V. I. Vasyunin, The corona theorem and the angles between invariant subspaces,
Algebra i Analiz, 1994, Volume 6, Issue 1, 95–109

Алгебра и анализ
Том 6 (1994), вып. 1

ТЕОРЕМА О КОРОНЕ И УГЛЫ МЕЖДУ ИНВАРИАНТНЫМИ ПОДПРОСТРАНСТВАМИ

В. И. Васюнин

Найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы два подпространства, инвариантные относительно заданного сжатия, располагались под ненулевым углом. Упомянутые условия накладываются на множители в факторизациях характеристической функции исходного сжатия, которые отвечают данным инвариантным подпространствам, а также на некоторые оператор-функции, участвующие в определении регулярных факторизаций.

Оценка угла между инвариантными подпространствами через норму решения задачи о короне хорошо известна для сжатий класса C_0 с одномерными дефектными операторами (см., например, [1]). Для конечномерного случая в [2] доказано, что сумма подпространств $K_1 = H^2_n \ominus \Theta_1 H^2_n$ и $K_2 = H^2_n \ominus \Theta_2 H^2_n$ замкнута (т.е. они расположены под ненулевым углом) в том и только том случае, когда имеет место оценка

$$\|\Theta_1(\zeta)^* e\|^2 + \|\Theta_2(\zeta)^* e\|^2 \geqslant \delta \|e\|^2, \qquad \forall |\zeta| < 1, \quad e \in \mathbb{C}^n,$$

или, другими словами, в том и только том случае, когда найдутся две аналитические функции $\Gamma_i \in H^\infty_{n\times n}$ $(i = 1, 2)$, для которых справедливо равенство

$$\Theta_1\Gamma_1 + \Theta_2\Gamma_2 = I_n\,. \tag{1}$$

Доказательство того, что условие (1) является необходимым и достаточным для положительности угла между подпространствами K_i, содержится в работе [3] для произвольных двусторонне внутренних функций Θ_i и по существу повторяет доказательство для скалярного случая.

Близкий вопрос рассматривался в статье [4], а именно, вопрос о том, когда инвариантное подпространство имеет инвариантное прямое дополнение. Пусть T — вполне неунитарное сжатие с характеристической функцией Θ, пусть H_1 — T-инвариантное подпространство, а $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ — соответствующая регулярная факторизация. Р. Теодореску ([4]) доказал, что подпространство H_1 имеет прямое T-инвариантное дополнение тогда и только тогда, когда найдутся две ограниченные аналитические функции Γ_i, для которых

$$\Theta_1\Gamma_1 + \Gamma_2\Theta_2 = I\,. \tag{2}$$

Ключевые слова: функциональная модель, характеристическая функция, инвариантные подпространства, теорема о короне.

В настоящей статье будут описаны все прямые дополнения в задаче Теодореску, и будут даны необходимые и достаточные условия положительности угла между T-инвариантными подпространствами. Оказывается, что в общем случае равенство (1) уже не является достаточным для положительности угла между соответствующими инвариантными (коинвариантными) подпространствами.

Основные понятия и обозначения. Обозначения, касающиеся функциональной модели вполне неунитарных сжатий, можно найти в монографии [5]. Мы, однако, будем использовать так называемую бескоординатную запись функциональной модели (см. [6]). Напомним основные понятия, возникающие при этом подходе.

Пусть T вполне неунитарное сжатие в гильбертовом пространстве H. Если $\mathcal{H}$ — пространство его минимальной унитарной дилатации $\mathcal{U}$, то $\mathcal{H}$ может быть разложено в ортогональную сумму

$$\mathcal{H} = G_* \oplus H \oplus G,$$

где $\mathcal{U}G \subset G$, $\mathcal{U}^*G_* \subset G_*$, и

$$\mathcal{H} = \operatorname{span}\{\mathcal{U}^n H : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Пусть E и E_* — два вспомогательных гильбертовых пространства, причём

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim(G \ominus \mathcal{U}G), \\ \dim E_* &= \dim(G_* \ominus \mathcal{U}^*G_*). \end{aligned}$$

Пусть π и π_* — два изометрических вложения пространств $L^2(E)$ и $L^2(E_*)$ в $\mathcal{H}$, сплетающих оператор умножения на z с оператором $\mathcal{U}$. Тогда

$$G = \pi H^2(E), \quad G_* = \pi H^2_-(E_*), \quad H = \mathcal{H} \ominus \left(\pi H^2(E) \oplus \pi H^2_-(E_*)\right),$$

и, следовательно, ортогональный проектор на H задаётся формулой

$$P_H = I - \pi P_+ \pi_* - \pi^* P_- \pi_*^*,$$

где P_+ — проектор Рисса из пространства L^2 на H^2 и $P_- = I - P_+$ — ортогональный проектор на $H^2_- = L^2 \ominus H^2$. Оператор $\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \pi_*^*\pi$ является оператором умножения на сжимающую операторнозначную аналитическую функцию, которую называют характеристической функцией оператора T.

Подпространства

$$\mathcal{R} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H} \ominus \pi_* L^2(E_*) \qquad \text{и} \qquad \mathcal{R}_* \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H} \ominus \pi L^2(E)$$

называют остаточным и $*$-остаточным подпространствами. Они также могут быть представлены как образы некоторых изометрий L^2-пространств, сплетающих оператор умножения на z с оператором $\mathcal{U}$. А именно положим

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} (I - \Theta^*\Theta)^{1/2}, \qquad \Delta_* \stackrel{\text{def}}{=} (I - \Theta\Theta^*)^{1/2},$$

и

$$L^2(\Delta E) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{clos} \Delta L^2(E), \qquad L^2(\Delta_* E_*) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{clos} \Delta_* L^2(E_*).$$

Определим теперь операторы $\tau : L^2(\Delta E) \to \mathcal{H}$ и $\tau_* : L^2(\Delta_* E_*) \to \mathcal{H}$ с помощью тождеств

$$\tau\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \pi - \pi_*\Theta, \qquad \tau_*\Delta_* \stackrel{\text{def}}{=} \pi_* - \pi\Theta^*.$$

Эти равенства задают операторы τ и τ_* на плотных множествах, с которых те могут быть непрерывно продолжены на всё пространство. Операторы $\tau\tau^*$ и $\tau_*\tau_*^*$ являются ортогональными проекторами на подпространства $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}_*$, т.е.

$$\pi\pi^* + \tau_*\tau_*^* = I, \qquad \pi_*\pi_*^* + \tau\tau^* = I.$$

В дальнейшем будут постоянно использоваться соотношения между вложениями π и τ без специальных упоминаний, приведём поэтому здесь некоторые полезные тождества, вытекающие непосредственно из определений.

$$\begin{array}{llll}
\pi^*\pi = I, & \pi^*\pi_* = \Theta^*, & \pi^*\tau = \Delta, & \pi^*\tau_* = 0, \\
\pi_*^*\pi = \Theta, & \pi_*^*\pi_* = I, & \pi_*^*\tau = 0, & \pi_*^*\tau_*\Delta_*, \\
\tau^*\pi = \Delta, & \tau^*\pi_* = 0, & \tau^*\tau = I, & \tau^*\tau_* = -\Theta^*, \\
\tau_*^*\pi = 0, & \tau_*^*\pi_* = \Delta_*, & \tau_*^*\tau = -\Theta, & \tau_*^*\tau_* = I.
\end{array}$$

Чтобы получить функциональную модель в классической форме Сёкефальви-Надя–Фойаша, нужно взять $\mathcal{H} = L^2(E_*) \oplus L^2(\Delta E)$, или, записывая в форме столбцов,

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} L^2(E_*) \\ L^2(\Delta E) \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} \Theta \\ \Delta \end{pmatrix} H^2(E), \qquad G_* = \begin{pmatrix} H^2_-(E_*) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\pi = \begin{pmatrix} \Theta \\ \Delta \end{pmatrix}, \qquad \pi_* = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}, \qquad \tau_* = \begin{pmatrix} \Delta_* \\ -\Theta^* \end{pmatrix}.$$

Два классических результата (а именно, теорема о подъёме и связь регулярных факторизаций характеристической функции с инвариантными подпространствами оператора) будут многократно использоваться в той форме, в которой они приведены в работе [7]. Для удобства приведём здесь формулировки этих теорем.

