В. Г. Яхно, И. З. Меражов, Некоторые прямые задачи и одномерная обратная задача электроупругости для «медленных» волн, *Матем. тр.*, 1999, том 2, номер 2, 148–213

УДК 517.951

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
1999, том 2, № 2, 148–213

НЕКОТОРЫЕ ПРЯМЫЕ ЗАДАЧИ И ОДНОМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ «МЕДЛЕННЫХ» ВОЛН

В. Г. Яхно, И. З. Меражжов

Основной предмет исследования составляют прямые (начально-краевые) задачи со специальными граничными условиями и обратная задача, связанная с определением модулей упругости и пьезоэлектрического модуля электроупругой среды кубической структуры по некоторой информации о решении прямых задач. Предполагается, что определяемые модули суть функции только переменной глубины. Основными результатами исследований настоящей работы являются теоремы существования и единственности решения рассматриваемых прямых и обратной задач, а также теорема об оценке устойчивости решения обратной задачи.

Ключевые слова и фразы: электромагнитоупругость, электроупругость, модули упругости, пьезоэлектрические модули, прямая задача, обратная задача, интегральные уравнения Вольтерра второго рода.

Введение

Современное развитие радиотехники, автоматики, вычислительной и измерительной техники тесно связано с применением пьезоэлектриков. Основное внимание исследователей к таким материалам, как пьезоэлектрики, обусловлено явлением пьезоэффекта, которое состоит в том, что при деформировании пьезоэлектрических тел в них появляются электрические заряды, пропорциональные деформациям. Термодинамический анализ показывает существование обратного эффекта, который проявляется в возникновении механических напряжений в пьезоэлектрике при действии электрического поля.

Математические модели процессов, происходящих в диэлектрических телах, описываются специальной системой дифференциальных уравнений электромагнитоупругости. Вывод этой системы дифференциальных уравнений и некоторые начально-краевые задачи для нее описаны в монографиях М. К. Балакирева, И. А. Гилинского [2], Э. Дьелесан, Д. Руайе [5], В. З. Партона, Б. А. Кузнецова [7] и других авторов (см. цитируемую в указанных монографиях литературу).

Постановка каждой начально-краевой задачи, далее называемой *прямой задачей*, предполагает задание некоторого числа функций. Часть этих функций определяет дифференциальное уравнение (например, коэффициенты линейного уравнения), другая часть — краевые условия. В результате решения прямой задачи заданному набору функций ставится в соответствие новая функция — решение краевой задачи. Тем самым строится некоторый оператор, определенный на данных прямой задачи. Если некоторые из функций, которые принято задавать в прямой задаче, неизвестны и вместо них дана некоторая дополнительная информация о решении прямой задачи, то подобную задачу называют *обратной задачей* математической физики.

Первые исследования по обратным задачам электромагнитоупругости были проведены в работе [4]. В настоящее время исследования обратных задач для системы электромагнитоупругости ведутся А. В. Авдеевым, Э. В. Горюновым [1], И. З. Меражовым, В. Г. Яхно [6, 17, 18], В. Б. Сурневым [12], М. М. Лаврентьевым (мл.), В. И. Прийменко [14], А. Лоренци [15, 16], Б. Г. Михайленко, О. Н. Соболевой [19], В. Г. Романовым [11].

Целью настоящей работы является исследование новой постановки обратной задачи для системы дифференциальных уравнений электромагнитоупругости. При этом будут изучены такие прямые задачи, которые необходимы для исследования обратной задачи.

Полная система дифференциальных уравнений электромагнитоупругости состоит из следующих уравнений:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{I}$$

$$\mathrm{rot} H = \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}, \quad \mathrm{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{II}$$

$$\mathrm{div} D = 0, \quad \mathrm{div} H = 0. \tag{III}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\rho = \rho(x)$ — плотность неоднородной среды, $\rho(x) > 0$, $u = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор смещений с компонентами $u_i = u_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3$, $E = (E_1, E_2, E_3)$ и $H = (H_1, H_2, H_3)$ — векторы электрической и магнитной напряженности с компонентами $E_i = E_i(x, t)$, $H_i = H_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3$, $D = (D_1, D_2, D_3)$ — вектор электрической напряженности с компонентами $D_i = D_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3$, $B = (B_1, B_2, B_3)$ — вектор магнитной индукции с компонентами $B_i = B_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3$.

Для тензора напряжений $T_{ij}(x, t)$ и компонент электрической и магнитной индукции имеют место представления

$$T_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} c_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \sum_{k=1}^{3} e_{kij}E_k, \quad i = 1,2,3, \quad j = 1,2,3,$$

$$D_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{jk}E_k + \sum_{k,l=1}^{3} e_{jkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \qquad j = 1,2,3, \quad B = \mu H,$$

где $c_{ijkl} = c_{ijkl}(x)$ — модули упругости, $e_{kij} = e_{kij}(x)$ — пьезоэлектрические модули, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x)$ — диэлектрические модули, $\mu = \mu(x)$ — магнитная проницаемость.

Далее аналогично работе [5] полагаем $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}$, $e_{kij} = e_{kji}$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

Система (I)–(III) описывает распространение связанных электромагнитоупругих волн. Связь между упругими и электромагнитными процессами определяется пьезоэлектрическими модулями среды.

В общем случае уравнения (I)–(III) связывают три ветви «медленных» упругих волн с двумя ветвями «быстрых» электромагнитных волн. Однако если мы интересуемся только распространением медленных волн и пренебрегаем при этом малыми поправками s/c, s/c^2 (здесь s — скорость распространения упругих волн, c — скорость света), то в уравнениях (I)–(III) скорость света c можно формально положить равной бесконечности. В этом случае система уравнений (I)–(III) распадается на две группы. Уравнения (I) вместе с квазистатистическими уравнениями

$$\mathrm{div} D = 0, \quad \mathrm{rot} E = 0, \quad E = -\nabla\varphi, \tag{IV}$$

образуют первую группу, а вторую группу составляют уравнения

$$\mathrm{rot} H = 0, \quad \mathrm{div} H = 0,$$

определяющие магнитное поле при $c = \infty$. Из первого уравнения второй группы следует, что $H = -\nabla\varphi_m$. Подстановка этого соотношения во второе уравнение дает равенство $\Delta\varphi_m = 0$.

Симметричность тензора напряжений уменьшает число независимых модулей упругости с 81 до 21. Если принять, что $c_{\alpha\beta} = c_{ijkl}$, где $\alpha = (ij)$ и $\beta = (kl)$ в соответствии с обозначениями $(11) \to 1$, $(22) \to 2$, $(33) \to 3$, $(23) = (32) \to 4$, $(13) = (31) \to 5$, $(12) = (21) \to 6$, то матрице независимых модулей упругости можно придать вид симметрической матрицы порядка 6×6, поскольку в паре индексов (i, j) порядок не играет роли и существует только шесть различных парных комбинаций.

Данная работа связана с исследованием прямых и обратных задач для системы дифференциальных уравнений электроупругости (I), (IV).

Полный набор характеристик электромагнитоупругой среды дается в литературе (см., например, [5]) в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} c_{\alpha\beta}(6\times 6) & e_{\alpha k}(6\times 3) \\ e_{k\alpha}(3\times 6) & \varepsilon_{ij}(3\times 3) \end{pmatrix}.$$

В настоящей работе рассматриваются анизотропные среды кубической структуры, т. е. матрица характеристик среды имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} c_{44} & & 0 \\ & c_{44} & \\ 0 & & c_{44} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} e_{14} & & 0 \\ & e_{14} & \\ 0 & & e_{14} \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} e_{14} & & 0 \\ & e_{14} & \\ 0 & & e_{14} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \varepsilon & & 0 \\ & \varepsilon & \\ 0 & & \varepsilon \end{bmatrix} \end{pmatrix}.$$

§ 1. Прямые задачи и результаты их исследования

1.1. *Постановка прямых задач и теорема существования и единственности их решения.* Рассмотрим в области $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, $x_3 > 0$ систему дифференциальных уравнений электроупругости

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3; \quad x_3 > 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} D = 0, \quad \operatorname{rot} E = 0 \tag{2}$$

со следующими начальными и граничными условиями:

$$u_i\big|_{t<0} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3}$$

$$E_i\big|_{t<0} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{4}$$

$$T_{i3}\big|_{x_3=+0} = f_i(x_1, x_2, t), \quad i = 1, 2, 3, \tag{5}$$

$$\varphi\big|_{x_3=+0} = g(x_1, x_2, t), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=+0} = 0. \tag{6}$$

Равенства (1)–(6) для анизотропных сред кубической структуры могут быть переписаны в следующем виде:

$$\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) + c_{12}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + c_{44}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + c_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}$$
$$+ (c_{12}+c_{44})\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(e_{14}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) + e_{14}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_3}, \tag{7}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + c_{12}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + c_{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + c_{11}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}$$
$$+ (c_{12}+c_{44})\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(e_{14}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) + e_{14}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3}, \tag{8}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{11}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) + c_{44}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + c_{44}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + c_{44}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + c_{44}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}$$
$$+ e_{14}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + e_{14}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(e_{14}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\varepsilon\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(e_{14}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(e_{14}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(e_{14}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\varepsilon\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(e_{14}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(e_{14}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\varepsilon\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right) = 0, \tag{10}$$

$$\left.\left(c_{44}\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + c_{44}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + e_{14}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)\right|_{x_3=+0} = f_1(x_1, x_2, t), \tag{11}$$

$$\left.\left(c_{44}\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + c_{44}\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + e_{14}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)\right|_{x_3=+0} = f_2(x_1, x_2, t), \tag{12}$$

$$\left.\left(c_{12}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + c_{11}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\right|_{x_3=+0} = f_3(x_1, x_2, t), \tag{13}$$

$$u_i\big|_{t<0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|_{t<0} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{14}$$

$$\varphi\big|_{x_3=+0} = g(x_1, x_2, t), \quad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right|_{x_3=+0} = 0. \tag{15}$$

Далее предполагаем, что модули упругости c_{11}, c_{12}, c_{44}, плотность ρ, пьезоэлектрический модуль e_{14} и диэлектрический модуль ε являются функциями только переменной x_3, вектор-функция $(c_{11}, c_{12}, c_{44}, e_{14})$ принадлежит классу Λ,

$$\begin{aligned}\Lambda = \Big\{ \big(c_{11}(x_3), c_{12}(x_3), c_{44}(x_3), e_{14}(x_3)\big) :\\ c_{44} > 0,\ c_{11} > c_{12},\ c_{11} + 2c_{12} > 0,\ c_{11}'(+0) = 0,\ c_{44}'(+0) = 0,\\ c_{11}, c_{44} \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R}_+),\ c_{12} \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+),\ e_{14} \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}_+)\Big\}, \quad \mathbb{R}_+ = [0, \infty),\end{aligned}$$

и ρ, ε — положительные функции из класса $\mathbf{C}^2(\mathbb{R})$, причем $\rho'(+0) = 0$.

Рассмотрим следующие прямые задачи для системы дифференциальных уравнений электроупругости (7)–(15).

Пусть ρ, ε — заданные положительные функции из класса $\mathbf{C}^2(\mathbb{R})$ и $\big(c_{11}(x_3), c_{12}(x_3), c_{44}(x_3), e_{14}(x_3)\big)$ — заданная вектор-функция из класса Λ.

Прямая задача I. *Пусть* $f_j = -\frac{1}{2}\theta(t)e^{i\nu x_1}$, $j = 1, 2, 3$, *где* ν — *параметр,* $g \equiv 0$. *Найти вектор-функцию* (u, φ), *удовлетворяющую равенствам* (7)–(15).

Решение прямой задачи I будем далее обозначать через $(u^{\mathrm{I}}, \varphi^{\mathrm{I}})$.

Прямая задача II. *Пусть* $f_j \equiv 0$, $j = 1, 2, 3$, $g = \theta(t)e^{i\nu x_1}$, *где* ν — *параметр. Найти вектор-функцию* (u, φ), *удовлетворяющую равенствам* (7)–(15).

