1)^T$, не являющееся решением исходной системы уравнений.

Вопрос о разрешимости системы уравнений (9.10) над модулем ${}_R\Lambda$ в некоторых случаях можно свести к вопросу о разрешимости некоторой системы уравнений над модулем ${}_{\bar{R}}\bar{\Lambda}$, где $\bar{R}$ и $\bar{\Lambda}$ — факторкольцо и фактормодуль кольца R и модуля Λ соответственно.

Теорема 9.7. *Пусть R — коммутативное кольцо и система уравнений* (1.1) *над модулем ${}_R\Lambda$ имеет вид* (9.10), *где $A_1 \in R_{m,m}$. Если $|A_1| \neq 0$, то система* (9.10) *разрешима тогда и только тогда, когда разрешима система уравнений*

$$\psi((A_1,\, A_2))\,\eta^{\downarrow} = \varphi(\beta^{\downarrow}) \tag{9.12}$$

над модулем ${}_{\bar{R}}\bar{\Lambda}$, где $\bar{R} = R/|A_1|\,R$, $\bar{\Lambda} = \Lambda/|A_1|\Lambda$, а $\varphi\colon \Lambda \to \bar{\Lambda}$ и $\psi\colon R \to \bar{R}$ — канонические гомоморфизмы.

Доказательство. Так как $|A_1| \neq 0$, то $\bar{R} \neq R$. Согласно примеру 6.1 пара (φ, ψ) задает полулинейное отображение модуля ${}_R\Lambda$ на модуль ${}_{\bar{R}}\bar{\Lambda}$. Если система уравнений (9.10) разрешима, то по утверждению 6.2 разрешима и система уравнений (9.12).

Обратно, пусть $\bar{\lambda}^{\downarrow} \in \bar{\Lambda}^{(n)}$ — решение системы уравнений (9.12). Тогда для любого вектора $\mu^{\downarrow} \in \Lambda^{(n)}$ со свойством $\varphi(\mu^{\downarrow}) = \bar{\lambda}^{\downarrow}$ справедливо равенство $\varphi((A_1,\, A_2)\,\mu^{\downarrow} - \beta^{\downarrow}) = \bar{\theta}^{\downarrow}$. Это означает, что найдется вектор $\gamma^{\downarrow} \in \Lambda^{(m)}$, удовлетворяющий равенству

$$(A_1,\, A_2)\,\mu^{\downarrow} - \beta^{\downarrow} = |A_1|\,\gamma^{\downarrow}.$$

Отсюда

$$A_1(\mu_1^{\downarrow} - A_1^*\gamma^{\downarrow}) + A_2\mu_2^{\downarrow} = \beta^{\downarrow},$$

где

$$\mu_1^{\downarrow} = (\mu_1, \dots, \mu_m)^T, \quad \mu_2^{\downarrow} = (\mu_{m+1}, \dots, \mu_n)^T, \quad \mu^{\downarrow} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T.$$

Значит, система уравнений (9.10) разрешима.

Получим аналог теоремы 9.7 для системы уравнений (9.12).

Лемма 9.8. *Пусть* ${}_R\Lambda$ *— модуль над коммутативным кольцом* R. *Для любого* $k \in \mathbb{N}$ *и любой матрицы* $D \in R_{k,k}$ *равносильны свойства:*

а) $\operatorname{Ann}_\Lambda |D| = \{\theta\}$,

б) $\operatorname{Ann}_{\Lambda^{(k)}} D = \operatorname{Ann}_{\Lambda^{(k)}} D^* = \{\theta^{\downarrow}\}$.

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б). Пусть $\mu^{\downarrow} \in \Lambda^{(k)}$ и $D\mu^{\downarrow} = \theta^{\downarrow}$. Тогда $D^*D\mu^{\downarrow} = |D|\mu^{\downarrow} = \theta^{\downarrow}$ и $\mu^{\downarrow} = \theta^{\downarrow}$. Значит, $\operatorname{Ann}_{\Lambda^{(k)}} D = \{\theta^{\downarrow}\}$. Аналогично доказывается и второе равенство из б).

б) $\Rightarrow$ а) Пусть $\mu \in \Lambda$, $|D|\mu = \theta$ и $\mu^{\downarrow} = (\mu, \dots, \mu)^T \in \Lambda^{(k)}$. Из равенства $|D|\mu^{\downarrow} = \theta$ получаем $DD^*\mu^{\downarrow} = \theta^{\downarrow}$. Отсюда и из условия следует $D^*\mu^{\downarrow} = \theta^{\downarrow}$, и вновь по условию $\mu^{\downarrow} = \theta^{\downarrow}$. Значит, $\mu = \theta$.

Теорема 9.9. а) *Если система уравнений* (9.11) *над модулем* ${}_R\Lambda$, *где* R *— коммутативное кольцо, разрешима и* $|A_1| \neq 0$, *то разрешима система уравнений*

$$\psi(A_1^*A_2)\,\bar{\eta}_2^{\downarrow} = \psi(A_1^*)\,\varphi(\beta^{\downarrow}) \tag{9.13}$$

над модулем ${}_{\bar{R}}\bar{\Lambda}$, *где* $\bar{R} = R/|A_1|R$, $\bar{\Lambda} = \Lambda/|A_1|\Lambda$, *а* $\psi\colon R \to \bar{R}$ *и* $\varphi\colon \Lambda \to \bar{\Lambda}$ *— канонические гоморфизмы*, $\bar{\eta}_2^{\downarrow} = (\bar{\eta}_{m+1}, \dots, \bar{\eta}_n)^T$.