Теорема о подъёме. *Пусть X — ограниченный оператор в H, коммутирующий с оператором T. Тогда существует оператор Y в $\mathcal{H}$, имеющий ту же самую норму, коммутирующий с оператором $\mathcal{U}$ и такой, что*

$$YG \subset G, \quad Y^*G_* \subset G_* \quad \text{и} \quad X = P_H Y | H.$$

Кроме того, оператор Y имеет вид

$$Y = \pi_* A_* \pi_*^* + \tau\Delta A \pi^* + \tau B \tau_*^*, \tag{3}$$

или (что то же самое)

$$Y = \pi A \pi^* + \pi_* A_* \Delta_* \tau_*^* + \tau B \tau_*^* . \tag{4}$$

Здесь $A \in H^\infty(E \to E)$, $A_* \in H^\infty(E_* \to E_*)$, $B \in L^\infty(\Delta E_* \to \Delta E)$, *и* $A_* \Theta = \Theta A$, *где* Θ *— характеристическая функция оператора* T.

Оператор Y *представляет подъём нулевого оператора в том и только в том случае, когда* $Y = \pi \Gamma \pi_*^*$ *для некоторой оператор-функции* Γ, $\Gamma \in H^\infty(E_* \to E)$; *другими словами, когда* $A = \Gamma\Theta$, $A_* = \Theta\Gamma$ *и* $B = \Delta\Gamma\Delta_*$.

Теорема об инвариантных подпространствах. *Следующие утверждения равносильны:*

(i) *T имеет инвариантное подпространство;*
(ii) *Θ допускает регулярную факторизацию;*
(iii) *существует такое изометрическое вложение η пространства $L^2(F)$ в $\mathcal{H}$, что*
  (a) $\eta^* G \subset H^2(F)$;
  (b) $\eta^* G_* \subset H^2_-(F)$;
  (c) $\pi_*^*(I - \eta\eta^*)\pi = 0$.

Для нас, однако, явные формулы, связывающие те объекты, что участвуют в данных трёх утверждениях, будут гораздо важнее их абстрактной эквивалентности.

Если задано вложение η со свойствами (a)–(c), то мы получим соответствующую регулярную факторизацию

$$\Theta = \Theta_2 \Theta_1 , \tag{5}$$

положив $\Theta_1 = \eta^* \pi$, $\Theta_2 = \pi_*^* \eta$. Напомним, что факторизация (5), где $\Theta_1 \in H^\infty(E \to F)$, $\Theta_2 \in H^\infty(F \to E_*)$, называется регулярной, если оператор

$$Z : L^2(\Delta E) \to \begin{pmatrix} L^2(\Delta_1 E) \\ L^2(\Delta_2 F) \end{pmatrix}, \qquad Z\Delta \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \Theta_1 \end{pmatrix},$$

является унитарным. Здесь $\Delta_i \overset{\text{def}}{=} (I - \Theta_i^* \Theta_i)^{1/2}$, а Z_1 и Z_2 — проекции оператора Z на подпространства $L^2(\Delta_1 E)$ и соответственно $L^2(\Delta_2 F)$. Если задана регулярная факторизация (5), то дополнительное вложение η, обладающее свойствами (a)–(c), можно определить равенством

$$\eta = \pi_* \Theta_2 + \tau Z_2^* \Delta_2 . \tag{6}$$

Симметричным образом можно ввести оператор Z_*:

$$Z_* : L^2(\Delta_* E_*) \to \begin{pmatrix} L^2(\Delta_{*2} E_*) \\ L^2(\Delta_{*1} F) \end{pmatrix}, \qquad Z_* \Delta_* \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} Z_{*2} \\ Z_{*1} \end{pmatrix} \Delta_* = \begin{pmatrix} \Delta_{*2} \\ \Delta_{*1} \Theta_2^* \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $\Delta_{*i} \stackrel{\text{def}}{=} (I - \Theta_i \Theta_i^*)^{1/2}$, а Z_{*1} и Z_{*2} — проекции оператора Z_* на подпространства $L^2(\Delta_{*1}F)$ и соответственно $L^2(\Delta_{*2}E_*)$. Тогда можно написать формулу для оператора η, симметричную формуле (6):

$$\eta = \pi\Theta_1^* + \tau_* Z_{*1}^* \Delta_{*1}\,.$$

Отметим, что для проверки изометричности оператора η (определённого, например, равенством (6)) необязательно знать, что весь оператор Z — унитарен, достаточно коизометричности оператора Z_2:

$$\eta^*\eta = (\Theta_2^*\pi_*^* + \Delta_2 Z_2 \tau^*)(\pi_*\Theta_2 + \tau Z_2^*\Delta_2) = \Theta_2^*\Theta_2 + \Delta_2 Z_2 Z_2^*\Delta_2 = I - \Delta_2(I - Z_2 Z_2^*)\Delta_2\,.$$

Этот эффект объясняет следующее утверждение.

Предложение 1. *Следующие утверждения равносильны:*

1) $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ *— регулярная факторизация;*
2) *оператор Z унитарен;*
3) *оператор Z_* унитарен;*
4) *оператор Z_2 коизометричен;*
5) *оператор Z_{*1} коизометричен.*

Введём теперь ещё четыре изометрических вложения, дающих спектральное представление остаточной и $*$-остаточной частей минимальной унитарной дилатации сужения оператора T на соответствующее инвариантное подпространство и компрессии оператора T на его ортогональное дополнение:

$$\tau_1 \stackrel{\text{def}}{=} \tau Z_1^*, \qquad \tau_2 \stackrel{\text{def}}{=} \tau Z_2^*, \qquad \tau_{*1} \stackrel{\text{def}}{=} \tau_* Z_{*1}^*, \qquad \tau_{*2} \stackrel{\text{def}}{=} \tau_* Z_{*2}^*.$$

Будучи произведениями двух изометрий, все эти операторы являются изометрическими вложениями соответствующих L^2-пространств в $\mathcal{H}$. Положим

$$\mathcal{R}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \tau_1 L^2(\Delta_1 E), \quad \mathcal{R}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \tau_2 L^2(\Delta_2 F), \quad \mathcal{R}_{*1} \stackrel{\text{def}}{=} \tau_{*1} L^2(\Delta_{*1} F), \quad \mathcal{R}_{*2} \stackrel{\text{def}}{=} \tau_{*2} L^2(\Delta_{*2} E_*).$$