Решение прямой задачи II будем обозначать через $\big(u^{\mathrm{II}}, \varphi^{\mathrm{II}}\big)$.

Имеет место следующая теорема о существовании и единственности решения прямых задач I и II.

Теорема 1. *Пусть* T — *фиксированное положительное число. Тогда при сделанных выше предположениях решения прямых задач* I *и* II *существуют и единственны в классе вектор-функций* $\mathcal{K}(T)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(T) = \Big\{ \big(u, \varphi\big) : (u_1, u_2, u_3, \varphi),\ u_j = e^{i\nu x_1} U_j(x_3, t, \nu),\ \varphi = e^{i\nu x_1}\phi(x_3, t, \nu),\\ U_j, \phi \in \mathbf{C}^1\big(\mathbb{R}; \mathbf{C}\big(\mathcal{B}(T)\big)\big),\ j = 1, 2, 3\Big\},\\ \mathcal{B}(T) = \big\{(x_3, t) : x_3 \geq 0,\ 0 \leq t \leq T\big\}.\end{aligned}$$

Более того, для решений $(u^{\mathrm{I}}, \varphi^{\mathrm{I}})$, $(u^{\mathrm{II}}, \varphi^{\mathrm{II}})$ *корректно определены следы* $u^{\mathrm{I}}(0, 0, t, 0)$, $u^{\mathrm{II}}(0, 0, t, 0)$, $\frac{\partial}{\partial\nu}u^{\mathrm{I}}(0, 0, t, 0)$, $\frac{\partial}{\partial\nu}u^{\mathrm{II}}(0, 0, t, 0)$ *в* $\mathbf{C}^1(\mathbb{R})$.

1.2. *Доказательство теоремы.* Решение прямой задачи I (см. (7)–(15)) будем искать в классе вектор-функций $(u_1, u_2, u_3, \varphi) \in \mathcal{K}(T)$. Тогда задача (7)–(15) в терминах новой вектор-функции (U_1, U_2, U_3, ϕ) перепишется в следующем виде:

$$\rho \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right) + i\nu c_{12}\frac{\partial U_3}{\partial x_3} + i\nu \frac{\partial}{\partial x_3}(c_{44}U_3) - \nu^2 c_{11} U_1, \tag{16}$$

$$\rho \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right) - \nu^2 c_{44} U_2 + i\nu \frac{\partial}{\partial x_3}(e_{14}\phi) + i\nu e_{14}\frac{\partial \phi}{\partial x_3}, \tag{17}$$

$$\rho \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{11}\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right) + i\nu c_{44}\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + i\nu \frac{\partial}{\partial x_3}(c_{12}U_1) - \nu^2 c_{44} U_3, \tag{18}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right) + \varepsilon \nu^2 \phi + i\nu e_{14}\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + i\nu \frac{\partial}{\partial x_3}(e_{14}U_2) = 0, \tag{19}$$

$$\left(ic_{44}\nu U_3 + c_{44}\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)\Big|_{x_3=+0} = -\frac{1}{2}\theta(t), \tag{20}$$

$$\left(c_{44}\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + i\nu e_{14}\phi\right)\Big|_{x_3=+0} = -\frac{1}{2}\theta(t), \tag{21}$$

$$\left(i\nu c_{12} U_1 + c_{11}\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right)\Big|_{x_3=+0} = -\frac{1}{2}\theta(t), \tag{22}$$

$$U_j\big|_{t<0} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad \phi\big|_{t<0} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\Big|_{t<0} = 0, \tag{23}$$

$$\phi\big|_{x_3=+0} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\Big|_{x_3=+0} = 0. \tag{24}$$

Система (16)–(24) распадается на две подсистемы: первая состоит из равенств (16), (18), (20), (22), (23), определяющих функции U_1 и U_3, а вторая — из равенств (17), (19), (21), (23), (24), определяющих функции U_2 и ϕ.

Цель дальнейших исследований состоит в том, чтобы показать, что соотношения (16), (18), (20), (22), (23) могут быть переписаны в виде системы линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Сведение уравнений (16), (18), (20), (22), (23) к системе линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода мы будем осуществлять в два этапа. На первом этапе мы перепишем соотношения (16), (20), (23) в виде интегрального равенства. На втором этапе соотношения (18), (22),

(23) будут переписаны также в виде интегрального соотношения. Полученные таким образом два интегральных соотношения будут образовывать замкнутую систему линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Перейдем к осуществлению первого этапа.

Перепишем равенства (16), (20), (23) в эквивалентном виде. Для этого произведем замену переменной x_3 на y по формуле

$$y = \tau_4(x_3) = \int_0^{x_3} \sqrt{\frac{\rho(\xi)}{c_{44}(\xi)}}\, d\xi. \tag{25}$$

Далее через $x_3 = \tau_4^{-1}(y)$ будем обозначать функцию, обратную к $y = \tau_4(x_3)$. Введем новую функцию по формуле

$$V_1(y,t,\nu) = U_1\big(\tau_4^{-1}(y),t,\nu\big). \tag{26}$$

Тогда в терминах функции $V_1(y,t,\nu)$ равенства (16), (20), (23) могут быть переписаны в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}V_1 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}V_1 - K_4(y)\frac{\partial}{\partial y}V_1 - \nu^2\frac{c_{11}\big(\tau_4^{-1}(y)\big)}{\rho\big(\tau_4^{-1}(y)\big)}V_1 + f_1(y,t,\nu), \quad y>0, \tag{27}$$

$$V_1\big|_{t<0} = 0, \tag{28}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}V_1\bigg|_{y=+0} = g_1(t,\nu), \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned} K_4(y) &= \frac{d}{dy}\ln\big(a_4(y)\big),\\ a_4(y) &= \frac{1}{\sqrt{\rho\big(\tau_4^{-1}(y)\big)c_{44}\big(\tau_4^{-1}(y)\big)}}, \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} f_1(y,t,\nu) = \frac{i\nu}{\rho\big(\tau_4^{-1}(y)\big)}\bigg[&c_{12}(x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}U_3(x_3,t,\nu)\\ &+\frac{\partial}{\partial x_3}\big(c_{44}(x_3)U_3(x_3,t,\nu)\big)\bigg]\bigg|_{x_3=\tau_4^{-1}(y)}, \end{aligned} \tag{31}$$

$$g_1(t,\nu) = -a_4(0)\left[\frac{\theta(t)}{2} + i\nu c_{44}(0)U_3(0,t,\nu)\right]. \tag{32}$$

Произведя замену функции $V_1(y,t,\nu)$ на $W_1(y,t,\nu)$ по формуле

$$V_1(y,t,\nu) = S_4(y)W_1(y,t,\nu), \tag{33}$$

где

$$S_4(y) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^y K_4(\xi)\,d\xi\right), \tag{34}$$

перепишем равенства (27)–(29) в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}W_1 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}W_1 + q_2(y,\nu)W_1 + \frac{f_1(y,t,\nu)}{S_4(y)}, \quad y > 0, \tag{35}$$

$$W_1\big|_{t<0} = 0, \tag{36}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}W_1\bigg|_{y=+0} = g_1(t,\nu), \tag{37}$$

где

$$q_2(y,\nu) = q_4(y) - \nu^2\frac{c_{11}\big(\tau_4^{-1}(y)\big)}{\rho\big(\tau_4^{-1}(y)\big)}, \tag{38}$$

$$q_4(y) = \frac{S_4''(y)}{S_4(y)} - 2\left[\frac{S_4'(y)}{S_4(y)}\right]^2. \tag{39}$$

Используя рассуждения из раздела 3.1, представим решение задачи (35)–(37) как

$$W_1(y,t,\nu) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \theta\big(t-\tau-|y-\xi|\big)\left[\frac{1}{2} + R_1(y,t-\tau,\xi,\nu)\right]\frac{f_1(\xi,\tau,\nu)}{S_4(\xi)}\,d\xi\,d\tau$$
$$+\,\theta\big(t-|y|\big)\left[p_1(y,t) - \int_0^{t-|y|} g_1(\tau,\nu)\,d\tau\right], \tag{40}$$

где функция $R_1(y,t,y^0,\nu)$ — решение интегрального уравнения (1.12)[1] для $q(y,\nu) = q_2(y,\nu)$ и удовлетворяет условиям (1.13), а функция $p_1(y,t,\nu)$ является решением интегрального уравнения (1.15) для $q(y,\nu) = q_2(y,\nu)$ и удовлетворяет условиям (1.16), причем функция $q_2(y)$ считается продолженной в область $y < 0$ четным образом.

Тогда из равенства (40), учитывая (26), (31)–(33), получим следующее равенство:

$$U_1(x_3,t,\nu) = \int_0^t (\mathcal{K}_1 U_3)(x_3,t,\tau,\nu)\,d\tau + F_1(x_3,t,\nu), \tag{41}$$

[1] Формулы с двойной нумерацией приведены в § 3.

где

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{K}_1 U_3)(x_3,t,\tau,\nu) = i\nu S_4\big(\tau_4(x_3)\big) \\
&\times \Bigg\{ K_5\big(\tau_4(x_3), t-\tau, \xi, \nu\big)\Big[c_{12}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big) + c_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)\Big] \\
&\qquad\qquad \times U_3\big(\tau_4^{-1}(\xi),\tau,\nu\big)\Big|_{\xi=\tau_4(x_3)-(t-\tau)}^{\xi=\tau_4(x_3)+(t-\tau)} \\
&\quad - \int_{\tau_4(x_3)-(t-\tau)}^{\tau_4(x_3)+(t-\tau)} \Bigg[\frac{\partial}{\partial\xi}\Big(K_5(\tau_4(x_3), t-\tau, \xi, \nu)\Big[c_{12}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big) + c_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)\Big]\Big) \\
&\qquad\qquad + K_5\big(\tau_4(x_3), t-\tau, \xi, \nu\big) c_{44}'\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)\Bigg] U_3\big(\tau_4^{-1}(\xi),\tau,\nu\big)\, d\xi \Bigg\} \\
&\quad + i\nu a_4(0) c_{44}(0) S_4\big(\tau_4(x_3)\big)\theta\big(t-|\tau_4(x_3)|\big) U_3\bigg(0, \frac{t-\big|\tau_4(x_3)\big|}{t}\tau, \nu\bigg),
\end{aligned}
\tag{42}
$$

$$
\begin{aligned}
&F_1(x_3,t,\nu) \\
&\quad = S_4\big(\tau_4(x_3)\big)\theta\big(t-|\tau_4(x_3)|\big)\Big[p_1\big(\tau_4(x_3),t,\nu\big) + \frac{a_4(0)}{2}\big(t-|\tau_4(x_3)|\big)\Big],
\end{aligned}
\tag{43}
$$

$$
\begin{aligned}
&K_5\big(\tau_4(x_3), t-\tau, \xi, \nu\big) \\
&\quad = \Big[\frac{1}{2} + R_1\big(\tau_4(x_3), t-\tau, \xi, \nu\big)\Big] \frac{1}{S_4(\xi)\rho\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)} \sqrt{\frac{c_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)}{\rho\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)}}.
\end{aligned}
$$

В результате приведенных выше рассуждений мы показали, что равенства (16), (20), (23) могут быть переписаны в виде интегрального равенства (41). Тем самым мы завершили первый этап.