б) *Если в системе уравнений* (9.11) $\operatorname{Ann}_\Lambda |A_1| = \{\theta\}$, *то она разрешима тогда и только тогда, когда разрешима система уравнений* (9.13).

Доказательство. а) Если система уравнений (9.11) разрешима, то, рассуждая как в доказательстве теоремы 9.7, находим, что разрешима система уравнений

$$\psi((|A_1|E_m, A_1^*A_2))\,\bar{\eta}^{\downarrow} = \psi(A_1^*)\,\varphi(\beta^{\downarrow}).$$

Так как $\psi(|A_1|E_m) = \bar{0} \in \bar{R}_{m,m}$, то получаем разрешимость системы уравнений (9.13).

б) Ввиду а) докажем только достаточность условий. Пусть разрешима система уравнений (9.13): $\psi(A_1^*A_2)\,\bar{\mu}^{\downarrow} = \psi(A_1^*)\,\varphi(\beta^{\downarrow})$. Тогда для любого такого вектора $\mu^{\downarrow} \in \Lambda^{(n-m)}$, что $\varphi(\mu^{\downarrow}) = \bar{\mu}^{\downarrow}$, получаем $\varphi(A_1^*A_2\mu^{\downarrow} - A_1^*\beta^{\downarrow}) = \bar{\theta}^{\downarrow}$. Поэтому для некоторого вектора $\lambda^{\downarrow} \in \Lambda^{(m)}$ выполняется $A_1^*A_2\mu^{\downarrow} - A_1^*\beta^{\downarrow} = |A_1|\lambda^{\downarrow}$, или $A_1^*(A_1(-\lambda^{\downarrow}) + A_2\mu^{\downarrow} - \beta^{\downarrow}) = \theta^{\downarrow}$. Тогда по условию и лемме 9.8

$$A_1(-\lambda^{\downarrow}) + A_2\mu^{\downarrow} = \beta^{\downarrow}.$$

Пункт б) теоремы 9.9 при $\Lambda = R$ в других обозначениях и другим методом получен в [7].

Согласно утверждению 9.5 при условии $\mathrm{Ann}_{\Lambda}|A_1| = \{\theta\}$ системы уравнений (9.10) и (9.11) разрешимы или неразрешимы одновременно. Аналогичный результат, который слабее утверждения 9.5, можно получить без требования, что $\mathrm{Ann}_{\Lambda}|A_1| = \{\theta\}$. Элемент $u \in R\backslash\{0\}$ называется нильпотентным, если $u^s = 0$ для некоторого $s \in \mathbf{N}\backslash\{1\}$.

Теорема 9.10. *Пусть в системе уравнений* (9.10) *над модулем* ${}_R\Lambda$, *где* R — *коммутативное кольцо*, $A_1 \in R_{m,m}$ *и* $|A_1| \neq 0$. *Если существует такой нильпотентный элемент* $u \in R$, *что* $\mathrm{Ann}_{\Lambda} u = |A_1|\Lambda$ *и* $\mathrm{Ann}_{\Lambda}|A_1| = u\Lambda$, *то система* (9.10) *разрешима тогда и только тогда, когда разрешима система уравнений* (9.11).

Доказательство. Если система уравнений (9.10) разрешима, то по утверждению 9.4 разрешима и система уравнений (9.11).

Обратно, пусть система уравнений (9.11) является разрешимой: $(|A_1|\,E_m, A_1^* A_2)\,\mu^{\downarrow} = A_1^*\beta^{\downarrow}$. Умножив это равенство слева на матрицу A_1, получим $|A_1|((A_1, A_2)\,\mu^{\downarrow} - \beta^{\downarrow}) = \theta^{\downarrow}$. По условию существует такой вектор $\delta_1^{\downarrow} \in \Lambda^{(m)}$, что

$$(A_1, A_2)\,\mu^{\downarrow} - \beta^{\downarrow} = u\delta_1^{\downarrow}. \tag{9.14}$$

Умножив равенство (9.14) слева на матрицу A_1^*, получим

$$(|A_1|\,E_m, A_1^* A_2)\,\mu^{\downarrow} - A_1^*\beta^{\downarrow} = uA_1^*\delta_1^{\downarrow} = \theta^{\downarrow}.$$

По условию существует такой вектор $\gamma_1^{\downarrow} \in \Lambda^{(m)}$, что

$$A_1^*\delta_1^{\downarrow} = |A_1|\gamma_1^{\downarrow}. \tag{9.15}$$

Из (9.15) следует равенство $|A_1|(\delta_1^{\downarrow} - A_1\gamma_1^{\downarrow}) = \theta^{\downarrow}$. Поэтому существует такой вектор $\delta_2^{\downarrow} \in \Lambda^{(m)}$, что

$$\delta_1^{\downarrow} - A_1\gamma_1^{\downarrow} = u\delta_2^{\downarrow}. \tag{9.16}$$