Тогда

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2, \qquad \mathcal{R}_* = \mathcal{R}_{*1} \oplus \mathcal{R}_{*2},$$
$$\mathcal{H} = \eta L^2(F) \oplus \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_{*2} = \pi L^2(E) \oplus \mathcal{R}_{*1} \oplus \mathcal{R}_{*2} = \pi_* L^2(E_*) \oplus \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2\,,$$

и подпространство

$$H_1 = \big(\eta H^2(F) \oplus \tau_1 L^2(\Delta_1 E)\big) \ominus \pi H^2(E) = \big(\eta H^2(F) \oplus \mathcal{R}_1\big) \ominus G$$

является T-инвариантным подпространством, соответствующим нашему вложению η. Минимальной унитарной дилатацией $\mathcal{U}_1$ оператора $T_1 \stackrel{\text{def}}{=} T|H_1$ является сужение оператора $\mathcal{U}$ на подпространство $\mathcal{H}_1 = \eta L^2(F) \oplus \mathcal{R}_1$. Чистая часть функции

Θ_1 будет характеристической функцией оператора T_1. Аналогично чистая часть функции Θ_2 — характеристическая функция оператора T_2, являющегося компрессией оператора T на подпространство $H_2 \stackrel{\text{def}}{=} H \ominus H_1$,

$$\begin{aligned} H_2 &= \left(\eta H^2_-(F) \oplus \tau_{*2} L^2(\Delta_{*2} E_*)\right) \ominus \pi_* H^2_-(E_*) = \eta H^2_-(F) \oplus \mathcal{R}_{*2} \ominus G_*\,, \\ T_2 &= P_{H_2} T | H_2\,. \end{aligned}$$

Минимальной унитарной дилатацией $\mathcal{U}_2$ оператора T_2 является сужение оператора $\mathcal{U}$ на подпространство $\mathcal{H}_2 = \eta L^2(F) \oplus \mathcal{R}_{*2}$.

Завершим эту вводную часть списком соотношений между введёнными вложениями:

$$\begin{array}{lllll}
\pi^*\eta = \Theta_1^*, & \pi^*\tau_1 = \Delta_1, & \pi^*\tau_2 = \Theta_1^*\Delta_2, & \pi^*\tau_{*1} = 0, & \pi^*\tau_{*2} = 0, \\
\pi_*^*\eta = \Theta_2, & \pi_*^*\tau_1 = 0, & \pi_*^*\tau_2 = 0, & \pi_*^*\tau_{*1} = \Theta_2\Delta_{*1}, & \pi_*^*\tau_{*2} = \Delta_{*2}, \\
\tau^*\eta = Z_2^*\Delta_2, & \tau^*\tau_1 = Z_1^*, & \tau^*\tau_2 = Z_2^*, & \tau^*\tau_{*1} = -\Theta^* Z_{*1}^*, & \tau^*\tau_{*2} = -\Theta^* Z_{*2}^*, \\
\tau_*^*\eta = Z_{*1}^*\Delta_{*1}, & \tau_*^*\tau_1 = -Z_{*1}^*\Theta_1, & \tau_*^*\tau_2 = -\Theta Z_2^*, & \tau_*^*\tau_{*1} = Z_{*1}^*, & \tau_*^*\tau_{*2} = Z_{*2}^*, \\
\eta^*\eta = I, & \eta^*\tau_1 = 0, & \eta^*\tau_2 = \Delta_2, & \eta^*\tau_{*1} = \Delta_{*1}, & \eta^*\tau_{*2} = 0, \\
\tau_1^*\eta = 0, & \tau_1^*\tau_1 = I, & \tau_1^*\tau_2 = 0, & \tau_1^*\tau_{*1} = -\Theta_1^*, & \tau_1^*\tau_{*2} = 0, \\
\tau_2^*\eta = \Delta_2, & \tau_2^*\tau_1 = 0, & \tau_2^*\tau_2 = I, & \tau_2^*\tau_{*1} = \Delta_2\Delta_{*1}, & \tau_2^*\tau_{*2} = -\Theta_2^*, \\
\tau_{*1}^*\eta = \Delta{*}1, & \tau_{*1}^*\tau_1 = -\Theta_1, & \tau_{*1}^*\tau_2 = \Delta_{*1}\Delta_2, & \tau_{*1}^*\tau_{*1} = I, & \tau_{*1}^*\tau_{*2} = 0, \\
\tau_{*2}^*\eta = 0, & \tau_{*2}^*\tau_1 = 0, & \tau_{*2}^*\tau_2 = -\Theta_2, & \tau_{*2}^*\tau_{*1} = 0, & \tau_{*2}^*\tau_{*2} = I.
\end{array}$$

Отметим два следующих тождества

$$Z_{*2}\Theta = \Theta_2 Z_2 \ (= -\tau_{*2}^*\tau), \qquad \Theta_1^* Z_{*1} = Z_1 \Theta^* \ (= -\tau_1^*\tau_*) \tag{8}$$

и ещё три полезных ортогональных разложения проекторов

$$\tau\tau^* = \tau_1\tau_1^* + \tau_2\tau_2^*\,, \qquad \tau_*\tau_*^* = \tau_{*1}\tau_{*1}^* + \tau_{*2}\tau_{*2}^*\,, \qquad \eta\eta^* + \tau_1\tau_1^* + \tau_{*2}\tau_{*2}^* = I\,.$$

Основной результат. Теперь можно сформулировать основной результат настоящей статьи.

Теорема 1. *Пусть T — вполне неунитарное сжатие в гильбертовом пространстве H. Пусть H_1 и H_1' — инвариантные подпространства, сумма которых $H_1 + H_1'$ плотна в H, и $\Theta = \Theta_2\Theta_2 = \Theta_2'\Theta_1'$ — соответствующие регулярные факторизации, а Z_* и Z_*' — унитарные операторы, определяемые этими факторизациями по формуле ()7. Тогда пространство H является прямой суммой этих T-инвариантных подпространств в том и только в том случае, когда, во-первых, существуют такие функции $\Gamma_1 \in H^\infty(F \to E)$ и $\Gamma_1' \in H^\infty(F' \to E)$, которые удовлетворяют тождеству*

$$\Gamma_1\Theta_1 + \Gamma_1'\Theta_1' = I\,, \tag{9}$$

и, во-вторых, такие функции $V_{*2} \in L^\infty(\Delta_* E_* \to \Delta_{*2} E_*)$, $V'_{*2} \in L^\infty(\Delta_* E_* \to \Delta'_{*2} E_*)$, *для которых имеет место тождество*

$$V_{*2} Z_{*2} + V'_{*2} Z'_{*2} = I. \tag{10}$$

Как уже было упомянуто, условие (9) является необходимым и достаточным в случае двусторонне внутренней функции Θ. Мы видим, что условие (10) тривиально выполнено даже для $*$-внутренней функции Θ: в этой ситуации $L^2(\Delta_* E_*)$ — нулевое пространство, где все операторы являются нулевыми.

Покажем, что в общей ситуации условие (9) не является достаточным.