Используя рассуждения, аналогичные тем, которые проводились при сведении соотношений (16), (20), (23) к эквивалентному им интегральному равенству (41), можно показать, что соотношения (18), (22), (23) также могут быть сведены к следующему интегральному равенству:

$$
U_3(x_3,t,\nu) = \int_0^t (\mathcal{K}_3 U_1)(x_3,t,\tau,\nu)\, d\tau + F_3(x_3,t,\nu),
\tag{44}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{K}_3 U_1)(x_3,t,\tau,\nu) = i\nu S_1\big(\tau_1(x_3)\big) \\
&\times \Bigg\{ K_6\big(\tau_1(x_3), t-\tau, \xi, \nu\big)\Big[c_{12}\big(\tau_1^{-1}(\xi)\big) + c_{44}\big(\tau_1^{-1}(\xi)\big)\Big] \\
&\qquad\qquad \times U_1\big(\tau_1^{-1}(\xi),\tau,\nu)\big)\Big|_{\xi=\tau_1(x_3)-(t-\tau)}^{\xi=\tau_1(x_3)+(t-\tau)}
\end{aligned}
$$

$$
- \int_{\tau_1(x_3)-(t-\tau)}^{\tau_1(x_3)+(t-\tau)} \biggl[\frac{\partial}{\partial\xi}\Bigl(K_6\bigl(\tau_1(x_3),t-\tau,\xi,\nu\bigr)\Bigl[c_{12}\bigl(\tau_1^{-1}(\xi)\bigr)+c_{44}\bigl(\tau_1^{-1}(\xi)\bigr)\Bigr]\Bigr)
$$

$$
+ K_6\bigl(\tau_1(x_3),t-\tau,\xi,\nu\bigr)c_{12}'\bigl(\tau_1^{-1}(\xi)\bigr)\biggr]U_1\bigl(\tau_1^{-1}(\xi),\tau,\nu\bigr)\,d\xi\biggr\}
$$

$$
+ i\nu a_1(0)c_{12}(0)S_1\bigl(\tau_1(x_3)\bigr)\theta\bigl(t-|\tau_4(x_3)|\bigr)U_1\biggl(0,\frac{t-|\tau_4(x_3)|}{t}\tau,\nu\biggr), \tag{45}
$$

$$
\begin{aligned}
F_3(x_3,t,\nu) = S_1\bigl(\tau_1(x_3)\bigr)\theta\bigl(t-|\tau_1(x_3)|\bigr)& \\
\times\biggl[p_3\bigl(\tau_1(x_3),t,\nu\bigr) + \frac{a_1(0)}{2}\bigl(t-|\tau_1(x_3)|\bigr)\biggr]&,
\end{aligned} \tag{46}
$$

$$
\tau_1(x_3) = \int_0^{x_3}\sqrt{\frac{\rho(\xi)}{c_{11}(\xi)}}\,d\xi. \tag{47}
$$

$$
\begin{aligned}
K_1(y) &= \frac{d}{dy}\ln\bigl(a_1(y)\bigr),\\
a_1(y) &= \frac{1}{\sqrt{\rho\bigl(\tau_1^{-1}(y)\bigr)c_{11}\bigl(\tau_1^{-1}(y)\bigr)}},\\
S_1(y) &= \exp\biggl(\frac{1}{2}\int_0^y K_1(\xi)\,d\xi\biggr),
\end{aligned} \tag{48}
$$

$$
\begin{aligned}
&K_6\bigl(\tau_1(x_3),t-\tau,\xi,\nu\bigr)\\
&\quad= \biggl[\frac{1}{2}+R_3\bigl(\tau_1(x_3),t-\tau,\xi,\nu\bigr)\biggr]\frac{1}{S_4(\xi)\rho\bigl(\tau_1^{-1}(\xi)\bigr)}\sqrt{\frac{c_{11}\bigl(\tau_1^{-1}(\xi)\bigr)}{\rho\bigl(\tau_1^{-1}(\xi)\bigr)}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_3(y,\nu) &= q_1(y) - \nu^2\frac{c_{44}\bigl(\tau_1^{-1}(y)\bigr)}{\rho\bigl(\tau_1^{-1}(y)\bigr)},\\
q_1(y) &= \frac{S_1''(y)}{S_1(y)} - 2\biggl[\frac{S_1'(y)}{S_1(y)}\biggr]^2.
\end{aligned} \tag{49}
$$

Здесь под $x_3 = \tau_1^{-1}(y)$ понимается функция, обратная к $y = \tau_1(x_3)$; $R_3(y,t,y^0,\nu)$ — решение интегрального уравнения (1.12) для $q(y,\nu) = q_3(y,\nu)$, удовлетворяющее условиям (1.13), а $p_3(y,t,\nu)$ — решение интегрального уравнения (1.15) для $q(y,\nu) = q_3(y,\nu)$, удовлетворяющее условиям (1.16), причем функция $q_3(y,\nu)$ считается продолженной в область $y < 0$ четным образом.

Равенства $(41), (45)$ составляют систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно функций U_1 и U_3. Запишем $(41), (45)$ в виде операторного уравнения

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_3 \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K}_1 \\ \mathcal{K}_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_3 \end{pmatrix} (\tau)\, d\tau + \begin{pmatrix} F_1 \\ F_3 \end{pmatrix}. \tag{50}$$

Операторное равенство (50) является, по существу, системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Из требований к функциям $c_{11}(x_3), c_{12}(x_3), c_{44}(x_3), \rho(x_3)$ и из свойств функций $p_j(x_3, t, \nu)$, $R_j(x_3, t, x_3^0, \nu)$, $j = 1, 3$ $\big($см. (1.13), (1.16)$\big)$, следуют соотношения

$$(\mathcal{K}_1 U_3)(x_3, t, \nu), (\mathcal{K}_3 U_1)(x_3, t, \nu), F_j(x_3, t, \nu) \in \mathbf{C}\big(\mathbb{R}; \mathbf{C}\big(\mathcal{B}(T)\big)\big), \quad j = 1, 3.$$

Из теории интегральных уравнений вытекает, что интегральное уравнение (50) имеет при $(x_3, t) \in \mathcal{B}(T)$, $\nu \in \mathbb{R}$ единственное решение (U_1, U_3) такое, что $U_1, U_3 \in \mathbf{C}\big(\mathbb{R}; \mathbf{C}\big(\mathcal{B}(T)\big)\big)$.

Рассмотрим равенства (17), (19), (21), (23), (24) и покажем, что система этих равенств может быть переписана в виде линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Для этого мы получим из равенств (19), (24) формулу, выражающую ϕ через U_2, а затем, используя эту формулу, перепишем соотношения (17), (21), (23) в виде линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода. Итак, рассмотрим соотношения (19), (24) и выразим $\phi(x_3, t, \nu)$ через $U_2(x_3, t, \nu)$.

Здесь для простоты рассуждений полагаем, что диэлектрическая проницаемость ε — положительная постоянная.

Фундаментальное решение оператора $\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \nu^2$ имеет вид

$$\mathcal{E}^{(2)}(x_3, \nu) = \theta(x_3) Z(x_3, \nu),$$

где $Z(x_3, \nu)$ — решение задачи Коши

$$Z'' - \nu^2 Z = 0, \quad x_3 > 0, \tag{51}$$

$$Z(0, \nu) = 0, \quad Z'(0, \nu) = 1. \tag{52}$$

Заметим, что корни характеристического многочлена $k^2 - \nu^2 = 0$ имеют вид $k_1 = \nu$, $k_2 = -\nu$, и общее решение уравнения (51) записывается следующим образом:

$$Z_{\text{общ}} = C_1 e^{\nu x_3} + C_2 e^{-\nu x_3},$$

где C_1 и C_2 — постоянные, которые подбираются из условия (52).

Решением задачи Коши (51), (52) является функция

$$Z(x_3,\nu)=\frac{1}{2\nu}\,e^{\nu x_3}-\frac{1}{2\nu}\,e^{-\nu x_3}=\frac{1}{\nu}\,\mathrm{sh}(\nu x_3). \tag{53}$$

Тем самым равенства (19), (24) эквивалентны следующему интегральному соотношению:

$$\phi(x_3,t,\nu)=-\int_0^{x_3}Z(x_3-\xi)\frac{i\nu}{\varepsilon}\left[e_{14}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}U_2(\xi,t,\nu)+\frac{\partial}{\partial\xi}\big(e_{14}(\xi)U_2(\xi,t,\nu)\big)\right]d\xi.$$

Учитывая равенство (53) и производя элементарные преобразования, получаем

$$\begin{aligned}
&\phi(x_3,t,\nu)\\
&\quad=-\frac{i}{\varepsilon}\int_0^{x_3}\mathrm{sh}\big(\nu(x_3-\xi)\big)\left[e_{14}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}U_2(\xi,t,\nu)+\frac{\partial}{\partial\xi}\big(e_{14}(\xi)U_2(\xi,t,\nu)\big)\right]d\xi\\
&\quad=-\frac{i}{\varepsilon}\Bigg\{\Big[\mathrm{sh}\big(\nu(x_3-\xi)\big)e_{14}(\xi)U_2(\xi,t,\nu)\Big]\Big|_{\xi=0}^{\xi=x_3}\\
&\qquad\quad-\int_0^{x_3}U_2(\xi,t,\nu)\Big[e_{14}'(\xi)\,\mathrm{sh}\big(\nu(x_3-\xi)\big)+e_{14}(\xi)\big(-\nu\,\mathrm{ch}\big(\nu(x_3-\xi)\big)\big)\Big]\,d\xi\\
&\qquad\quad+\Big[\mathrm{sh}\big(\nu(x_3-\xi)\big)e_{14}(\xi)U_2(\xi,t,\nu)\Big]\Big|_{\xi=0}^{\xi=x_3}\\
&\qquad\quad-\int_0^{x_3}e_{14}(\xi)U_2(\xi,t,\nu)\big(-\nu\,\mathrm{ch}\big(\nu(x_3-\xi)\big)\big)\,d\xi\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Из последнего равенства можно вывести следующие два соотношения:

$$\begin{aligned}
\phi(x_3,t,\nu)=-\frac{i}{\varepsilon}\Bigg\{&2e_{14}(0)\,\mathrm{sh}(\nu x_3)U_2(0,t,\nu)\\
&-\int_0^{x_3}U_2(\xi,t,\nu)\Big[e_{14}'(\xi)\,\mathrm{sh}\big(\nu(x_3-\xi)\big)\\
&\qquad-2\nu e_{14}(\xi)\,\mathrm{ch}\big(\nu(x_3-\xi)\big)\Big]\,d\xi\Bigg\},
\end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_3}\phi(x_3,t,\nu)\\
&\quad=-\frac{i}{\varepsilon}\Bigg\{2\nu e_{14}(0)\,\mathrm{ch}(\nu x_3)U_2(0,t,\nu)-2\nu e_{14}(x_3)U_2(x_3,t,\nu)\\
&\qquad+U_2(0,t,\nu)\Big[e_{14}(0)\,\mathrm{sh}(\nu x_3)U_2(0,t,\nu)-2\nu e_{14}(0)\,\mathrm{ch}(\nu x_3)\Big]\\
&\qquad+\int_0^{x_3}U_2(\xi,t,\nu)\Big[\nu e_{14}'(\xi)\,\mathrm{ch}\big(\nu(x_3-\xi)\big)\\
&\qquad\qquad-2\nu^2e_{14}(\xi)\,\mathrm{sh}\big(\nu(x_3-\xi)\big)\Big]\,d\xi\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{55}$$

Далее займемся изучением структуры функции $U_2(x_3,t,\nu)$ и асимптотики функций $U_2(x_3,t,\nu)$, $\phi(x_3,t,\nu)$, $\frac{\partial\phi}{\partial x_3}(x_3,t,\nu)$ при $\nu\to+0$.