Подставляем выражение $\delta_1^{\downarrow}$ из (9.16) в (9.14):

$$(A_1, A_2)\begin{pmatrix} \mu_1^{\downarrow} - u\gamma_1^{\downarrow} \\ \mu_2^{\downarrow} \end{pmatrix} - \beta^{\downarrow} = u^2\delta_2^{\downarrow},$$

где $\mu_1^{\downarrow} = (\mu_1, \dots, \mu_m)^T$ и $\mu_2^{\downarrow} = (\mu_{m+1}, \dots, \mu_n)^T$. Если $u^2 = 0$, то получено решение системы уравнений (9.10).

Если $u^2 \neq 0$, то из (9.15) и (9.10) выводим, что $A_1^* \delta_1^{\downarrow} - |A_1| \gamma_1^{\downarrow} = u A_1^* \delta_2^{\downarrow}$ и $u A_1^* \delta_2^{\downarrow} = \theta^{\downarrow}$. Аналогично равенствам (9.15) и (9.16) получаем $A_1^* \delta_2^{\downarrow} = |A_1| \gamma_2^{\downarrow}$, $\delta_2^{\downarrow} - A_1 \gamma_2^{\downarrow} = u \delta_3^{\downarrow}$ и, значит,

$$(A_1, A_2) \begin{pmatrix} \mu_1^{\downarrow} - u\gamma_1^{\downarrow} - u^2 \gamma_2^{\downarrow} \\ \mu_2^{\downarrow} \end{pmatrix} - \beta^{\downarrow} = u^3 \delta_3^{\downarrow}.$$

Продолжая далее аналогично, при $u^s = 0$, $u^{s-1} \neq 0$ находим решение системы уравнений (9.10):

$$(A_1, A_2) \begin{pmatrix} \mu_1^{\downarrow} - u\gamma_1^{\downarrow} - \ldots - u^{s-1} \gamma_{s-1}^{\downarrow} \\ \mu_2^{\downarrow} \end{pmatrix} = \beta^{\downarrow}.$$

В случае $\Lambda = R$ аналог теоремы 9.10 доказан в [3].

Укажем класс колец, к системам уравнений вида (1.2) над которыми применима теорема 9.10. Коммутативное кольцо называют цепным, если его идеалы образуют цепь, т. е. множество идеалов вполне упорядочено по включению. Конечное коммутативное кольцо R является цепным тогда и только тогда, когда его необратимые элементы образуют идеал $J(R)$, являющийся главным ($R \backslash R^* = J(R)$, $J(R) = aR$). Если $J(R) = \{0\}$, то R — конечное поле. Если $J(R) \neq \{0\}$, то $J(R)$ — нильпотентный идеал ($J(R)^t = \{0\}$ при некотором $t \in \mathbf{N} \backslash \{1\}$). Идеалы кольца R — это степени $J(R)^s$, $0 \leqslant s \leqslant t$, элементы из R записываются в виде ra^s, где $r \in R^*$, а показатель s определен однозначно [4, гл. II].

Примерами таких колец, не являющихся полями, служат кольца вычетов Z/p^k, p — простое число, $k > 1$, и $\mathbf{GF}(q)[x]/f(x)^k$, $f(x)$ — неприводимый над $\mathbf{GF}(q)$ многочлен, $k > 1$.

Пусть система уравнений

$$(A_1, A_2) X^{\downarrow} = B^{\downarrow}, \tag{9.17}$$

где $A_1 \in R_{m,m}$ и $|A_1| \neq 0$, — система над конечным коммутативным цепным кольцом R, у которого $J(R) = aR \neq 0$ и $t \in \mathbf{N}$ — такое наименьшее число, что $J(R)^t = \{0\}$. Если $|A_1| \in R^*$, то матрица A_1 обратима, и по следствию утверждения 2.3 система (9.17) разрешима. Если же $|A_1| \notin R^*$, то $|A_1| = ra^s$, где $r \in R^*$ и $0 < s < t$. Тогда $\mathrm{Ann}_R ra^s = \mathrm{Ann}_R a^s = a^{t-s} R$, где a^{t-s} — нильпотентный элемент, а $\mathrm{Ann}_R a^{t-s} = a^s R = a^s r R = ra^s R$. Значит, к системе уравнений (9.17) применима теорема 9.10.

Методом, аналогичным методу доказательства теоремы 9.10, можно получить формулу решений (см. § 2) системы однородных уравнений с квадратной матрицей.