Пример. Пусть $\dim E = \dim E_* = 1$ и Θ — постоянная функция, тождественно равная $\frac{1}{2}$. Для любых двух факторизаций $\Theta = \Gamma_1 \Theta_1 = \Gamma'_1 \Theta'_1$ выполняется равенство (9). Для регулярных факторизаций промежуточное пространство F одно- или двумерно (см. [1]). Если одна из факторизаций имеет двумерное промежуточное пространство, то соответствующие инвариантные подпространства не пересекаются, их сумма плотна в H, но угол между этими подпространствами равен нулю.

На самом деле, если заданы два инвариантных подпространства, расположенных под ненулевым углом, прямая сумма которых есть всё пространство, то выполнены не только соотношения (9)–(10). И мы начнём с поиска возможных соотношений между сомножителями характеристической функции, определяющими соответствующие регулярные факторизации.

Лемма 1. *Пусть T — вполне неунитарное сжатие в гильбертовом пространстве H, и $H = H_1 \dotplus H'_1$, где $H_1, H'_1 \in \operatorname{Lat} T$. Пусть Θ — характеристическая функция оператора T, $\Theta = \Theta_2\Theta_1 = \Theta'_2\Theta'_1$ — две регулярные факторизации, соответствующее заданным инвариантным подпространствам, а η и η' — соответствующие функциональные вложения. Тогда существуют H^∞-функции*

$$\Gamma_1 \in H^\infty(F \to E), \quad \Gamma_2 \in H^\infty(E_* \to F), \quad \Gamma'_1 \in H^\infty(F' \to E), \quad \Gamma'_2 \in H^\infty(E_* \to F'),$$

для которых

$$\begin{gathered} \Theta_1\Gamma_1 + \Gamma_2\Theta_2 = I_F, \qquad \Theta'_1\Gamma'_1 + \Gamma'_2\Theta'_2 = I_{F'}, \\ \Gamma_1\Theta_1 + \Gamma'_1\Theta'_1 = I_E, \qquad \Gamma_2\Theta_2 + \Gamma'_2\Theta'_2 = I_{E_*}, \\ \Theta'_1\Gamma_1 = G'_2\Theta_2, \qquad \Theta_1\Gamma'_1 = G_2\Theta'_2, \qquad \Gamma_1\Gamma_2 = \Gamma'_1\Gamma'_2, \end{gathered} \tag{11}$$

и L^∞-функции

$$\begin{aligned} V_1 &\in L^\infty(\Delta E \to \Delta_1 E), & V'_1 &\in L^\infty(\Delta E \to \Delta'_1 E), \\ V_{*2} &\in L^\infty(\Delta_{*2} E_* \to \Delta_* E_*), & V'_{*2} &\in L^\infty(\Delta'_{*2} E_* \to \Delta_* E_*), \end{aligned}$$

удовлетворяющие тождествам

$$\begin{aligned} &Z_1^* V_1 + Z_1'^* V'_1 = I, \quad V_1 Z_1^* = I, \quad V'_1 Z_1'^* = I, \quad V'_1 Z_1^* = 0, \quad V_1 Z_1'^* = 0, \\ &V_{*2} Z_{*2} + V'_{*2} Z'_{*2} = I, \quad Z_{*2} V_{*2} = I, \quad Z'_{*2} V'_{*2} = I, \quad Z'_{*2} V_{*2} = 0, \quad Z_{*2} V'_{*2} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Более того, подъём $Y : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ проектора $\mathcal{P}$ на подпространство H_1' параллельно подпространству H_1 удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{matrix} Y\tau_1 = 0, & \tau_*^* Y\eta = 0, & \tau_{*2}^*(I - Y) = 0, & \eta^*(I - Y)\tau = 0, \\ \tau_{*2}'^* Y = 0, & \eta'^* Y\tau = 0, & (I - Y)\tau_1' = 0, & \tau_*^*(I - Y)\eta' = 0. \end{matrix} \tag{13}$$

Для доказательства этой леммы нам понадобится описание подъёма проектора на одно инвариантное подпространство параллельно другому, которое будет дано в следующих леммах.

Лемма 2. *Пусть T — вполне неунитарное сжатие в гильбертовом пространстве H, и H_1 — T-инвариантное подпространство. Тогда оператор $Y : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ является подъёмом оператора $\mathcal{P}$, равного нулю на H_1, в том и только в том случае, когда $\tau_*^* Y\eta = 0$, $Y\tau_1 = 0$ и $\pi^* Y\eta \in H^\infty(F \to E)$.*

Доказательство. Так как $YG \subset G$ и $Y^*G_* \subset G_*$, то

$$\mathcal{P}|H_1 = 0 \iff Y(H_1 \oplus G) \subset G.$$

Напомним, что $H_1 \oplus G = \eta H^2(F) \oplus \tau_1 L^2(\Delta_1 E)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}|H_1 = 0 &\iff Y(\eta H^2(F) \oplus \tau_1 L^2(\Delta_1 E)) \subset \pi H^2(E) \\ &\iff Y\tau_1 = 0, \quad \tau_*^* Y\eta = 0, \quad \pi^* Y\eta \in H^\infty(F \to E). \quad \bullet \end{aligned}$$

Следствие 1. *Пусть T — вполне неунитарное сжатие в гильбертовом пространстве H, и $H = H_1 \dotplus H_1'$, где $H_1, H_1' \in \operatorname{Lat} T$. Пусть $\mathcal{P}$ — проектор на подпространство H_1' параллельно подпространству H_1. Тогда оператор $Y : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ является подъёмом оператора $\mathcal{P}$ в том и только в том случае, когда*

$$Y\tau_1 = 0, \qquad \tau_*^* Y\eta = 0, \qquad (I - Y)\tau_1' = 0, \qquad \tau_*^*(I - Y)\eta' = 0,$$

и

$$\Gamma_1 \overset{\text{def}}{=} \pi^* Y\eta \in H^\infty(F \to E), \qquad \Gamma_1' \overset{\text{def}}{=} \pi^*(I - Y)\eta' \in H^\infty(F' \to E). \tag{14}$$

Доказательство. Применить лемму 2 к оператору $\mathcal{P}$ с подпространством H_1 и к оператору $I - \mathcal{P}$ с подпространством H_1'. $\bullet$

Лемма 3. *Пусть T — вполне неунитарное сжатие в гильбертовом пространстве H, и H_1 — T-инвариантное подпространство. Тогда оператор $Y : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ является подъёмом оператора $\mathcal{P}$, образ которого лежит в подпространстве H_1, в том и только в том случае, когда $\tau_{*2}^* Y = 0$, $\eta^* Y\tau = 0$ и $\eta^* Y\pi_* \in H^\infty(E_* \to F)$.*

Доказательство. Так как $YG \subset G$ и $Y^*G_* \subset G_*$, то

$$\mathcal{P}H \subset H_1 \iff Y(H \oplus G) \subset H_1 \oplus G.$$

Напомним,что $H_1 \oplus G = \eta H^2(F) \oplus \tau_1 L^2(\Delta_1 E)$ и $H \oplus G = \pi_* H^2(E_*) \oplus \tau L^2(\Delta E)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}H \subset H_1 &\iff Y(\pi_* H^2(E_*) \oplus \tau L^2(\Delta E)) \subset \eta H^2(F) \oplus \tau_1 L^2(\Delta_1 E) \\ &\iff \tau_{*2}^* Y = 0, \quad \eta^* Y\tau = 0, \quad \eta^* Y\pi_* \in H^\infty(E_* \to F). \quad \bullet \end{aligned}$$