Используя рассуждения, аналогичные тем, которые проводились при сведении равенств (16), (20), (23) к эквивалентному им интегральному равенству (41), можно показать, что соотношения (17), (21), (23) также сводятся к следующему интегральному равенству:

$$U_2(x_3,t,\nu)=\int_0^t(\mathcal{K}_2U_2)(x_3,t,\tau,\nu)\,d\tau+F_2(x_3,t,\nu), \tag{56}$$

где

$$\begin{aligned}
(\mathcal{K}_2U_2)(x_3,\tau,\nu)&=-\nu\frac{i}{\varepsilon}S_4\big(\tau_4(x_3)\big)\int\limits_{\tau_4(x_3)-(t-\tau)}^{\tau_4(x_3)+(t-\tau)}\Big[\tfrac12+R_2(y,t-\tau,\xi,\nu)\Big]\tfrac{1}{S_4(\xi)\rho(\tau_4^{-1}(\xi))}\\
&\times\bigg\{2e_{14}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)\bigg[2\nu e_{14}(0)\operatorname{ch}\big(\nu\tau_4^{-1}(\xi)\big)U_2(0,\tau,\nu)\\
&\qquad-2\nu e_{14}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)U_2\big(\tau_4^{-1}(\xi),\tau,\nu\big)\\
&\quad+U_2(0,\tau,\nu)\Big[e_{14}(0)\operatorname{sh}\big(\nu\tau_4^{-1}(\xi)\big)U_2(0,\tau,\nu)-2\nu e_{14}(0)\operatorname{ch}\big(\nu\tau_4^{-1}(\xi)\big)\Big]\\
&\quad+\int\limits_0^{\tau_4^{-1}(\xi)}U_2(\zeta,\tau,\nu)\Big[\nu e_{14}'(\zeta)\operatorname{ch}\big(\nu(\xi-\zeta)\big)-2\nu^2e_{14}(\zeta)\operatorname{sh}\big(\nu(\xi-\zeta)\big)\Big]d\zeta\bigg]\\
&\quad+e_{14}'\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)\bigg[2e_{14}(0)\operatorname{sh}\big(\nu\tau_4^{-1}(\xi)\big)U_2(0,\tau,\nu)\\
&\quad-\int\limits_0^{\tau_4^{-1}(\xi)}U_2(\zeta,\tau,\nu)\Big[e_{14}'(\zeta)\operatorname{sh}\big(\nu(\xi-\zeta)\big)-2\nu e_{14}(\zeta)\operatorname{ch}\big(\nu(\xi-\zeta)\big)\Big]d\zeta\bigg]\bigg\}d\xi,
\end{aligned}$$

$$F_2(x_3,t,\nu)=S_4\big(\tau_4(x_3)\big)\theta\big(t-|\tau_4(x_3)|\big)\Big[p_2\big(\tau_4(x_3),t\big)+\tfrac12a_4(0)\big(t-|\tau_4(x_3)|\big)\Big],$$

$$q_5(y,\nu)=q_4(y)-\nu^2\frac{c_{44}\big(\tau_4^{-1}(y)\big)}{\rho\big(\tau_4^{-1}(y)\big)},$$

здесь $R_2(y,t,y^0,\nu)$ — решение интегрального уравнения (1.12) при $q(y,\nu)=q_5(y,\nu)$, удовлетворяющее условиям (1.13), а $p_2(y,t)$ — решение интегрального уравнения (1.15) при $q(y,\nu)=q_5(y,\nu)$, удовлетворяющее условиям (1.16), причем функция $q_5(y)$ считается продолженной в область $y<0$ четным образом.

Равенство (56) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода. Поэтому из требований к $c_{44}(x_3)$, $e_{14}(x_3)$, $\rho(x_3)$ и свойств функций $p_2(x_3,t)$ и $R_2(x_3,t,x_3^0)$ $\bigl($см. (1.13), (1.14)$\bigr)$ следует включение

$$F_2(x_3,t,\nu),(\mathcal{K}_2U_2)(x_3,t,\nu)\in\mathbf{C}\bigl(\mathbb{R};\mathbf{C}\bigl(\mathcal{B}(T)\bigr)\bigr).$$

Следовательно, система интегральных уравнений (56) при $(x_3,t)\in\mathcal{B}(T)$, $\nu\in\mathbb{R}$ имеет единственное решение

$$U_2(x_3,t,\nu)\in\mathbf{C}^1\bigl(\mathbb{R};\mathbf{C}\bigl(\mathcal{B}(T)\bigr)\bigr).$$

Из равенства (54) получаем

$$\phi(x_3,t,\nu)\in\mathbf{C}^1\bigl(\mathbb{R},\mathbf{C}\bigl(\mathcal{B}(T)\bigr)\bigr).$$

Тем самым утверждение теоремы 1 о существовании решения прямой задачи I доказано.

Утверждение о существовании решения прямой задачи II доказывается аналогично.

З а м е ч а н и е. Решения прямых задач I, II обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\nu}U_1^{\mathrm{I}}(x_3,t,\nu)\Big|_{x_3=+0,\nu=0}\in\mathbf{C}^1(\mathbb{R}),\\&\frac{\partial}{\partial\nu}U_1^{\mathrm{II}}(x_3,t,\nu)\Big|_{x_3=+0,\nu=0}\in\mathbf{C}^1(\mathbb{R}).\end{aligned}\tag{57}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\nu}U_1^{\mathrm{I}}(x_3,t,\nu)\Big|_{x_3=+0,\nu=0}\\&=\frac12\int_0^t\Biggl\{\frac{1}{S_4(\xi)\rho\bigl(\tau_4^{-1}(\xi)\bigr)}\sqrt{\frac{c_{44}\bigl(\tau_4^{-1}(\xi)\bigr)}{\rho\bigl(\tau_4^{-1}(\xi)\bigr)}}\\&\qquad\times\bigl[c_{12}\bigl(\tau_4^{-1}(\xi)\bigr)+c_{44}\bigl(\tau_4^{-1}(\xi)\bigr)\bigr]U_3\bigl(\tau_4^{-1}(\xi),\tau,0\bigr)\Big|_{\xi=-(t-\tau)}^{\xi=t-\tau}\\&\qquad-\int\limits_{-(t-\tau)}^{t-\tau}\biggl[\frac{\partial}{\partial\xi}\Bigl(K_5(0,t-\tau,\xi,\nu)\bigl[c_{12}\bigl(\tau_4^{-1}(\xi)\bigr)+c_{44}\bigl(\tau_4^{-1}(\xi)\bigr)\bigr]\Bigr)\\&\qquad\qquad+K_5\bigl(\tau_4(x_3),t-\tau,\xi,\nu\bigr)c_{44}'\bigl(\tau_4^{-1}(\xi)\bigr)\biggr]U_3\bigl(\tau_4^{-1}(\xi),\tau,0\bigr)\,d\xi\Biggr\}\,d\tau\\&\quad+i\nu a_4(0)c_{44}(0)\theta(t)\int_0^tU_3(0,\tau,0)\,d\tau.\end{aligned}$$

Тогда из требований к $c_{44}(x_3)$, $c_{12}(x_3)$, $\rho(x_3)$ и свойств функции $U_3(x_3, t, \nu)$ следует первое включение (57). Второе включение доказывается аналогично.

§ 2. Обратная задача и результаты ее исследования

2.1. *Постановка обратной задачи. Теоремы существования, единственности и устойчивости ее решения.* Дальнейшим предметом наших исследований является следующая задача.

Обратная задача. *Пусть ρ, ε — заданные положительные постоянные. Найти вектор-функцию $(c_{11}, c_{12}, c_{44}, e_{14}) \in \Lambda$, компоненты которой входят в дифференциальные уравнения* (7)–(10), *такую, что компоненты решений прямых задач* I *и* II *удовлетворяют следующим равенствам*:

$$u_1^{\mathrm{I}}(x_1, x_3, t, \nu)\big|_{x_1=0, x_3=+0, \nu=+0} = h_1(t), \tag{58}$$

$$u_3^{\mathrm{I}}(x_1, x_3, t, \nu)\big|_{x_1=0, x_3=+0, \nu=+0} = h_2(t), \tag{59}$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} u_1^{\mathrm{I}}(x_1, x_3, t, \nu)\Big|_{x_1=0, x_3=+0, \nu=+0} = h_3(t), \tag{60}$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} u_2^{\mathrm{II}}(x_1, x_3, t, \nu)\Big|_{x_1=0, x_3=+0, \nu=+0} = h_4(t), \tag{61}$$

где $h_j(t)$, $j = 1, 2, 3, 4$, — известные функции при $t \in [0, T]$.

Ниже будет показано, что решение этой обратной задачи может быть сведено к последовательному решению вспомогательных обратных задач для скалярных гиперболических уравнений, а решение вспомогательных обратных задач, в свою очередь, может быть сведено к решению интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Предложенный метод конструктивен, и на его основе можно разработать алгоритм для численного решения обратной задачи. В результате проведенных исследований доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть T, X — фиксированные положительные числа. Тогда для существования вектор-функции $(c_{11}, c_{12}, c_{44}, e_{14}) \in \Lambda$, являющейся при $x_3 \in [0, X]$ единственным решением обратной задачи, необходимо, чтобы данные обратной задачи $h_j(t)$, $j = 1, 2, 3, 4$, удовлетворяли следующим условиям*:

$$\begin{gathered} h_j(t) \in \mathbf{C}^3[0, T], \quad h_j(+0) > 0, \quad j = 1, 2, \\ h_j(t) \in \mathbf{C}^2[0, T], \quad h_j(+0) = 0, \quad j = 3, 4, \\ \max\bigl[-h_3'(+0), 2h_3'(+0)\bigr] < \frac{h_1(0)}{2\rho(0)\bigl[h_1(0) + h_2(0)\bigr]}. \end{gathered} \tag{62}$$

Теорема 3. *Пусть T — фиксированное положительное число и функции $h_j(t)$, $j = 1,2,3,4$, удовлетворяют условиям (62). Тогда найдется число $X^* > 0$ такое, что существует вектор-функция $(c_{11}, c_{12}, c_{44}, e_{14}) \in \Lambda$, являющаяся при $x_3 \in [0, X^*]$ единственным решением обратной задачи и отвечающая информации $h_j(t)$, $t \in [0,T]$, $j = 1,2,3,4$.*

Теорема 4. *Пусть T, m, M — фиксированные положительные числа,*

$$m \le M, \quad T_1 = \frac{M}{m}T, \quad X = \sqrt{\frac{M}{m}}\frac{T}{2}, \quad X_0 = \sqrt{\frac{m}{M}}\frac{T}{2}.$$

Предположим, что наборы $(c_{11}, c_{12}, c_{44}, e_{14})$ и $(c^*_{11}, c^*_{12}, c^*_{44}, e^*_{14})$ являются решениями обратной задачи, отвечающими информации $h_1(t), h_2(t), h_3(t), h_4(t)$ и $h^*_1(t), h^*_2(t), h^*_3(t), h^*_4(t)$ соответственно при $t \in [0,T]$, и, кроме того,

$$(c_{11}, c_{12}, c_{44}, e_{14}),\ (c^*_{11}, c^*_{12}, c^*_{44}, e^*_{14}) \in \Lambda_0(m, M, X).$$

Тогда имеет место оценка

$$\begin{aligned} &\|c_{11} - c^*_{11}\|(X_0) + \|c_{12} - c^*_{12}\|(X_0) + \|c_{44} - c^*_{44}\|(X_0) + \|e_{14} - e^*_{14}\|(X_0) \\ &\quad\le C\left[\sum_{k=1}^{2}\|h_k - h^*_k\|_3(T) + \|h_3 - h^*_3\|_2(T_1) + \|h_4 - h^*_4\|_2(T)\right], \end{aligned} \tag{63}$$

где C — некоторая константа, зависящая от величин m, M и T, $\|\cdot\|(X) = \|\cdot\|_{\mathbf{C}[0,X]}$, $\|\cdot\|_s(X) = \|\cdot\|_{\mathbf{C}^s[0,X]}$. Класс вектор-функций $\Lambda_0(m, M, X) \subset \Lambda$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Lambda_0(m, M, X) = \Big\{(c_{11}, c_{12}, &c_{44}, e_{14}) \in \Lambda : \\ &\|c_{11}\|_2(X) \le M,\ c_{11} \ge m, \\ &\|c_{44}\|_2(X) \le M,\ c_{44} \ge m, \\ &\|c_{12}\|(X) \le M,\ \|e_{14}\|_1(X) \le M\Big\}. \end{aligned} \tag{64}$$

2.2. *Схема решения обратной задачи.* В этом разделе мы покажем, что решение обратной задачи может быть сведено к последовательному решению некоторых вспомогательных обратных задач для скалярных гиперболических уравнений.