Теорема 9.11. *Пусть в системе из m уравнений с m неизвестными*

$$A\xi^{\downarrow} = \theta^{\downarrow} \tag{9.18}$$

над модулем ${}_R\Lambda$, где R — коммутативное кольцо, $|A| \neq 0$, и для некоторого нильпотентного элемента $u \in R$ справедливы равенства $\mathrm{Ann}_\Lambda |A| = u\Lambda$ и $\mathrm{Ann}_\Lambda u = |A|\Lambda$. Тогда формула

$$L(A, \theta^{\downarrow}) = \{uA^*\mu^{\downarrow} \mid \mu^{\downarrow} \in \Lambda^{(m)}\}$$

есть формула решений системы уравнений (9.18). *При этом $uA^*\mu^{\downarrow} = \theta^{\downarrow}$ тогда и только тогда, когда $\mu^{\downarrow} = A\lambda^{\downarrow}$, $\lambda^{\downarrow} \in \Lambda^{(m)}$.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что векторы вида $uA^*\mu^{\downarrow}$ — решения системы (9.18).

Обратно, пусть $A\gamma^{\downarrow} = \theta^{\downarrow}$. Тогда $A^*A\gamma^{\downarrow} = |A|\gamma^{\downarrow} = \theta^{\downarrow}$. По условию $\gamma^{\downarrow} = u\gamma_1^{\downarrow}$ для некоторого $\gamma_1^{\downarrow} \in \Lambda^{(m)}$. Из равенства $Au\gamma_1^{\downarrow} = \theta^{\downarrow}$, т.е. равенства $uA\gamma_1^{\downarrow} = \theta^{\downarrow}$, по условию получаем

$$A\gamma_1^{\downarrow} = |A|\,\delta_1^{\downarrow} \tag{9.19}$$

при некотором векторе $\delta_1^{\downarrow} \in \Lambda^{(m)}$.

Из (9.19) выводим $|A|\gamma_1^{\downarrow} = |A|\,A^*\delta_1^{\downarrow}$. Поэтому при некотором векторе $\gamma_2^{\downarrow} \in \Lambda^{(m)}$ верно равенство

$$\gamma_1^{\downarrow} - A^*\delta_1^{\downarrow} = u\gamma_2^{\downarrow}. \tag{9.20}$$

Подставляем выражение $\gamma_1^{\downarrow}$ из (9.20) в равенство $\gamma^{\downarrow} = u\gamma_1^{\downarrow}$:

$$\gamma^{\downarrow} = uA^*\delta_1^{\downarrow} + u^2\gamma_2^{\downarrow}. \tag{9.21}$$

Если $u^2 = 0$, то вектор $\gamma^{\downarrow}$ имеет нужный вид.

Пусть $u^2 \neq 0$. Из (9.19) и (9.20), умножив (9.20) слева на матрицу A, получим $uA\gamma_2^{\downarrow} = \theta^{\downarrow}$. Поэтому при некотором векторе $\delta_2^{\downarrow} \in \Lambda^{(m)}$ верно равенство

$$A\gamma_2^{\downarrow} = |A|\,\delta_2^{\downarrow}. \tag{9.22}$$

Из (9.22) выводим, как и выше,

$$\gamma_2^{\downarrow} - A^*\delta_2^{\downarrow} = u\gamma_3^{\downarrow}, \qquad \gamma_3^{\downarrow} \in \Lambda^{(m)}. \tag{9.23}$$

Подставив выражение $\gamma_2^{\downarrow}$ из (9.23) в (9.21), получим

$$\gamma^{\downarrow} = uA^*\delta_1^{\downarrow} + u^2A_1^*\delta_2^{\downarrow} + u^3\gamma_3^{\downarrow}.$$

Продолжая далее аналогично, при $u^s = 0$, $u^{s-1} \neq 0$ придем к выражению

$$\gamma^{\downarrow} = uA^*(\delta_1^{\downarrow} + u\delta_2^{\downarrow} + \ldots + u^{s-2}\delta_{s-1}^{\downarrow}).$$

Таким образом, $L(A, \theta^{\downarrow}) = \{uA^*\mu^{\downarrow} \mid \mu^{\downarrow} \in \Lambda^{(m)}\}$.

Перейдем ко второй части теоремы. Пусть $\mu^{\downarrow} = A\lambda^{\downarrow}$. Тогда $uA^*\mu^{\downarrow} = u|A|\mu^{\downarrow} = \theta^{\downarrow}$.

Обратно, пусть $\mu^{\downarrow} \in \Lambda^{(m)}$ и $uA^*\mu^{\downarrow} = \theta$. По условию получаем

$$A^*\mu^{\downarrow} = |A|\alpha_1^{\downarrow}, \qquad \alpha_1^{\downarrow} \in \Lambda^{(m)}. \tag{9.24}$$

Из (9.24) выводим $|A|\mu^{\downarrow} = |A|A\alpha_1^{\downarrow}$ и, значит, верно равенство

$$\mu^{\downarrow} - A\alpha_1^{\downarrow} = u\lambda_1^{\downarrow}, \qquad \lambda_1^{\downarrow} \in \Lambda^{(m)}. \tag{9.25}$$

Отсюда следует $A^*\mu^{\downarrow} - |A|\alpha_1^{\downarrow} = uA^*\lambda_1^{\downarrow}$, и ввиду (9.24) $uA^*\lambda_1^{\downarrow} = \theta^{\downarrow}$. Проводя те же рассуждения, получаем

$$A^*\lambda_1^{\downarrow} = |A|\alpha_2^{\downarrow}, \qquad \alpha_2^{\downarrow} \in \Lambda^{(m)}, \tag{9.26}$$