Следствие 2. *Пусть T — вполне неунитарное сжатие в гильбертовом пространстве H, и $H = H_1 \dotplus H_1'$, где $H_1, H_1' \in \operatorname{Lat} T$. Пусть $\mathcal{P}$ — проектор на подпространство H_1' параллельно подпространству H_1. Тогда оператор $Y : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ является подъёмом оператора $\mathcal{P}$ в том и только в том случае, когда*

$$\tau_{*2}^*(I - Y) = 0, \qquad \tau_{*2}'^*Y = 0, \qquad \eta^*(I - Y)\tau = 0, \qquad \eta'^*Y\tau = 0,$$

и

$$\Gamma_2 \stackrel{\text{def}}{=} \eta^*(I - Y)\pi_* \in H^\infty(E_* \to F), \qquad \Gamma_2' \stackrel{\text{def}}{=} \eta'^*Y\pi_* \in H^\infty(E_* \to F'). \tag{15}$$

Доказательство. Применить лемму 3 к оператору $\mathcal{P}$ с подпространством H_1' и к оператору $I - \mathcal{P}$ с подпространством H_1. •

Лемма 4. *Пусть T — вполне неунитарное сжатие в гильбертовом пространстве H, и $H = H_1 \dotplus H_1'$, где $H_1, H_1' \in \operatorname{Lat} T$. Пусть $\mathcal{P}$ — проектор на подпространство H_1' параллельно подпространству H_1, и $Y : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — подъём оператора $\mathcal{P}$. Пусть, кроме того, оператор-функции Γ заданы формулами* (14)–(15). *Тогда имеют место следующие сплетающие соотношения:*

$$Y\eta = \pi\Gamma_1, \qquad (I - Y)\eta' = \pi\Gamma_1', \qquad \eta'^*Y = \Gamma_2'\pi_*^*, \qquad \eta^*(I - Y) = \Gamma_2\pi_*^*. \tag{16}$$

Доказательство. Проверим первое равенство:

$$Y\eta = (\pi\pi^* + \tau_*\tau_*^*)Y\eta = \pi\pi^*Y\eta = \pi\Gamma_1 .$$

Здесь использовано тождество $\tau_*^*Y\eta = 0$ из следствия 1. Другие соотношения доказываются аналогично. •

Наряду с рассмотренными H^∞-функциями Γ, определяемыми подъёмом Y проектора $\mathcal{P}$ по формулам (14)–(15), естественно рассмотреть следующие четыре L^∞-функции:

$$V_1 \stackrel{\text{def}}{=} \tau_1^*(I - Y)\tau, \qquad V_1' \stackrel{\text{def}}{=} \tau_1'^*Y\tau, \qquad V_{*2} \stackrel{\text{def}}{=} \pi_*^*Y\tau_{*2}, \qquad V_{*2}' \stackrel{\text{def}}{=} \pi_*^*(I - Y)\tau_{*2}', \tag{17}$$

поскольку для них имеют место соотношения, аналогичные соотношениям (16), но в которых вместо вложений π и η участвуют вложения τ. А именно, справедлива следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть T — вполне неунитарное сжатие в гильбертовом пространстве H, и $H = H_1 \dotplus H_1'$, где $H_1, H_1' \in \operatorname{Lat} T$. Пусть $\mathcal{P}$ — проектор на H_1' параллельно подпространству H_1 и $Y : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — подъём оператора $\mathcal{P}$. Пусть оператор-функции V определены равенствами* (17). *Тогда справедливы следующие сплетающие соотношения:*

$$Y\tau = \tau_1'V_1', \qquad (I - Y)\tau = \tau_1 V_1 , \qquad \tau_*^*Y = V_{*2}\tau_{*2}^*, \qquad \tau_*^*(I - Y) = V_{*2}'\tau_{*2}'^*. \tag{18}$$

Доказательство в точности повторяет доказательство леммы 4. Единственное отличие состоит в том, чтобы вместо представления единичного оператора в виде $I = \pi\pi^* + \tau_*\tau_*^*$ использовать разложение $I = \eta\eta^* + \tau_1\tau_1^* + \tau_{*2}\tau_{*2}^*$. •

Теперь всё готово для доказательства леммы 1.

Доказательство леммы 1. Соотношения (13) содержатся в следствиях 1 и 2. Для доказательства равенств (11) зададим функции Γ_1, Γ_2, Γ_1' и Γ_2' формулами (14)–(15). Тогда, используя лемму 4, получим

$$\Theta_1\Gamma_1 + \Gamma_2\Theta_2 = \eta^*\pi\Gamma_1 + \Gamma_2\pi_*^*\eta = \eta^*Y\eta + \eta^*(I-Y)\eta = I,$$
$$\Theta_1'\Gamma_1' + \Gamma_2'\Theta_2' = \eta'^*\pi\Gamma_1' + \Gamma_2'\pi_*^*\eta' = \eta'^*(I-Y)\eta + \eta'^*Y\eta' = I.$$

Таким же образом получаем

$$\Theta_1\Gamma_1' = \eta^*\pi\Gamma_1' = \eta^*(I-Y)\eta' = \Gamma_2'\pi_*^*\eta = \Gamma_2'\Theta_2,$$
$$\Theta_1'\Gamma_1 = \eta'^*\pi\Gamma_1 = \eta'^*Y\eta = \Gamma_2'\pi_*^*\eta = \Gamma_2'\Theta_2.$$

Доказательство остальных равенств чуть более сложно. Прежде всего так как $Y\tau_1 = 0$, то

$$Y\eta\eta^* = Y(I - \tau_1\tau_1^* - \tau_{*2}\tau_{*2}^*) = Y(\pi\pi^* + \tau_{*1}\tau_{*1}^*)$$

и, следовательно,

$$\Gamma_1\eta^* = \pi^*Y\eta\eta^* = \pi^*Y(\pi\pi^* + \tau_{*1}\tau_{*1}^*).$$

Аналогично $\Gamma_1'\eta'^* = \pi^*(I-Y)(\pi\pi^* + \tau_{*1}'\tau_{*1}'^*)$ и, следовательно,

$$\Gamma_1\eta^* + \Gamma_1'\eta'^* = \pi^* + \pi^*\left[Y\tau_{*1}\tau_{*1}^* + (I-Y)\tau_{*1}'\tau_{*1}'^*\right].$$

Поэтому имеем

$$\Gamma_1\Theta_1 + \Gamma_1'\Theta_1' = \Gamma_1\eta^*\pi + \Gamma_1'\eta'^*\pi = \pi^*\pi = I.$$

Таким же образом получаем тождество $\Gamma_2\Theta_2 + \Gamma_2'\Theta_2' = I$.