Из соотношений (16), (20), (23), (58) для функции

$$U^0_1(x_3, t) = U^{\mathrm{I}}_1(x_3, t, \nu)\big|_{\nu=+0}$$

находим

$$\rho\frac{\partial^2 U_1^0}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial U_1^0}{\partial x_3}\right), \quad x_3 > 0, \tag{65}$$

$$U_1^0\big|_{t<0} = 0, \tag{66}$$

$$\left(c_{44}\frac{\partial U_1^0}{\partial x_3}\right)\Big|_{x_3=+0} = -\frac{1}{2}\theta(t), \tag{67}$$

$$U_1^0\big|_{x_3=0} = h_1(t). \tag{68}$$

Равенства (65)–(68) позволяют перейти к рассмотрению следующей обратной задачи.

Обратная задача 1. *Найти функцию* $c_{44} \in \Lambda_{11}$,

$$\Lambda_{11} = \big\{c(x_3) \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R}_+) : c > 0,\ c'(+0) = 0\big\},$$

входящую в дифференциальное уравнение (65), *такую, что решение задачи* (65)–(67) *удовлетворяет равенству* (68), *где* $h_1(t)$, $t \in [0, T]$, — *известная функция,* ρ — *заданная положительная постоянная.*

Из соотношений (18), (22), (23), (59) для функции

$$U_3^0(x_3, t) = U_3^{\mathrm{I}}(x_3, t, \nu)\big|_{\nu=+0}$$

получаем

$$\rho\frac{\partial^2 U_3^0}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{11}\frac{\partial U_3^0}{\partial x_3}\right), \quad x_3 > 0, \tag{69}$$

$$U_3^0\big|_{t<0} = 0, \tag{70}$$

$$\left(c_{11}\frac{\partial U_3^0}{\partial x_3}\right)\Big|_{x_3=+0} = -\frac{1}{2}\theta(t), \tag{71}$$

$$U_3^0\big|_{x_3=0} = h_2(t). \tag{72}$$

Равенства (69)–(72) позволяют перейти к рассмотрению следующей обратной задачи.

Обратная задача 2. *Найти функцию* $c_{11} \in \Lambda_{11}$, *входящую в дифференциальное уравнение* (69), *такую, что решение задачи* (69)–(71) *удовлетворяет равенству* (72), *где* $h_2(t)$, $t \in [0, T]$, — *известная функция,* ρ — *заданная положительная постоянная.*

Из соотношений (16), (20), (23), (60) для функции

$$U_1^1(x_3,t) = \frac{\partial}{\partial\nu} U_1^{\mathrm{I}}(x_3,t,\nu)\Big|_{\nu=+0}$$

находим

$$\rho\frac{\partial^2 U_1^1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial U_1^1}{\partial x_3}\right) + ic_{12}\frac{\partial U_3^0}{\partial x_3} + i\frac{\partial}{\partial x_3}(c_{44}U_3^0), \quad x_3 > 0, \tag{73}$$

$$U_1^1\big|_{t<0} = 0, \tag{74}$$

$$\left(c_{44}\frac{\partial U_1^1}{\partial x_3} + ic_{44}\nu U_3^0\right)\Bigg|_{x_3=+0} = 0, \tag{75}$$

$$U_1^0\big|_{x_3=0} = h_3(t). \tag{76}$$

Равенства (73)–(76) позволяют перейти к рассмотрению следующей обратной задачи.

Обратная задача 3. *Найти функцию* $c_{12} \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+)$, *входящую в дифференциальное уравнение* (73), *такую, что решение задачи* (73)–(75) *удовлетворяет равенству* (76), *где* $h_3(t)$, $t \in [0,T]$, — *известная функция,* ρ — *заданная положительная постоянная,* c_{44}, c_{11} — *функции, найденные посредством решения обратных задач* 1, 2, *а функция* $U_3^0(x_3,t)$ — *решение задачи* (69)–(71).

Из соотношений (17), (21), (23), (61) для функции

$$U_2^1(x_3,t) = \frac{\partial}{\partial\nu} U_2^{\mathrm{II}}(x_3,t,\nu)\Big|_{\nu=+0}$$

выводим

$$\rho\frac{\partial^2 U_2^1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial U_2^1}{\partial x_3}\right) + i\frac{\partial}{\partial x_3}(e_{14}\phi^0) + ie_{14}\frac{\partial \phi^0}{\partial x_3}, \quad x_3 > 0, \tag{77}$$

$$U_2^1\big|_{t<0} = 0, \tag{78}$$

$$\left(c_{44}\frac{\partial U_2^1}{\partial x_3} + i\nu e_{14}\phi^0\right)\Bigg|_{x_3=+0} = 0, \tag{79}$$

$$U_2^1\big|_{x_3=0} = h_4(t). \tag{80}$$

Равенства (77)–(80) позволяют перейти к рассмотрению следующей обратной задачи.

Обратная задача 4. *Найти функцию* $e_{14} \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+)$, *входящую в дифференциальное уравнение* (77), *такую, что решение задачи* (77)–(79) *удовлетворяет равенству* (80), *где* $h_4(t)$, $t \in [0,T]$, — *известная функция*, ρ — *заданная положительная постоянная*, c_{44}, c_{11} — *функции, найденные посредством решения обратных задач* 1, 2, *а функция* $\phi^0(x_3,t)$ — *решение задачи* (19), (23), (24) *при* $\nu = 0$, *т. е. задачи*

$$\frac{\partial^2 \phi^0}{\partial x_3^2} = 0, \quad x_3 > 0, \tag{81}$$

$$\phi^0\big|_{x_3=+0} = \theta(t), \quad \left.\frac{\partial \phi^0}{\partial x_3}\right|_{x_3=+0} = 0. \tag{82}$$

Получены следующие теоремы о разрешимости и об оценках устойчивости решения обратных задач 1–4.

Теорема 1.1. *Пусть* T, X — *фиксированные положительные числа. Тогда для существования функции* $c_{44} \in \Lambda_{11}$, *являющейся при* $x_3 \in [0,X]$ *единственным решением обратной задачи* 1, *необходимо, чтобы информация* $h_1(t)$ *удовлетворяла следующему условию*:

$$h_1(t) \in \mathbf{C}^3[0,T], \quad h_1(+0) > 0. \tag{83}$$

Теорема 1.2. *Пусть* T — *фиксированное положительное число и функция* $h_1(t)$ *удовлетворяет условию* (83). *Тогда найдется число* $X^* > 0$ *такое, что существует функция* $c_{44} \in \Lambda_{11}$, *являющаяся при* $x_3 \in [0,X^*]$ *решением обратной задачи* 1 *и отвечающая информации* $h_1(t)$, $t \in [0,T]$.

Теорема 1.3. *Пусть* m, M, T — *фиксированные положительные числа*, $m \le M$, $X = \frac{T}{2}\sqrt{\frac{M}{m}}$ *и функции* $c_{44}(x_3)$, $c_{44}^*(x_3)$ *принадлежат классу*

$$\Lambda_{11}(m,M,X) = \left\{c(x_3) \in \mathbf{C}^2[0,X] : \|c\|_2(X) \le M,\ c(x_3) \ge m\right\}$$

и являются решениями обратной задачи 1, *отвечающими информации* $h_1(t)$ *и* $h_1^*(t)$ *соответственно при* $t \in [0,T]$. *Тогда имеет место оценка*

$$\|c_{44} - c_{44}^*\|(X_0) \le C\|h_1 - h_1^*\|_3(T), \tag{84}$$

где $X_0 = \frac{T}{2}\sqrt{\frac{m}{M}}$, C — *некоторая константа, зависящая от величин* m, M, T.

Теорема 1.4. *Пусть* T, X — *фиксированные положительные числа. Тогда для существования функции* $c_{11} \in \Lambda_{11}$, *являющейся при* $x_3 \in [0,X]$ *единственным решением обратной задачи* 2, *необходимо, чтобы информация* $h_2(t)$ *удовлетворяла следующему условию*:

$$h_2(t) \in \mathbf{C}^3[0,T], \quad h_2(+0) > 0. \tag{85}$$

Теорема 1.5. *Пусть T — фиксированное положительное число и функция $h_2(t)$ удовлетворяет условию (85). Тогда найдется число $X^* > 0$ такое, что существует функция $c_{11} \in \Lambda_{11}$, являющаяся при $x_3 \in [0, X^*]$ решением обратной задачи 2 и отвечающая информации $h_2(t)$, $t \in [0, T]$.*

Теорема 1.6. *Пусть m, M, T — фиксированные положительные числа, $m \le M$, $X = \frac{T}{2}\sqrt{\frac{M}{m}}$ и функции $c_{11}(x_3), c^*_{11}(x_3)$ из класса $\Lambda_{11}(m, M, X)$ являются решениями обратной задачи 2, отвечающими информации $h_2(t)$ и $h^*_2(t)$ соответственно при $t \in [0, T]$. Тогда имеет место оценка*

$$\|c_{11} - c^*_{11}\|(X_0) \le C\|h_1 - h^*_1\|_3(T), \tag{86}$$

где $X_0 = \frac{T}{2}\sqrt{\frac{m}{M}}$, C — некоторая константа, зависящая от величин m, M, T.

Теорема 1.7. *Пусть T, X — фиксированные положительные числа. Тогда для существования функции $c_{12} \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+)$, являющейся при $x_3 \in [0, X]$ единственным решением обратной задачи 3 и отвечающей информации $h_3(t)$, $t \in [0, T]$, необходимо, чтобы $h_3(t)$ удовлетворяла следующему условию:*

$$h_3(t) \in \mathbf{C}^2[0, T], \quad h_3(+0) = 0,$$

$$\max\big[-h'_3(+0), 2h'_3(+0)\big] < \frac{h_1(0)}{2\rho(0)\big[h_1(0) + h_2(0)\big]}. \tag{87}$$

Теорема 1.8. *Пусть T — фиксированное положительное число и функция $h_3(t)$ удовлетворяет условию (87). Тогда найдется число $X^* > 0$ такое, что существует функция $c_{12} \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+)$, являющаяся при $x_3 \in [0, X^*]$ решением обратной задачи 3 и отвечающая информации $h_3(t)$, $t \in [0, T]$.*

Теорема 1.9. *Пусть T, m, M — фиксированные положительные числа,*

$$m \le M, \quad T_1 = \frac{M}{m}T, \quad X = \sqrt{\frac{M}{m}}\frac{T}{2}, \quad X_0 = \sqrt{\frac{m}{M}}\frac{T}{2}.$$

Предположим, что функции $c_{44}(x_3)$, $c^*_{44}(x_3)$ из класса $\Lambda_{11}(m, M, X)$ являются решениями обратной задачи 1, отвечающими информации $h_1(t)$ и $h^*_1(t)$ соответственно при $t \in [0, T]$, функции $c_{11}(x_3)$, $c^*_{11}(x_3)$ из класса $\Lambda_{11}(m, M, X)$ — решениями обратной задачи 2, отвечающими соответственно информациям $h_2(t)$, $h^*_2(t)$, $t \in [0, T]$, функции $c_{12}(x_3)$, $c^*_{12}(x_3)$ из класса

$$\Lambda_{12}(m, M, X) = \big\{c(x_3) \in \mathbf{C}[0, X] : \|c\|(X) \le M\big\}$$

— решениями обратной задачи 3, отвечающими информации $h_3(t)$ и $h^*_3(t)$ соответственно при $t \in [0, T]$. Тогда имеет место оценка

$$\|c_{12} - c^*_{12}\|(X_0) \le C\left[\sum_{k=1}^{2}\|h_k - h^*_k\|_3(T) + \|h_3 - h^*_3\|_2(T_1)\right], \tag{88}$$

где C — некоторая константа, зависящая от величин m, M, T.