и

$$\lambda_1^{\downarrow} - A\alpha_2^{\downarrow} = u\lambda_2^{\downarrow}, \qquad \lambda_2^{\downarrow} \in \Lambda^{(m)}. \tag{9.27}$$

В силу (9.25) и (9.27)

$$\mu^{\downarrow} = A(\alpha_1^{\downarrow} + u\alpha_2^{\downarrow}) + u^2\lambda_2^{\downarrow}.$$

Продолжая далее аналогично, получим

$$\mu^{\downarrow} = A(\alpha_1^{\downarrow} + u\alpha_2^{\downarrow} + \ldots + u^{s-1}\alpha_s^{\downarrow}),$$

где $u^s = 0$, $u^{s-1} \neq 0$.

Аналог теоремы 9.11 при $\Lambda = R$ доказан в [5]. Условие $|A| \neq 0$ в теореме 9.11 существенно.

Пример 9.12. Система уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} X^{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

над кольцом $R = Z/8$ имеет ненулевое решение $X^{\downarrow} = (1, 1, -1)^T$. При этом для матрицы A системы имеем $|A| = 0$ и $A^* = 0 \in R_{3,3}$. Значит, формула $uA^*V^{\downarrow}$, $V^{\downarrow} \in R^{(3)}$, может дать только нулевое решение.

Рассмотрим еще один способ сведения системы уравнений (1.1) к системе уравнений более простого вида. Систему уравнений (1.1) над

модулем ${}_R\Lambda$, где R — коммутативное кольцо, назовем системой с общим элементом, если для некоторого $d \in R \backslash R^*$ верно равенство

$$(A, \beta^{\downarrow}) = d(F, \gamma^{\downarrow}). \tag{9.28}$$

Если $\mathrm{Ann}_\Lambda d = \{\theta\}$, то матрицы $\mathrm{diag}(d, \dots, d) \in R_{m,m}$ и E_m регулярны над Λ, и по утверждению 4.3 системы уравнений (1.1) и $F\xi^{\downarrow} = \gamma^{\downarrow}$ равносильны.

Пусть $\mathrm{Ann}_\Lambda d \neq \{\theta\}$. Рассмотрим систему уравнений

$$\psi(F)\eta^{\downarrow} = \varphi(\gamma^{\downarrow}) \tag{9.29}$$

над модулем ${}_{\bar{R}}\bar{\Lambda}$, где $\bar{R} = R/\mathrm{Ann}_R d$, $\bar{\Lambda} = \Lambda/\mathrm{Ann}_\Lambda d$, а $\varphi\colon \Lambda \to \bar{\Lambda}$ и $\psi\colon R \to \bar{R}$ — канонические гомоморфизмы.

Если $(A, \beta^{\downarrow}) = d(F_1, \gamma_1^{\downarrow})$, то $dF = dF_1$, $F - F_1 \in (\mathrm{Ann}_R d)_{m,n}$ и $\psi(F) = \psi(F_1)$. Аналогично, $\varphi(\gamma_1^{\downarrow}) = \varphi(\gamma^{\downarrow})$. Таким образом, если справедливо равенство (9.28), то однозначно определена система уравнений (9.29) над модулем ${}_{\bar{R}}\bar{\Lambda}$.

Теорема 9.13. *Если R — коммутативное кольцо и для системы уравнений* (1.1) *над модулем ${}_R\Lambda$ справедливо равенство* (9.28), *где* $\mathrm{Ann}_\Lambda d \neq \{\theta\}$, *то система разрешима тогда и только тогда, когда разрешима система уравнений* (9.29) *над модулем ${}_{\bar{R}}\bar{\Lambda}$. В случае разрешимости*

$$L(A, \beta^{\downarrow}) = \varphi^{-1}(L(\psi(F), \varphi(\gamma^{\downarrow}))).$$

Доказательство. Если $A\lambda^{\downarrow} = \beta^{\downarrow}$, то $dF\lambda^{\downarrow} = d\gamma^{\downarrow}$, $F\lambda^{\downarrow} - \gamma^{\downarrow} \in (\mathrm{Ann}_\Lambda d)^{(m)}$ и $\psi(F)\varphi(\lambda^{\downarrow}) = \varphi(\gamma^{\downarrow})$. Значит, $\varphi(L(A, \beta^{\downarrow})) \subset L(\psi(F), \varphi(\gamma^{\downarrow}))$.

Обратно, пусть $\psi(F)\bar{\mu}^{\downarrow} = \varphi(\gamma^{\downarrow})$, $\bar{\mu}^{\downarrow} \in \bar{\Lambda}^{(n)}$. Тогда для любого такого вектора $\mu^{\downarrow} \in \Lambda^{(n)}$, что $\varphi(\mu^{\downarrow}) = \bar{\mu}^{\downarrow}$, имеем $\varphi(F\mu^{\downarrow} - \gamma^{\downarrow}) = \bar{\theta}^{\downarrow}$, $F\mu^{\downarrow} - \gamma^{\downarrow} \in (\mathrm{Ann}_\Lambda d)^{(m)}$ и $d(F\mu^{\downarrow} - \gamma^{\downarrow}) = \theta^{\downarrow}$. Но тогда $A\mu^{\downarrow} = \beta^{\downarrow}$. Значит, $\varphi^{-1}(L(\psi(F), \varphi(\gamma^{\downarrow}))) \subset L(A, \beta^{\downarrow})$.