И наконец, используя тождества (13), получаем

$$Y(I-Y) = Y(\eta\eta^* + \tau_1\tau_1^* + \tau_{*2}\tau_{*2}^*)(I-Y) = \pi\Gamma_1\Gamma_2\pi_*^*,$$
$$(I-Y)Y = (I-Y)(\eta'\eta'^* + \tau_1'\tau_1'^* + \tau_{*2}'\tau_{*2}'^*)Y = \pi\Gamma_1'\Gamma_2'\pi_*^*,$$

т.е. $\Gamma_1\Gamma_2 = \Gamma_1'\Gamma_2' = \pi^*Y(I-Y)\pi_*$.

Для равенств (12) зададим функции V_1, V_1', V_{*2} и V_{*2}' формулами (17). Тогда, используя лемму 5, получаем

$$\tau = \tau_1V_1 + \tau_1'V_1', \qquad \tau_*^* = V_{*2}\tau_{*2}^* + V_{*2}'\tau_{*2}'^*,$$

и, следовательно,

$$Z_1^*V_1 + Z_1'^*V_1' = I, \qquad V_{*2}Z_{*2} + V_{*2}'Z_{*2}' = I.$$

Далее, пользуясь свойствами (13), получим

$$V_1\, Z_1^* = \tau_1^*(I-Y)\tau\tau^*\tau_1 = \tau_1^*(I-Y)\tau_1 = \tau_1^*\tau_1 = I\,,$$
$$V_1\, Z_1'^* = \tau_1^*(I-Y)\tau\tau^*\tau_1' = \tau_1^*(I-Y)\tau_1' = 0\,.$$

Подобным же образом можно проверить и все прочие равенства (12). •

Выпишем теперь параметры подъёма Y проектора $\mathcal{P}$ в терминах функций Γ и V, определяемых формулами (14), (15) и (17).

Лемма 6. *Пусть T — вполне неунитарное сжатие в гильбертовом пространстве H, и $H = H_1 \dot{+} H_1'$, где $H_1, H_1' \in \operatorname{Lat} T$. Пусть $\mathcal{P}$ — проектор на подпространство H_1' параллельно подпространству H_1. Тогда параметры подъёма Y оператора $\mathcal{P}$ могут быть описаны следующими формулами:*

$$A = \Gamma_1\Theta_1, \qquad A_* = I - \Theta_2\Gamma_2, \tag{19}$$
$$B = \Delta\Gamma_1\Delta_{*1}Z_{*1} - Z_2^*(\Delta_2\Gamma_2\Delta_{*2} + \Theta_2^*)Z_{*2} + Z_1^*V_{1*2}Z_{*2}, \tag{20}$$
$$C = \left[Z_2^* + Z_1^*(\Delta_1\Gamma_1\Delta_2 - V_{1*2}\Theta_2)\right]Z_2, \quad C_* = \left[Z_{*2}^* + Z_{*1}^*(\Delta_{*1}\Gamma_2\Delta_{*2} - \Theta_1 V_{1*2})\right]Z_{*2}. \tag{21}$$

Здесь A, A_* и B — параметры из теоремы о подъёме, C и C_* — два вспомогательных мультипликативных параметра, определяемые формулами: $C \overset{\text{def}}{=} \tau^*Y\tau = \Delta A\Delta - B\Theta$ и $C_* \overset{\text{def}}{=} \tau_*^*Y\tau_* = \Delta_*A_*\Delta_* - \Theta B$. Как и прежде, аналитические функции Γ_1 и Γ_2 задаются формулами (14)–(15) и

$$V_{1*2} \overset{\text{def}}{=} \tau_1^*Y\tau_{*2}\,.$$

Доказательство. Так как $Y\tau_1 = 0$ и $\tau_{*2}^*\pi = 0$, то

$$A \overset{\text{def}}{=} \pi^*Y\pi = \pi^*Y(\eta\eta^* + \tau_1\tau_1^* + \tau_{*2}\tau_{*2}^*)\pi = \pi^*Y\eta\eta^*\pi = \Gamma_1\Theta_1\,.$$

Используя тождества $\tau_{*2}^*(I-Y) = 0$ и $\pi_*^*\tau_1 = 0$, аналогично получаем

$$\begin{aligned} A_* &\overset{\text{def}}{=} \pi_*^*Y\pi_* = I - \pi_*^*(I-Y)\pi_* = I - \pi_*^*(\eta\eta^* + \tau_1\tau_1^* + \tau_{*2}\tau_{*2}^*)(I-Y)\pi_* \\ &= I - \pi_*^*\eta\eta^*(I-Y)\pi_* = I - \Theta_2\Gamma_2\,. \end{aligned}$$

Теперь используем тождества

$$\tau = \tau_1 Z_1 + \tau_2 Z_2\,, \qquad \tau_* = \tau_{*1}Z_{*1} + \tau_{*2}Z_{*2}\,,$$

чтобы получить формулу для B

$$\begin{aligned} B &= \tau^*Y\tau_* = \tau^*Y\tau_{*1}Z_{*1} + \tau^*Y\tau_{*2}Z_{*2} \\ &= \tau^*Y\eta\eta^*\tau_{*1}Z_{*1} + Z_1^*\tau_1^*Y\tau_{*2}Z_{*2} + Z_2^*\tau_2^*Y\tau_{*2}Z_{*2} \\ &= \tau^*\pi\pi^*Y\eta\eta^*\tau_{*1}Z_{*1} + Z_1^*V_{1*2}Z_{*2} + Z_2^*\tau_2^*\tau_{*2}Z_{*2} - Z_2^*\tau_2^*(I-Y)\tau_{*2}Z_{*2} \\ &= \Delta\Gamma_1\Delta_{*1}Z_{*1} + Z_1^*V_{1*2}Z_{*2} - Z_2^*\Theta_2^*Z_{*2} - Z_2^*\tau_2^*\eta\eta^*(I-Y)\pi_*\pi_*^*\tau_{*2}Z_{*2} \\ &= \Delta\Gamma_1\Delta_{*1}Z_{*1} + Z_1^*V_{1*2}Z_{*2} - Z_2^*(\Theta_2^* + \Delta_2\Gamma_2\Delta_{*2})Z_{*2}\,. \end{aligned}$$

Чтобы доказать формулу для C, заметим, что $\tau_2^*Y\tau_2 = I$. Действительно, так как $\eta^*(I-Y) = \Gamma_2\pi_*^*$ (см. (16)), то $\tau_2^*(I-Y) = \tau_2^*\eta\eta^*(I-Y) = \Delta_2\Gamma_2\pi_*^*$, т.е. $\tau_2^*(I-Y)\tau_2 = 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} C = \tau^*Y\tau &= (Z_1^*\tau_1^* + Z_2^*\tau_2^*)Y\tau_2 Z_2 \\ &= Z_1^*\tau_1^*Y(\eta\eta^* + \tau_{*2}\tau_{*2}^*)\tau_2 Z_2 + Z_2^* Z_2 \\ &= Z_1^*\tau_1^*\pi\Gamma_1\eta^*\tau_2 Z_2 + Z_1^* V_{1*2}\tau_{*2}^*\tau_2 Z_2 + Z_2^* Z_2 \\ &= Z_1^*\Delta_1\Gamma_1\Delta_2 Z_2 - Z_1^* V_{1*2}\Theta_2 Z_2 + Z_2^* Z_2 \,. \end{aligned}$$