Теорема 1.10. *Пусть T, X — фиксированные положительные числа. Тогда для существования функции $e_{14} \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}_+)$, являющейся при $x_3 \in [0, X]$ единственным решением обратной задачи 4 необходимо, чтобы информация $h_4(t)$ удовлетворяла следующему условию:*

$$h_4(t) \in \mathbf{C}^2[0, T], \quad h_4(+0) = 0. \tag{89}$$

Теорема 1.11. *Пусть T — фиксированное положительное число и функция $h_4(t)$ удовлетворяет условию (89). Тогда найдется число $X^* > 0$ такое, что существует функция $e_{14} \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}_+)$, являющаяся при $x_3 \in [0, X^*]$ решением обратной задачи 4 и отвечающая информации $h_4(t)$, $t \in [0, T]$.*

Теорема 1.12. *Пусть T, m, M — фиксированные положительные числа*

$$m \le M, \quad X = \sqrt{\frac{M}{m}}\frac{T}{2}, \quad X_0 = \sqrt{\frac{m}{M}}\frac{T}{2}.$$

Предположим, что функции $c_{44}(x_3)$, $c_{44}^*(x_3)$ из класса $\Lambda_{11}(m, M, X)$ являются решениями обратной задачи 1, отвечающими информации $h_1(t)$ и $h_1^*(t)$ соответственно при $t \in [0, T]$, а функции $e_{14}(x_3)$, $e_{14}^*(x_3)$ из класса

$$\Lambda_{14}(m, M, X) = \big\{c(x_3) \in \mathbf{C}^1[0, X] : \|c\|_1(X) \le M\big\}$$

— решениями обратной задачи 4, отвечающими информации $h_4(t)$ и $h_4^*(t)$ соответственно при $t \in [0, T]$. Тогда имеет место оценка

$$\|e_{14} - e_{14}^*\|(X_0) \le C\big[\|h_1 - h_1^*\|_3(T) + \|h_4 - h_4^*\|_2(T)\big], \tag{90}$$

где C — некоторая константа, зависящая от величин m, M, T.

2.3. *Доказательство теорем* 1.1 *и* 1.2. Производя замену переменной x_3 на y по формуле (25) и используя рассуждения, которые применялись при выводе равенств (27)–(29), перепишем (67)–(70) в виде

$$\frac{\partial^2 V_1^0}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V_1^0}{\partial y^2} - K_4(y)\frac{\partial V_1^0}{\partial y}, \quad y > 0, \tag{91}$$

$$V_1^0\big|_{t<0} = 0, \tag{92}$$

$$\frac{\partial V_1^0}{\partial y}\bigg|_{y=0} = -\frac{1}{2}a_4(0)\,\theta(t), \tag{93}$$

$$V_1^0\big|_{y=0} = h_1(t), \tag{94}$$

где $V_1^0(y,t) = U_1^0\big(\tau_4^{-1}(y), t\big)$, а функция $K_4(y)$ определена формулой (30).

Равенства (91)–(94) позволяют сформулировать следующую обратную задачу.

Обратная задача 1а. *Найти функцию $K_4(y) \in \mathbf{C}^1[0,T/2]$, входящую в дифференциальное уравнение* (91), *для которой решение $V_1^0(y,t)$ задачи* (91)–(93) *удовлетворяет равенству* (94), *где $h_1(t)$ — известная функция при $t \in [0,T]$.*

Из результатов работ В. Г. Романова [9] и А. С. Благовещенского [3] вытекают следующие теоремы.

Теорема 1.1а. *Пусть T — фиксированное положительное число. Для однозначной разрешимости обратной задачи* 1а *в классе функций $K_4(y) \in \mathbf{C}^1[0,T/2]$ необходимо и достаточно, чтобы функция $h_1(t)$ удовлетворяла следующим условиям*:

1) $h_1(t) \in \mathbf{C}^3(0,T)$, $h_1(+0) = a_4(+0)/2$, $h_1'(+0) = a_4'(+0)/4$;
2) *при любых $y \in (0,T/2)$ и $\phi(t) \in L_2(0,y)$, $\phi(t) \neq 0$, справедливо неравенство $(A_y^1\phi,\phi) > 0$, где*

$$(A_y^1\phi)(t) = \phi(t) + \frac{2}{a_4(0)}\int_0^y \big[h_1'(t-\tau) + h_1'(t+\tau)\big]\phi(\tau)\,d\tau,$$
$$h_1(-t) = -h_1(t), \quad |t| < y;$$

символ (ψ,ϕ) означает произведение функций ψ и ϕ в пространстве $L_2(0,y)$.

Теорема 1.2а. *Пусть L, T — фиксированные положительные числа и*

$$K_4(y), K_4^*(y) \in \mathcal{K}(L,T) = \big\{K(y) \in \mathbf{C}^1[0,T/2] : \|K\|_1(T/2) \le L\big\}$$

суть решения обратной задачи 1а, *отвечающие информации $h_1(t)$ и $h_1^*(t)$ соответственно при $t \in (0,T)$. Тогда имеет место оценка*

$$\|K_4 - K_4^*\|_1(T/2) \le C\|h_1 - h_1^*\|_2(T),$$

где $\|\cdot\|_s(T) = \|\cdot\|_{\mathbf{C}^s[0,T]}$, C — некоторая положительная константа, зависящая от L, T.

Далее предполагаем, что функция $K_4(y) \in \mathbf{C}^1[0,T/2]$ уже найдена. Тогда из равенств (30) вытекает, что функция $a_4(y)$ может быть определена при $y \in [0,T/2]$ по формуле

$$a_4(y) = a_4(0)\,\exp\bigg(\int_0^y K_4(\xi)\,d\xi\bigg),$$

и, следовательно,

$$c_{44}\big(\tau_4^{-1}(y)\big) = \frac{1}{\rho a_4^2(y)}.$$

Определим теперь функцию $\tau_4^{-1}(y)$. Формула (25) влечет

$$y = \int_0^{\tau_4^{-1}(y)} \sqrt{\frac{\rho}{c_{44}(\xi)}}\, d\xi.$$

Дифференцируя последнее равенство по y, получим следующее равенство:

$$1 = \frac{\rho}{\sqrt{\rho c_{44}\big(\tau_4^{-1}(y)\big)}}\, \frac{d\tau_4^{-1}(y)}{dy}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\rho a(y)} = \frac{d\tau_4^{-1}(y)}{dy}.$$

Интегрируя в пределах от 0 до y, имеем

$$\tau_4^{-1}(y) = \frac{1}{\rho} \int_0^y \frac{1}{a(\xi)}\, d\xi.$$

Проведенные выше рассуждения доказывают следующую теорему.

Теорема 1.3а. *Пусть X, T — фиксированные положительные числа. Для существования функции $c_{44}(x_3)$, являющейся при $x_3 \in [0, X]$ единственным решением обратной задачи* 1, *необходимо и достаточно, чтобы информация $h_1(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяла условиям* 1, 2 *теоремы* 1.1а, *а число X — неравенству*

$$X \le \tau_4^{-1}(T/2).$$

Проведенные выше рассуждения доказывают теоремы 1.1 и 1.2.

2.4. *Доказательство теоремы* 1.3. Из равенств (30) вытекает, что

$$a_4(y) = a_4(0) \exp\left(\int_0^y K_4(\xi)\, d\xi\right),$$

$$c_{44}\big(\tau_4^{-1}(y)\big)\rho = a_4(0) \exp\left(-2 \int_0^y K_4(\xi)\, d\xi\right),$$

$$c_{44}(x_3) = \frac{a_4(0)}{\rho} \exp\left(-2 \int_0^{\tau_4(x_3)} K_4(\xi)\, d\xi\right).$$

Функция $c_{44}^*(x_3)$, соответствующая информации $h_1^*(t)$, определяется следующим образом:

$$c_{44}^*(x_3) = \frac{a_4(0)}{\rho} \exp\left(-2 \int_0^{\tau_4^*(x_3)} K_4^*(\xi)\, d\xi\right).$$

Рассмотрим разность

$$
\begin{aligned}
&c_{44}(x_3) - c_{44}^*(x_3)\\
&\quad= \frac{a_4(0)}{\rho}\left[\exp\left(-2\int_0^{\tau_4(x_3)} K_4(\xi)\,d\xi\right) - \exp\left(-2\int_0^{\tau_4^*(x_3)} K_4^*(\xi)\,d\xi\right)\right].
\end{aligned}\tag{95}
$$

Из леммы Адамара [8] вытекает тождество

$$
\exp p(y) - \exp p^*(y) = \big(p(y) - p^*(y)\big)\int_0^1 \exp\Big[p^*(y) + s\big(p(y) - p^*(y)\big)\Big]\,ds.
$$

Применяя лемму Адамара к правой части равенства (95), получим

$$
\begin{aligned}
&\exp\left(-2\int_0^{\tau_4(x_3)} K_4(\xi)\,d\xi\right) - \exp\left(-2\int_0^{\tau_4^*(x_3)} K_4^*(\xi)\,d\xi\right)\\
&= -2\left(\int_0^{\tau_4(x_3)} K_4(\xi)\,d\xi - \int_0^{\tau_4^*(x_3)} K_4^*(\xi)\,d\xi\right)\\
&\quad\times\int_0^1 \exp\left[-2\int_0^{\tau_4^*(x_3)} K_4^*(\xi)d\xi + s\left(-2\int_0^{\tau_4(x_3)} K_4(\xi)d\xi + 2\int_0^{\tau_4^*(x_3)} K_4^*(\xi)d\xi\right)\right] ds\\
&= -2\left[\int_{\tau_4(x_3)}^{\tau_4^*(x_3)} K_4(\xi)\,d\xi + \int_0^{\tau_4^*(x_3)} \big(K_4^*(\xi) - K_4(\xi)\big)d\xi\right]\\
&\quad\times\int_0^1 \exp\left\{-2\left[(1-s)\int_0^{\tau_4^*(x_3)} K_4^*(\xi)\,d\xi + s\int_0^{\tau_4(x_3)} K_4(\xi)\,d\xi\right]\right\} ds.
\end{aligned}\tag{96}
$$

Лемма 1. *При сделанных предположениях о функциях* $c_{44}(x_3)$, $c_{44}^*(x_3)$ *имеет место оценка*

$$
\|\tau_4 - \tau_4^*\|_1(x_3) \le C_1\int_0^{x_3} |c_{44}^*(\xi) - c_{44}(\xi)|\,d\xi,
$$

где C_1 — *константа, зависящая от* m, M.

Доказательство. Для разности

$$
\begin{aligned}
\tau_4(x_3) - \tau_4^*(x_3) &= \int_0^{x_3} \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{c_{44}(\xi)}}\,d\xi - \int_0^{x_3} \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{c_{44}^*(\xi)}}\,d\xi\\
&= \int_0^{x_3} \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{c_{44}(\xi)c_{44}^*(\xi)}\,\big(\sqrt{c_{44}(\xi)} + \sqrt{c_{44}^*(\xi)}\,\big)}\big(c_{44}^*(\xi) - c_{44}(\xi)\big)d\xi
\end{aligned}
$$

справедливы оценки

$$
\|\tau_4 - \tau_4^*\|_1(x_3) \le \frac{\sqrt{M}}{2m\sqrt{m}}\int_0^{x_3} \big|c_{44}^*(\xi) - c_{44}(\xi)\big|\,d\xi,
$$

доказывающие лемму 1.

Продолжим доказательство теоремы 1.3. Из равенств (95), (96) находим

$$c_{44}(\xi)-c_{44}^*(\xi) = -2\frac{a_4(0)}{\rho}\biggl[\int_{\tau_4(x_3)}^{\tau_4^*(x_3)} K_4(\xi)\,d\xi + \int_0^{\tau_4^*(x_3)}\bigl(K_4^*(\xi)-K_4(\xi)\bigr)\,d\xi\biggr]$$
$$\times\int_0^1 \exp\biggl\{-2\biggl[(1-s)\int_0^{\tau_4^*(x_3)} K_4^*(\xi)\,d\xi + s\int_0^{\tau_4(x_3)} K_4(\xi)\,d\xi\biggr]\biggr\}\,ds,$$

откуда

$$\bigl|c_{44}(\xi)-c_{44}^*(\xi)\bigr| \le C_1\Bigl\{\bigl|\tau_4^*(x_3)-\tau_4(x_3)\bigr| + \bigl|K_4^*(x_3)-K_4(x_3)\bigr|\Bigr\}$$

и, следовательно,

$$\|c_{44}-c_{44}^*\|(x_3) \le C_1\int_0^{x_3}\|c_{44}-c_{44}^*\|(\tau)\,d\tau + C_2\|h_1-h_1^*\|_3(T).$$

Используя лемму Гронуолла [8], из последнего равенства получаем

$$\|c_{44}-c_{44}^*\|(X_0) \le C\|h_1-h_1^*\|_3(T),$$

где $C = C_2 e^{C_1 X_0}$.