Аналог теоремы 9.13 при $\Lambda = R$ и в других терминах доказан в [8] и [9]. Формулировка следствия 1 теоремы 1 из [9] ошибочная.

К системе уравнений (1.2) над конечным коммутативным цепным кольцом, не являющимся полем, удобно последовательно применять утверждение 8.2 и теорему 9.13. Пусть (см. (1.2))

$$AX^{\downarrow} = B^{\downarrow}$$

— такая система уравнений над кольцом R и $J(R) = aR$.

Если в матрице $A = (a_{ij} = r_{ij}a^{s_{ij}})$, $r_{ij} \in R^*$, имеется обратимый элемент $a_{i_0j_0} = r_{i_0j_0}$, то по следствию утверждения 8.2 система (1.2)

конгруэнтна системе с разделяющимися неизвестными типа $[1, n-1]$ и матрицей вида $\mathrm{Diag}(c_1, G_1)$, где $c_1 = r_{i_0 j_0}$ и $G_1 \in R_{m-1,n-1}$. Если в матрице G_1 есть обратимый элемент, то аналогичным образом переходим к конгруэнтной системе уравнений с разделяющимися неизвестными типа $[1, 1, n-2]$ и матрицей вида

$$\mathrm{Diag}(c_1, c_2, G_2), \qquad c_i \in R^*.$$

Через некоторое количество шагов либо получим систему уравнений с матрицей

$$\mathrm{diag}(c_1, \dots, c_s), \qquad c_i \in R^*,$$

где $s = \min\{m, n\}$, либо — систему уравнений с матрицей

$$\mathrm{Diag}(c_1, \dots, c_l, G_l), \qquad c_i \in R^*,$$

где матрица $G_l \in R_{m-l,n-l}$ и не содержит обратимых элементов. Но тогда $G_l = aH_l$, $H_l \in R_{m-l,n-l}$.

Рассмотрим систему уравнений

$$aH_l Z^{\downarrow} = D^{\downarrow}, \tag{9.30}$$

где $D^{\downarrow} = (d_{l+1}, \dots, d_m)^T$. Если в векторе $D^{\downarrow}$ есть обратимый элемент, то система (9.30) неразрешима. Если же $D^{\downarrow} \in J(R)^{(m-l)}$, то $D^{\downarrow} = aL^{\downarrow}$ и (9.30) — система с общим элементом. По теореме 9.13 можно перейти к системе уравнений

$$\psi(H_l)\,\overline{Z}^{\downarrow} = \psi(L^{\downarrow}) \tag{9.31}$$

над кольцом $\overline{R} = R/\mathrm{Ann}_R a = R/a^{t-1}R$. К системе уравнений (9.31) можно применять предыдущие рассуждения. Заметим, что система (9.30) может быть в действительности системой с общим элементом вида $a^q H_l Z^{\downarrow} = a^q L^{\downarrow}$, где $q > 1$.

Возможен и обратный порядок преобразований, когда исходная система уравнений (1.2) есть система с общим элементом: $A = a^q F$, $B^{\downarrow} = a^q G^{\downarrow}$. Тогда сначала перейдем к системе уравнений

$$\psi(F)\,Z^{\downarrow} = \psi(G^{\downarrow})$$

над кольцом $\overline{R} = R/\mathrm{Ann}_R a^q$. При этом q — максимальный показатель степени элемента a в элементах $a_{ij} = r_{ij}a^{s_{ij}}$ и, если система разрешима, то в $B^{\downarrow}$ минимальный показатель степени элемента a в элементах b_i не меньше q. Поэтому в матрице F есть обратимый элемент. А тогда обратимый элемент есть и в матрице $\psi(F)$.

§ 10. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С КВАЗИТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ

В § 8 были указаны условия, при которых система уравнений (1.1) над модулем ${}_R\Lambda$, где R — произвольное кольцо, конгруэнтна системе уравнений с разделяющимися неизвестными: матрица системы эквивалентна квазираспавшейся матрице.

Покажем, что система уравнений (1.1) над модулем ${}_R\Lambda$, где R — коммутативное кольцо, равносильна системе уравнений с матрицей несколько более общего вида, чем квазираспавшаяся.

Матрицу $C \in R_{m,n}$, где R — произвольное кольцо, назовем квазитреугольной, если она имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & * & & & * \\ & C_2 & & * & \\ & & \ddots & & \\ & & & C_{t-1} & * \\ 0 & & & & C_t \end{pmatrix}, \tag{10.1}$$

где $C_i \in R_{k_i,s_i}$, $i = 1, \dots, t$, $k_1 + \dots + k_t = m$, $s_1 + \dots + s_t = n$. Ясно, что верхнетреугольные квадратные матрицы — частные виды квазитреугольных матриц. Подматрицу матрицы C, расположенную в строках, проходящих через матрицу C_i, и в столбцах, проходящих через матрицу C_j, $i < j$, обозначим через C_{ij}.