Аналогично проверяем формулу для C_*. •

Сравнивая лемму 6 с теоремой Теодореску [4], видим, что дополняющие подпространства могут быть параметризованы функциями V_{1*2}, пробегающими пространство $L^\infty(\Delta_{*2}E_* \to \Delta_1 E)$. А именно справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть T — вполне неунитарное сжатие в гильбертовом пространстве H, и H_1 — инвариантное подпространство, отвечающее регулярной факторизации характеристической функции $\Theta = \Theta_2\Theta_1$. Тогда существует другое T-инвариантное подпространство H_1' такое, что $H_1 \dotplus H_1' = H$, в том и только в том случае, когда существуют такие функции $\Gamma_1 \in H^\infty(F \to E)$ и $\Gamma_2 \in H^\infty(E_* \to F)$, что*

$$\Theta_1\Gamma_1 + \Gamma_2\Theta_2 = I. \tag{22}$$

Если выполнено соотношение (22), *то для каждой $L^\infty(\Delta_{*2}E_* \to \Delta_1 E)$-функции V_{1*2} формулы* (19)–(20) *и* (3)–(4) *задают проектор $\mathcal{P} = P_H Y|H$ на некоторое T-инвариантное подпространство H_1' параллельно подпространству H_1.*

Доказательство. Существование функций Γ_1 и Γ_2, удовлетворяющих равенству (22), было доказано в лемме 1. Следовательно, для доказательства теоремы нам нужно проверить, что оператор $\mathcal{P} = P_H Y|H$, где Y определён формулами (19)–(20) и (3)–(4), является проектором (т.е. что $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$), удовлетворяющим условиям $\mathcal{P}|H_1 = 0$ и $(I - \mathcal{P})H \subset H_1$. Согласно теореме о подъёме, оператор $\mathcal{P}$ является проектором тогда и только тогда, когда существует такая оператор-функция $\Gamma \in H^\infty(E_* \to E)$, что

$$Y - Y^2 = \pi\Gamma\pi_*^* \,. \tag{23}$$

В силу леммы 2 равенство $\mathcal{P}|H_1 = 0$ имеет место в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия:

$$\tau_*^* Y\eta = 0\,, \tag{24}$$

$$Y\tau_1 = 0\,, \tag{25}$$

$$\pi^* Y\eta \in H^\infty(F \to E)\,, \tag{26}$$

а по лемме 3 вложение $(I - \mathcal{P})H \subset H_1$ равносильно выполнению условий

$$\tau_{*2}^*(I - Y) = 0\,, \tag{27}$$

$$\eta^*(I - Y)\tau = 0\,, \tag{28}$$

$$\eta^*(I - Y)\pi_* \in H^\infty(E_* \to F)\,. \tag{29}$$

Начнём с вычисления оператора $Y\eta$:

$$\begin{aligned} Y\eta &= (\pi_* A_* \pi_*^* + \tau\Delta A\pi^* + \tau B\tau_*^*)\eta = \pi_* A_* \Theta_2 + \tau\Delta A\Theta_1^* + \tau B Z_{*1}^* \Delta_{*1} \\ &= \pi_*(I - \Theta_2\Gamma_2)\Theta_2 + \tau\Delta\Gamma_1\Theta_1\Theta_1^* + \tau\Delta\Gamma_1\Delta_{*1}^2 = \pi_*\Theta_2\Theta_1\Gamma_1 + \tau\Delta\Gamma_1 = \pi\Gamma_1, \end{aligned} \tag{30}$$

что влечёт тождество (24) и включение (26). Проверим теперь тождество (25):

$$\begin{aligned} Y\tau_1 &= (\pi_* A_* \pi_*^* + \tau\Delta A\pi^* + \tau B\tau_*^*)\tau_1 = \tau\Delta A\Delta_1 - \tau B Z_{*1}^*\Theta_1 \\ &= \tau\Delta\Gamma_1\Theta_1\Delta_1 - \tau\Delta\Gamma_1\Delta_{*1}\Theta_1 = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Для проверки остальных условий вычислим представление оператора Y в следующей транскрипции функциональной модели:

$$\mathcal{H} = L^2(\Delta_1 E) \oplus L^2(F) \oplus L^2(\Delta_{*2} E_*),$$
$$\pi = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Theta_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \pi_* = \begin{pmatrix} 0 \\ \Theta_2^* \\ \Delta_{*2} \end{pmatrix}.$$

В этой модели

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau_{*2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix}.$$

Тогда равенство (31) показывает, что первый столбец матрицы Y является нулевым, второй задаётся тождеством (30). Вычислим третий столбец:

$$\begin{aligned} Y\tau_{*2} &= (\pi_* A_* \pi_*^* + \tau\Delta A\pi^* + \tau B\tau_*^*)\tau_{*2} = \pi_* A_* \Delta_{*2} + \tau B Z_{*2}^* \\ &= \pi_*(I - \Theta_2\Gamma_2)\Delta_{*2} - \tau_2(\Delta_2\Gamma_2\Delta_{*2} + \Theta_2^*) + \tau_1 V_{1*2} \\ &= (\pi_*\Delta_{*2} - \tau_2\Theta_2^*) - (\pi_*\Theta_2 + \tau_2\Delta_2)\Gamma_2\Delta_{*2} + \tau_1 V_{1*2} \\ &= \tau_{*2} - \eta\Gamma_2\Delta_{*2} + \tau_1 V_{1*2}. \end{aligned}$$

Следовательно, оператор Y имеет следующее матричное представление:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_1\Gamma_1 & V_{1*2} \\ 0 & \Theta_1\Gamma_1 & -\Gamma_2\Delta_{*2} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

откуда получаем

$$Y - Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_1\Gamma_1\Gamma_2\Theta_2 & \Delta_1\Gamma_1\Gamma_2\Delta_{*2} \\ 0 & \Theta_1\Gamma_1\Gamma_2\Theta_2 & \Theta_1\Gamma_1\Gamma_2\Delta_{*2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Theta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Gamma_1\Gamma_2 (0, \;\; \Theta_2, \;\; \Delta_{*2}) = \pi\Gamma_1\Gamma_2\pi_*^*,$$

т.е. равенство (23) с $\Gamma = \Gamma_1\Gamma_2$.

Тождество (27) очевидно. И, поскольку

$$\tau = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \Delta_2 Z_2 \\ -\Theta_2 Z_2 \end{pmatrix}, \qquad \pi_* = \begin{pmatrix} 0 \\ \Theta_2^* \\ \Delta_{*2} \end{pmatrix},$$

из равенства

$$\eta^*(I - Y) = (\,0, \quad \Gamma_2\Theta_2, \quad \Gamma_2\Delta_{*2}\,)$$

вытекают соотношения (28) и (29). •

И теперь докажем основной результат статьи.

Доказательство теоремы 1. Существование функций Γ_1, Γ_1' и V_{*2}, V_{*2}', удовлетворяющих соотношениям (9) и (10), было доказано в лемме 1. Следовательно, для доказательства теоремы нужно построить проектор $\mathcal{P} = P_H Y|H$ на подпространство H_1' параллельно подпространству H_1, используя заданные функции Γ_1, Γ_1' и V_{*2}, V_{*2}', удовлетворяющие тождествам (9) и (10).