Тем самым теорема 1.3 доказана.

Теоремы 1.4–1.6 доказываются аналогично.

2.5. *Доказательство теорем* 1.7 *и* 1.8. Обозначим через $U^*(x_3,t)$ функцию, удовлетворяющую следующим равенствам:

$$\rho\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial U^*}{\partial x_3}\right) - i\frac{\partial}{\partial x_3}\bigl(c_{44}U_3^0\bigr), \quad x_3>0, \tag{97}$$
$$U^*\big|_{t<0} = 0, \tag{98}$$
$$c_{44}\frac{\partial U^*}{\partial x_3}\big|_{x_3=0} = ic_{44}(0)h_3(t), \tag{99}$$

где функции U_3^0, c_{44}, h_3 считаются известными.

Решение задачи (97)–(99) может быть построено, например, методом, приведенным в [13]. Далее будем считать функцию U^* уже найденной.

Перепишем равенства (73)–(76) в терминах функции

$$U^1(x_3,t) = \frac{\partial}{\partial t}U_1^1(x_3,t) - \frac{\partial}{\partial t}U^*(x_3,t)$$

следующим образом:

$$\rho\frac{\partial^2 U^1}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial U^1}{\partial x_3}\right)-ic_{12}\frac{\partial U^0}{\partial x_3},\quad x_3>0, \tag{100}$$

$$U^1\big|_{t<0}=0, \tag{101}$$

$$c_{44}\frac{\partial U^1}{\partial x_3}\bigg|_{x_3=0}=0, \tag{102}$$

$$U^1\big|_{x_3=0}=h(t), \tag{103}$$

где $h(t)=h_3'(t)-\frac{\partial}{\partial t}U^*\big|_{x_3=0}$, а функция $U^0(x_3,t)$, входящая в правую часть равенства (100), является решением задачи

$$\rho\frac{\partial^2 U^0}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{11}\frac{\partial U^0}{\partial x_3}\right),\quad x_3>0, \tag{104}$$

$$U^0\big|_{t<0}=0, \tag{105}$$

$$\left(c_{11}\frac{\partial U_3^0}{\partial x_3}\right)\bigg|_{x_3=+0}=-\frac{1}{2}\delta(t). \tag{106}$$

Цель наших ближайших рассмотрений состоит в исследовании структуры обобщенной функции $\frac{\partial}{\partial x_3}U^0(x_3,t)$.

Равенства (104)–(106) в терминах функции

$$W_3(y,t)=\frac{U^0\big(\tau_1^{-1}(y),t\big)}{S_1(y)}, \tag{107}$$

где

$$S_1(y)=\sqrt{\frac{a_1(y)}{a_1(0)}}=\left(\frac{c_{11}(0)}{c_{11}\big(\tau_1^{-1}(y)\big)}\right)^{1/4}, \tag{108}$$

принимают вид

$$\frac{\partial^2 W_3}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 W_3}{\partial y^2}+q_1(y)\,W_3,\quad y>0, \tag{109}$$

$$W_3\big|_{t<0}=0, \tag{110}$$

$$\frac{\partial W_3}{\partial y}\bigg|_{y=0}=-\frac{a_1(0)}{2}\delta(t), \tag{111}$$

где

$$q_1(y)=\frac{S_1''(y)}{S_1(y)}-2\left[\frac{S_1'(y)}{S_1(y)}\right]^2. \tag{112}$$

Формулы (108), (112) определяют функцию $q_1(y) \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+)$, значения которой известны при $y \in \mathbb{R}_+$. Опираясь на теоремы для гиперболических уравнений и рассуждения из [13], можно показать, что решение задачи (109)–(111) существует и единственно в классе четных по y функций, представимых в виде

$$W_3(y,t) = \theta\big(t - |y|\big)\left[\frac{a_1(0)}{2} + \widetilde{W}_3(y,t)\right],$$

где $\widetilde{W}_3(y,t) \in W_2^1\big(\mathbb{R} \times (0,T)\big)$, T — фиксированное положительное число. При этом равенства (109)–(111), переписанные в терминах четной по y функции $\widetilde{W}_3(y,t)$, эквивалентны интегральному соотношению

$$\widetilde{W}_3(y,t) = \theta\big(t-|y|\big)\left[\int_{\frac{y-t}{2}}^{\frac{y+t}{2}} \int_{|\xi|}^{t-|\xi-y|} q_1(\xi)\left(\frac{1}{2} + \widetilde{W}_3(\xi,\tau)\right) d\tau\, d\xi\right]. \qquad (113)$$

Из уравнения (113) следует, что

$$\widetilde{W}_3(y,t)\big|_{t<0} = 0,$$
$$\widetilde{W}_3(y,t) \in \mathbf{C}^2\big(\nabla(T)\big), \quad \nabla(T) = \big\{(y,t) : |y| \le t \le T\big\}.$$

Используя (107), находим

$$U^0(x_3,t) = \theta\big(t - |\tau_1(x_3)|\big) d_{01}(x_3,t), \qquad (114)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} U^0(x_3,t) = d_{11}(x_3)\frac{\partial}{\partial t}\theta\big(t-|\tau_1(x_3)|\big) + d_{21}(x_3,t)\theta\big(t-|\tau_1(x_3)|\big), \qquad (115)$$

где

$$d_{01}(x_3,t) = S_1\big(\tau_1(x_3)\big)\left[\frac{a_1(0)}{2} + \widetilde{W}_3\big(\tau_1(x_3),t\big)\right],$$
$$d_{11}(x_3) = -\sqrt{\frac{\rho}{c_{11}(x_3)}}\, d_{01}\big(x_3, |\tau_1(x_3)|\big)\operatorname{sign}(x_3),$$
$$d_{21}(x_3,t) = \frac{\partial}{\partial x_3} d_{01}(x_3,t).$$

Таким образом структура обобщенной функции $\frac{\partial}{\partial x_3}U^0(x_3,t)$ описывается формулой (115).

Вопрос о существовании и единственности решения начально-краевой задачи (100)–(102) может быть решен следующим образом. От начально-краевой задачи (100)–(102) перейдем к задаче (100), (101) нахождения четной по x_3 функции $U^1(x_3,t)$. Здесь мы считаем, что функция $c_{12}(x_3)$

продолжена нечетным образом при $x_3 < 0$, а $\frac{\partial}{\partial x_3}U^0(x_3,t)$ имеет структуру (115).

Тогда можно убедится, что обобщенная задача Коши (100), (101) имеет, и притом единственное, решение в классе

$$U(T) = \Big\{u(x_3,t) \in \mathrm{Ł}_2\big(\mathbb{R}\times(0,T)\big) \cap \mathbf{C}^1\big(\nabla_1(T)\big) : u(-x_3,t) = u(x_3,t)\Big\},$$
$$\nabla_1(T) = \Big\{(x_3,t) : \big|\tau_1(x_3)\big| \le t \le T\Big\}.$$

Рассмотрим снова равенства (100)–(103). Они позволяют перейти к следующей обратной задаче.

Обратная задача 1.3а. *Найти функцию* $c_{12}(x_3) \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+)$, *входящую в дифференциальное уравнение* (100), *такую, что решение* $U^1(x_3,t)$ *начально-краевой задачи* (100)–(102) *удовлетворяет равенству* (103), *где* $h(t)$, $t \in [0,T_1]$, — *известная функция,* ρ — *заданная положительная постоянная.*

Рассуждениями из раздела 3.1, в которых $u = U^1$, $c = c_{44}$, $c_1 = c_{12}$, $f = -iU^0$, можно показать, что решение обратной задачи 1.3а эквивалентно решению следующего интегрального уравнения:

$$h'(t) = \widehat{R}_2(t)\widehat{c}_{12}\big(\alpha_1(t)\big) + \int_0^{\alpha_1(t)} \widehat{c}_{12}(\xi)\widehat{R}_3(\xi,t)\,d\xi, \tag{116}$$

где

$$\widehat{R}_2(t) = 2\theta(t)\alpha_1'(t)\widehat{d}_3\big(\alpha_1(t)\big), \tag{117}$$

$$\widehat{R}_3(\xi,t) = 2\theta(t)\bigg[\widehat{d}_4\big(0,\xi,|\xi|,t-|\xi|\big) + \int_{|g_{14}(\xi)|}^{t-|\xi|} \frac{\partial}{\partial t}\widehat{d}_4(0,\xi,t-\tau,\tau)\,d\tau\bigg], \tag{118}$$

$t \in [0,T]$, $\xi \in \big[0,\alpha_1(t)\big]$, $\alpha_1(t)$ — корень уравнения $t-\xi = g_{14}(\xi)$ относительно переменной ξ,

$$g(y) = \tau_1\big(\tau_4^{-1}(y)\big), \quad \widehat{d}_3(y) = \frac{1}{\rho S_4(y)} d_{11}\big(\tau_4^{-1}(y)\big), \quad y \in [0,T/2], \tag{119}$$

$$\widehat{d}_4(0,\xi,t-\tau,\tau) = \frac{1}{\rho S_4(\xi)}\bigg\{ d_{11}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)R_{4t}'(0,\xi,t-\tau) + d_{21}\big(\tau_4^{-1}(\xi),\tau\big)\Big[\frac{1}{2} + R_4(0,\xi,t-\tau)\Big]\bigg\},$$

$\tau \in \big[|g_{14}(\xi)|,\ t-|\xi|\big]$.

Проверим, что $\widehat{R}_2(t) \neq 0$ при $t \in [0, T]$. Действительно, так как $\alpha_1(t)$ — корень уравнения $t - \xi = g_{14}(\xi)$, имеем

$$\frac{d}{dt}\alpha_1(t) = \frac{1}{g'_{14}\big(\alpha_1(t)\big)} = 1 \Bigg/ \sqrt{\frac{c_{44}\big(\tau_4^{-1}\big(\alpha_1(t)\big)\big)}{c_{11}\big(\tau_4^{-1}\big(\alpha_1(t)\big)\big)}} > 0.$$

Из последней формулы, свойств функций c_{11}, c_{44}, S_1, S_4 и равенств (117) и (119) следует, что $\widehat{R}_2(t) > 0$ при $t \in [0, T]$.

Обозначим $\alpha_1(t) = y$, $t = g_{14}(y) + y$. Тогда

$$\widehat{c}_{12}(y) = H(y) + \int_0^y \widehat{c}_{12}(\xi)\widehat{R}_4(\xi, t)\, d\xi \tag{120}$$

в силу (116), где

$$H(y) = \frac{h'\big(g_{14}(y) + y\big)}{\widehat{R}_2\big(g_{14}(y) + y\big)}, \quad \widehat{R}_4(\xi, y) = \frac{\widehat{R}_3\big(\xi, g_{14}(y) + y\big)}{\widehat{R}_2\big(g_{14}(y) + y\big)}.$$

Уравнение (120) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода. Из теории интегральных уравнений Вольтерра с учетом соотношений

$$H(y) \in \mathbf{C}[0, T/2], \quad \widehat{R}_4(\xi, y) \in \mathbf{C}\big(\Omega(T)\big),$$
$$\Omega(T) = \big\{(\xi, y) : 0 \le \xi \le y \le T/2\big\}$$

заключаем, что уравнение (120) имеет при $y \in [0, T/2]$ единственное непрерывное решение $\widehat{c}_{12}(y)$.

Приведенные рассуждения доказывают теоремы 1.7 и 1.8.