Исследование и решение системы уравнений

$$C\xi^{\downarrow} = \delta^{\downarrow} \tag{10.2}$$

над модулем ${}_R\Lambda$, где C — матрица вида (10.1), можно начать с рассмотрения системы уравнений

$$C_t\xi_t^{\downarrow} = \delta_t^{\downarrow}, \tag{10.3}$$

где $\xi_t^{\downarrow} = (\xi_{t1}, \dots, \xi_{ts_t})^T$ и $\delta_t^{\downarrow} = (\delta_{t1}, \dots, \delta_{tk_t})^T$.

Если система (10.3) неразрешима, то неразрешима и система (10.2). Если система (10.3) разрешима и $L(C_t, \delta_t^{\downarrow})$ — множество ее решений, то переходим к рассмотрению систем уравнений

$$C_{t-1}\xi_{t-1}^{\downarrow} = \delta_{t-1}^{\downarrow} - C_{t-1,t}\mu_t^{\downarrow}, \tag{10.4}$$

где $\mu_t^{\downarrow} \in L(C_t, \delta_t^{\downarrow})$.

Если все системы уравнений (10.4) неразрешимы, то неразрешима и система (10.2). Если при некоторых $\mu_t^{\downarrow} \in L(C_t, \delta_t^{\downarrow})$ соответствующие

системы (10.4) разрешимы и $L(C_{t-1}, \delta_{t-1}^{\downarrow} - C_{t-1,t}\mu_t^{\downarrow})$ — множества их решений, то переходим к системам уравнений

$$C_{t-2}\xi_{t-2}^{\downarrow} = \delta_{t-2}^{\downarrow} - C_{t-2,t-1}\lambda_{t-1}^{\downarrow} - C_{t-2,t}\mu^{\downarrow}, \tag{10.5}$$

где $\lambda_{t-1}^{\downarrow} \in L(C_{t-1}, \delta_{t-1}^{\downarrow} - C_{t-1,t}\mu_t^{\downarrow})$, и так далее.

Укажем на связи системы уравнений (1.1) с системами уравнений с квазитреугольными матрицами.

Утверждение 10.1. *Пусть R — коммутативное кольцо и система уравнений* (1.1) *над модулем ${}_R\Lambda$ записана в виде*

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \xi^{\downarrow} = \begin{pmatrix} \beta_1^{\downarrow} \\ \beta_2^{\downarrow} \end{pmatrix},$$

где $A_1 \in R_{t,t}$, $\beta_1^{\downarrow} \in \Lambda^{(t)}$ и $1 \leqslant t < \min\{m, n\}$. Если система (1.1) *разрешима, то ее следствием является система уравнений*

$$\begin{pmatrix} |A_1|\, E_t & A_1^* A_2 \\ 0 & |A_1|\, A_4 - A_3 A_1^* A_2 \end{pmatrix} \xi^{\downarrow} = \begin{pmatrix} A_1^* \beta_1^{\downarrow} \\ |A_1|\, \beta_2^{\downarrow} - A_3 A_1^* \beta_1^{\downarrow} \end{pmatrix}. \tag{10.6}$$

Доказательство. Пусть выполняются равенства

$$\begin{aligned} A_1 F_1^{\downarrow} + A_2 F_2^{\downarrow} &= \beta_1^{\downarrow}, \\ A_3 F_1^{\downarrow} + A_4 F_2^{\downarrow} &= \beta_2^{\downarrow}. \end{aligned} \tag{10.7}$$

Умножив первое из них слева на матрицу A_1^*, получим равенство

$$|A_1|\, E_t F_1^{\downarrow} + A_1^* A_2 F_2^{\downarrow} = A_1^* \beta_1^{\downarrow}. \tag{10.8}$$

Умножив второе из равенств (10.7) на $|A_1|$ и вычтя из полученного равенства почленно равенство (10.8), умноженное слева на A_3, получим равенство

$$(|A_1|\, A_4 - A_3 A_1^* A_2)\, F_2^{\downarrow} = |A_1|\, \beta_2^{\downarrow} - A_3 A_1^* \beta_1^{\downarrow}. \tag{10.9}$$

Равенства (10.8) и (10.9) доказывают утверждение.

Если для краткости записать систему уравнений (10.6) в виде $T\xi^{\downarrow} = \delta^{\downarrow}$, то при условиях утверждения 10.1 получено включение

$$L(A, \beta^{\downarrow}) \subset L(T, \delta^{\downarrow}). \tag{10.10}$$

Утверждение 10.2. *Если разрешима система уравнений* (10.6) *над модулем ${}_R\Lambda$, где R — коммутативное кольцо, то разрешима система уравнений*

$$|A_1|\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\xi^{\downarrow} = |A_1|\begin{pmatrix} \beta_1^{\downarrow} \\ \beta_2^{\downarrow} \end{pmatrix}. \tag{10.11}$$

Доказательство. Пусть выполняются равенства (10.8) и (10.9). Умножив равенство (10.8) слева на матрицу A_1, получим равенство

$$|A_1|(A_1F_1^{\downarrow} + A_2F_2^{\downarrow}) = |A_1|\,\beta_1^{\downarrow}. \tag{10.12}$$

Прибавив к равенству (10.9) равенство (10.8), умноженное слева на матрицу A_3, получаем равенство

$$|A_1|(A_3F_1^{\downarrow} + A_4F_2^{\downarrow}) = |A_1|\,B_2^{\downarrow}. \tag{10.13}$$

Равенства (10.12) и (10.13) доказывают утверждение.