Положим

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} I - \pi(\Gamma_1\eta^* + \Gamma_1'\eta'^*),$$

и возьмём

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} \pi\Gamma_1\eta^* + \gamma\tau_* V_{*2}\tau_{*2}^*. \tag{32}$$

Прежде всего отметим, что $\gamma\pi = 0$. Действительно, из тождества (9) следует, что

$$\gamma\pi = \pi - \pi(\Gamma_1\Theta_1 + \Gamma_1'\Theta_1') = 0.$$

Как следствие заключаем, что определение (32) обладает естественной симметрией относительно H_1 и H_1', а именно

$$\begin{aligned} I - Y &= I - \pi\Gamma_1\eta^* - \gamma\tau_* V_{*2}\tau_{*2}^* = \pi\Gamma_1'\eta'^* + \gamma - \gamma\tau_* V_{*2}\tau_{*2}^* \\ &= \pi\Gamma_1'\eta'^* + \gamma\tau_*\tau_*^* - \gamma\tau_* V_{*2}\tau_{*2}^*\tau_*\tau_*^* = \pi\Gamma_1'\eta'^* + \gamma\tau_*(I - V_{*2}Z_{*2})\tau_*^* \\ &= \pi\Gamma_1'\eta'^* + \gamma\tau_* V_{*2}' Z_{*2}'\tau_*^* = \pi\Gamma_1'\eta'^* + \gamma\tau_* V_{*2}'\tau_{*2}'^*. \end{aligned} \tag{33}$$

Утверждение $P_H Y|H = \mathcal{P}_{H_1'\|H_1}$ будет вытекать из следующих двух включений:

$$Y(H_1 \oplus G) \subset G, \qquad (I - Y)(H_1' \oplus G) \subset G,$$

которые равносильны включениям

$$Y^*(H \oplus G_*) \subset H_2 \oplus G_*, \qquad (I - Y^*)(H \oplus G_*) \subset H_2' \oplus G_*.$$

Возьмём $x \in H \oplus G_*$ и сопряжённые с операторами (32) и (33):

$$\begin{aligned} Y^*x &= \eta\Gamma_1^*\pi^*x + \tau_{*2}V_{*2}^*\tau_*^*\gamma^*x \in \eta H_-^2(F) \oplus \tau_{*2}L^2(\Delta_{*2}E_*) = H_2 \oplus G_*, \\ (I - Y^*)x &= \eta'\Gamma_1'^*\pi^*x + \tau_{*2}'V_{*2}'^*\tau_*^*\gamma^*x \in \eta' H_-^2(F') \oplus \tau_{*2}L^2(\Delta_{*2}'E_*) = H_2' \oplus G_*. \quad \bullet \end{aligned}$$

Замечание. Отметим, что если, начиная с Γ_1 и Γ_2 в теореме 2 или с Γ_1, Γ_1' и V_{*2}, V_{*2}' в теореме 1, построить оператор Y и затем, используя определения (14), (15) и (17), зададим "новые" Γ и V, то окажется, что они совпадают с первоначально заданными. Действительно, если оператор Y определён формулой (32), то $\pi^* Y\eta = \Gamma_1$ и $\tau_*^* Y = \tau_*^*\gamma\tau_* V_{*2}\tau_{*2}^* = V_{*2}\tau_{*2}^*$. А из формулы (33) вытекают тождества $\pi^*(I-Y)\eta' = \Gamma_1'$ и $\tau_*^*(I-Y) = \tau_*^*\gamma\tau_* V_{*2}'\tau_{*2}'^* = V_{*2}'\tau_{*2}'^*$. И если теперь использовать выражения (19) и (20) для параметров, задающих оператор Y с помощью формулы (3) (или, что то же самое, с помощью формулы (4)), то получим

$$
\begin{aligned}
\pi^* Y\eta &= \pi^*\pi_* A_*\pi_*^*\eta + \pi^*\tau\Delta A\pi^*\eta + \pi^*\tau B\tau_*^*\eta \\
&= \Theta^*(I-\Theta_2\Gamma_2)\Theta_2 + \Delta^2\Gamma_1\Theta_1\Theta_1^* + \Delta B Z_{*1}^*\Delta_{*1} \\
&= \Theta^*\Theta_2(I-\Gamma_2\Theta_2) + \Delta^2\Gamma_1\Theta_1\Theta_1^* + \Delta^2\Gamma_{*1}\Delta_{*1}^2 = \Theta^*\Theta_2\Theta_1\Gamma_1 + \Delta^2\Gamma_1 = \Gamma_1
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
\eta^*(I-Y)\pi_* &= \Theta_2^* - \eta^*\pi_* A_*\pi_*^*\pi_* - \eta^*\tau\Delta A\pi^*\pi_* - \eta^*\tau B\tau_*^*\pi_* \\
&= \Theta_2^* - \Theta_2^*(I-\Theta_2\Gamma_2) - \Delta_2 Z_2\Delta\Gamma_1\Theta_1\Theta^* - \Delta_2 Z_2 B\Delta_* \\
&= \Theta_2^*\Theta_2\Gamma_2 - \Delta_2^2\Theta_1\Gamma_1\Theta_1\Theta^* - \Delta_2\left[\Delta_2\Theta_1\Gamma_1\Delta_{*1}Z_{*1}\right. \\
&\qquad\qquad\left. - (\Delta_2\Gamma_2\Delta_{*2} + \Theta_2^*)Z_{*2}\right]\Delta_* \\
&= \Theta_2^*\Theta_2\Gamma_2 - \Delta_2^2\Theta_1\Gamma_1\Theta_1\Theta_1^*\Theta_2^* - \Delta_2^2\Theta_1\Gamma_1\Delta_{*1}^2\Theta_2^* + \Delta_2^2\Gamma_2\Delta_{*2}^2 + \Delta_2\Theta_2^*\Delta_{*2} \\
&= \Theta_2^*\Theta_2\Gamma_2 - \Delta_2^2\Theta_1\Gamma_1\Theta_2^* + \Delta_2^2\Gamma_2\Delta_{*2}^2 + \Delta_2^2\Theta_2^* \\
&= \Theta_2^*\Theta_2\Gamma_2 + \Delta_2^2\Gamma_2\Theta_2\Theta_2^* + \Delta_2^2\Gamma_2\Delta_{*2}^2 = \Gamma_2 .
\end{aligned}
$$

Список литературы

[1] Никольский Н. К., *Лекции об операторе сдвига*, Наука, М., 1980.

[2] Fuhrmann P. A., *Linear systems and operators in Hilbert space*, McGraw-Hill, New York, 1981.

[3] Treil S. R., *Geometric methods in spectral theory of vector-valued functions: some recent results*, Operator Theory: Advances and Appl., vol. 42, 1989, pp. 209–280.

[4] Teodorescu R., *Sur les décomposition directes des contractions de l'espace de Hilbert*, J. Funct. Anal. **18** (1975), no. 4, 414–428.

[5] Сёкефальви-Надь Б., Фояш Ч., *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1971.

[6] Nikolskii N. K., Vasyunin V. I., *A unified approach to function models and the transcription problem*, Operator Theory: Advances and Appl., vol. 41, 1989, pp. 405–434.

[7] Васюнин В. И., *Две классические теоремы о функциональной модели в бескоординатном изложении*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ **178** (1989), 5-22.

Поступило 20 июня 1993 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН
191011, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27