Утверждение 10.2 показывает, что справедливо включение

$$L(T, \delta^{\downarrow}) \subset L(|A_1|\,A, |A_1|\,\beta^{\downarrow}). \tag{10.14}$$

Теорема 10.3. *Пусть R — коммутативное кольцо и система уравнений* (1.1) *над модулем ${}_R\Lambda$ записана в виде* (9.4), *где $A_1 \in R_{t,t}$, $\beta_1^{\downarrow} \in \Lambda^{(t)}$ и $1 \leqslant t < \min\{m, n\}$. Если $\mathrm{Ann}_{\Lambda}|A_1| = \{\theta\}$, то системы уравнений* (1.1) *и* (10.6) *равносильны.*

Доказательство. Так как $\mathrm{Ann}_{\Lambda}|A_1| = \{\theta\}$, то матрица $|A_1|\,E_m$ регулярна над Λ. По следствию 1 утверждения 4.3 равносильны системы уравнений (1.1) и (10.11). Поэтому включение (10.14) записывается в виде

$$L(T, \delta^{\downarrow}) \subset L(A, \beta^{\downarrow}). \tag{10.15}$$

Включения (10.10) и (10.15) из утверждений 10.1 и 10.2 соответственно показывают, что системы уравнений (1.1) и (10.6) разрешимы или неразрешимы одновременно и в случае разрешимости

$$L(A, \beta^{\downarrow}) \subset L(T, \delta^{\downarrow}).$$

Теорема 10.3 при $\Lambda = R$ дает прямое доказательство следствия 2 теоремы 2 из [9], где это следствие сформулировано неточно и получено с использованием вспомогательной системы уравнений, число неизвестных в которой больше числа неизвестных в исходной системе.

В заключение отметим, что предпринятое в настоящей работе изложение некоторых возможных методов сведения систем линейных уравнений над модулями к более простым системам было вызвано, в первую очередь, отсутствием общих алгоритмов для отыскания решений произвольных систем. Конечно, теперь возникают задачи по отысканию алгоритмов для

методов упрощения систем и оценке их сложности. Однако это уже предмет дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джекобсон Н.* Теория колец. — М.: ГИИЛ, 1947.
2. *Глухов М. М., Елизаров В. П., Нечаев А. А.* Алгебра. II. — М: Гелиос-АРВ, 2003.
3. *Елизаров В. П.* Системы линейных уравнений над коммутативным кольцом. — Успехи матем. наук, 1993, т. 48, № 2, с. 181–182.
4. *Елизаров В. П.* Конечные кольца (основы теории). — М.: Наука, 1993.
5. *Елизаров В. П.* Общее решение системы однородных линейных уравнений над коммутативными кольцом. — Успехи матем. наук, 1994, т. 49, № 1, с. 141–142.
6. *Елизаров В. П.* Методы упрощения систем линейных уравнений над модулями. I. — В сб.: Труды по дискретной математике. Т. 7. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003, с. 56–74.
7. *Малашонок Г. И.* Условия совместности системы линейных уравнений в коммутативном кольце. — В сб.: Материалы X конференции молодых ученых Института прикладных проблем механики и математики АН УССР. II. — М.: ВИНИТИ 7197, 1984, с. 149–153.
8. *Малашонок Г. И.* Система линейных уравнений в коммутативном кольце. — Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-матем. наук. — Киев: Киевский гос. ун-т, 1986.
9. *Малашонок Г. И.* О решении системы линейных уравнений над коммутативным кольцом. — Матем. заметки, 1987, т. 42, № 4, с. 543–548.
10. *Нечаев А. А.* Конечные кольца главных идеалов. — Матем. сб., 1973, т. 91 (133), № 3 (7), с. 350–366.
11. *Нечаев А. А.* О подобии матриц над коммутативным локальным артиновым кольцом. — Труды сем. им. И. Г. Петровского, 1983, в. 9, с. 81–102.
12. *Asano K.* Über verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit hypercomplexem Operatorenring und ihre Anwendungen. — Jap. J. Math., 1939, v. 15, № 4, p. 231–253.
13. *Camion P., Levy L. S., Mann H. B.* Linear equations over a commutative ring. — J. Algebra, 1971, v. 17, № 3, p. 432–446.
14. *McDonald B. R.* Diagonal equivalence of matrices over a finite commutative ring. — J. Comb. Theory, Ser. A, 1972, v. 13, p. 100–104.
15. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules. — Trans. Amer. Math. Soc., 1949, v. 66, p. 464–491.
16. *Yohe C. R.* Triangular and diagonal forms for matrices over commutative Noetherian rings. — J. Algebra, 1967, v. 6, № 3, p. 335–368.