2.3.4. *Доказательство теоремы* 1.9. Вернемся к постановке обратной задачи 3, а именно рассмотрим равенства (73)–(76). Продифференцируем эти равенства по t и введем обозначения

$$U^1 = \frac{\partial}{\partial t}U_1^1, \quad U^0 = \frac{\partial}{\partial t}U_3^0.$$

Тогда равенства (73)–(76) перепишутся в следующем виде:

$$\rho\frac{\partial^2 U^1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial U^1}{\partial x_3}\right) - ic_{12}\frac{\partial U^0}{\partial x_3} + i\frac{\partial}{\partial x_3}(c_{44}U^0), \quad x_3 > 0, \tag{121}$$

$$U^1\big|_{t<0} = 0, \tag{122}$$

$$\left(c_{44}\frac{\partial U^1}{\partial x_3} + ic_{44}U^0\right)\bigg|_{x_3=0} = 0, \tag{123}$$

$$U^1\big|_{x_3=0} = h_3'(t). \tag{124}$$

Наряду с соотношениями (121)–(124), которые отвечают функциям U^1, U^0, c_{44}, c_{12}, h_3, рассмотрим аналогичные равенства, связанные с функциями U^1_*, U^0_*, c^*_{44}, c^*_{12}, h^*_3:

$$\rho\frac{\partial^2 U^1_*}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c^*_{44}\frac{\partial U^1_*}{\partial x_3}\right) - ic^*_{12}\frac{\partial U^0_*}{\partial x_3} + i\frac{\partial}{\partial x_3}\left(c^*_{44}U^0_*\right), \quad x_3 > 0, \tag{125}$$

$$U^1_*\big|_{t<0} = 0, \tag{126}$$

$$\left.\left(c^*_{44}\frac{\partial U^1_*}{\partial x_3} + ic^*_{44}U^0_*\right)\right|_{x_3=+0} = 0, \tag{127}$$

$$U^1_*\big|_{x_3=0} = h^{*\prime}_3(t). \tag{128}$$

Введем следующие обозначения:

$$\widetilde{U}^1 = U^1 - U^1_*, \quad \widetilde{U}^0 = U^0 - U^0_*,$$

$$\widetilde{c}_{44} = c_{44} - c^*_{44}, \quad \widetilde{c}_{11} = c_{11} - c^*_{11}, \quad \widetilde{c}_{12} = c_{12} - c^*_{12}, \quad \widetilde{h}'_3 = h'_3 - h^{*\prime}_3.$$

Тогда функции $\widetilde{U}^1$, $\widetilde{U}^0$, $\widetilde{c}_{11}$, $\widetilde{c}_{12}$, $\widetilde{c}_{44}$, $\widetilde{h}_3$ удовлетворяют равенствам

$$\rho\frac{\partial^2 \widetilde{U}^1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial \widetilde{U}^1}{\partial x_3}\right) + \widetilde{F}[\widetilde{c}_{11}, \widetilde{c}_{12}, \widetilde{c}_{44}](x_3, t), \quad x_3 > 0, \tag{129}$$

$$\widetilde{U}^1\big|_{t<0} = 0, \tag{130}$$

$$\left.\left(c_{44}\frac{\partial \widetilde{U}^1}{\partial x_3}\right)\right|_{x_3=0} = \widetilde{G}[\widetilde{c}_{11}, \widetilde{c}_{44}](t), \tag{131}$$

$$\widetilde{U}^1\big|_{x_3=0} = \widetilde{h}'_3(t), \tag{132}$$

где

$$\begin{aligned}\widetilde{F}[\widetilde{c}_{11}, \widetilde{c}_{12}, \widetilde{c}_{44}](x_3, t) = -i\widetilde{c}_{12}\frac{\partial U^0_*}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\widetilde{c}_{44}\frac{\partial U^1_*}{\partial x_3}\right) - ic_{12}\frac{\partial \widetilde{U}^0}{\partial x_3}\\ + i\frac{\partial}{\partial x_3}(c_{44}\widetilde{U}^0) + i\frac{\partial}{\partial x_3}(\widetilde{c}_{44}U^0_*),\end{aligned} \tag{133}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{G}[\widetilde{c}_{11}, \widetilde{c}_{44}](t) = -\widetilde{c}_{44}(0)\frac{\partial}{\partial x_3}U^1_*(x_3, t)\big|_{x_3=0}\\ - ic_{44}(0)\widetilde{U}^0(0, t) - i\widetilde{c}_{44}(0)U^0_*(0, t),\end{aligned} \tag{134}$$

функция $\widetilde{U}^0[\widetilde{c}_{11}](x_3,t)$ — решение задачи

$$\rho\frac{\partial^2\widetilde{U}^0}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{11}\frac{\partial\widetilde{U}^0}{\partial x_3}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\widetilde{c}_{11}\frac{\partial U_*^0}{\partial x_3}\right),\quad x_3>0,\tag{135}$$

$$\widetilde{U}^0\big|_{t<0}=0,\tag{136}$$

$$\left(c_{11}\frac{\partial\widetilde{U}^0}{\partial x_3}\right)\bigg|_{x_3=0}=\widetilde{c}_{11}(0)\frac{\partial}{\partial x_3}U_*^0(x_3,t)\bigg|_{x_3=0},\tag{137}$$

функция $U_*^0(x_3,t)$ — решение задачи

$$\rho\frac{\partial^2U_*^0}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{11}^*\frac{\partial U_*^0}{\partial x_3}\right),\quad x_3>0,\tag{138}$$

$$U_*^0\big|_{t<0}=0,\tag{139}$$

$$\left(c_{11}^*\frac{\partial U_*^0}{\partial x_3}\right)\bigg|_{x_3=0}=-\frac{1}{2}\delta(t).\tag{140}$$

Решение $\widetilde{U}^1(x_3,t)$ начально-краевой задачи (129)–(131) будем искать в виде

$$\widetilde{U}^1(x_3,t)=\sum_{j=1}^{8}\mathcal{U}_j(x_3,t),\tag{141}$$

где функции $\mathcal{U}_j(x_3,t)$, $j=\overline{1,8}$, являются решениями следующих задач:

$$\rho\frac{\partial^2\mathcal{U}_j}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial\mathcal{U}_j}{\partial x_3}\right)+f_j(x_3,t),\quad x_3>0,\quad j=\overline{1,8},\tag{142}$$

$$\mathcal{U}_j\big|_{t<0}=0,\qquad j=\overline{1,8},\tag{143}$$

$$\left(c_{44}\frac{\partial\mathcal{U}_j}{\partial x_3}\right)\bigg|_{x_3=0}=g_j(t),\quad j=\overline{1,8},\tag{144}$$

в которых

$$f_1(x_3,t)=-i\widetilde{c}_{12}\frac{\partial U_*^0}{\partial x_3},\qquad f_2(x_3,t)=i\frac{\partial}{\partial x_3}\big(\widetilde{c}_{44}U_*^0\big),$$

$$f_3(x_3,t)=\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\widetilde{c}_{44}\frac{\partial U_*^1}{\partial x_3}\right),\quad f_4(x_3,t)=-ic_{12}\frac{\partial\widetilde{U}^0}{\partial x_3},$$

$$f_5(x_3,t)=i\frac{\partial}{\partial x_3}\big(c_{44}\widetilde{U}^0\big),\qquad f_j(x_3,t)=0,\quad j=6,7,8,$$

$$g_j(t) = 0, \quad j = \overline{1,5}, \qquad\qquad g_6(t) = -i\widetilde{c}_{44}(0)U_*^0(0,t),$$

$$g_7(t) = -\widetilde{c}_{44}(0)\frac{\partial}{\partial x_3}U_*^1(x_3,t)\bigg|_{x_3=0}, \quad g_8(t) = -ic_{44}(0)\widetilde{U}^0(0,t).$$

Здесь $U_*^0(x_3,t)$ — решение начально-краевой задачи (138)–(140), $U_*^1(x_3,t)$ — решение начально-краевой задачи (125)–(127), $\widetilde{U}^0(x_3,t)$ — решение начально-краевой задачи (135)–(137), $\widetilde{c}_{11}(x_3)$, $\widetilde{c}_{12}(x_3)$, $\widetilde{c}_{44}(x_3)$ — непрерывные функции на $[0,+\infty)$.

Лемма 2. *Пусть T — фиксированное положительное число, ρ — известная положительная постоянная, $c_{11}(x_3), c_{44}(x_3) \in \Lambda$ — заданные функции. Тогда в классе функций $U(T)$ существует единственное решение $\mathcal{U}_j$ задачи (142)–(144), $j = \overline{1,8}$, и, кроме того, имеют место следующие соотношения*:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}_1(0,t) = A_1(t)\widetilde{c}_{12}\big(\tau_4^{-1}\big(\alpha_1(t)\big)\big) + \int_0^{\alpha_1(t)} \widetilde{c}_{12}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)B_1(\xi,t)\,d\xi, \tag{145}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}_j(0,t) = A_j(t)\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}\big(\alpha_j(t)\big)\big) + \int_0^{\alpha_j(t)} \widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)B_j(\xi,t)\,d\xi, \quad j = 2,6,7, \tag{146}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}_3(0,t) = \sum_{k=1}^{2}\bigg[A_3^k(t)\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}\big(\alpha_3^k(t)\big)\big) + \int_0^{\alpha_3^k(t)}\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)B_3^k(\xi,t)\,d\xi\bigg], \tag{147}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}_k(0,t) = A_k(t)\widetilde{c}_{11}\big(\tau_4^{-1}\big(\alpha_k(t)\big)\big) + \int_0^{\alpha_k(t)} \widetilde{c}_{11}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)B_k(\xi,t)\,d\xi, \quad k = 4,5,8, \tag{148}$$

где $A_j(t)$, $j = 1,2,4,5,6,7,8$, A_3^k, $k = 1,2$, — некоторые непрерывные функции, $A_1(t) \neq 0$, $\alpha_j(t)$, $j = 1,2,4,5,6,7,8$, α_3^k, $k = 1,2$, — некоторые положительные функции, имеющие непрерывные производные, а $B_j(\xi,t)$, $j = 1,2,4,5,6,7,8$, B_3^k, $k = 1,2$, — кусочно-непрерывные функции.

Следствие. *В условиях леммы 2 справедливо неравенство*

$$\bigg|\sum_{j=2}^{8}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}_j(0,t)\bigg| \le C\Big\{\|\widetilde{c}_{11}\|(X) + \|\widetilde{c}_{44}\|(X)\Big\}, \tag{149}$$

где значения постоянных C и X описаны в теореме 1.9.

Доказательства леммы 2 и следствия будут приведены после доказательства теоремы 1.9.

Предположим, что утверждения леммы 2 и следствия имеют место. Продолжим доказательство теоремы 1.9. Из (132) и (141) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}_1(0,t)+\sum_{j=2}^{8}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}_j(0,t)=\widetilde{h}_3'(t), \tag{150}$$

а из (145) и (149) —

$$\widetilde{c}_{12}\big(\tau_4^{-1}(x_3)\big)=\int_0^{x_3}\widetilde{c}_{12}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)\mathcal{K}(\xi,x_3)\,d\xi+\widetilde{H}[\widetilde{c}_{11},\widetilde{c}_{44}](x_3), \tag{151}$$

где

$$x_3=\alpha_1(t),\quad \mathcal{K}\big(\xi,\alpha_1(t)\big)=\frac{B_1(\xi,t)}{A_1(t)},\quad A_1(t)\neq 0,$$

$$\widetilde{H}[\widetilde{c}_{11},\widetilde{c}_{44}]\big(\alpha_1(t)\big)=\frac{1}{A_1(t)}\left\{\widetilde{h}_3'(t)-\sum_{j=2}^{8}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}_j(0,t)\right\}.$$

Равенство (151) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода. Из утверждения леммы 2 следует, что $\mathcal{K}\big(\xi,\alpha_1(t)\big)$ — кусочно-непрерывная функция при $0\leq\xi\leq x_3\leq\alpha_1(T)$ и, кроме того, $\widetilde{H}[\widetilde{c}_{11},\widetilde{c}_{44}](x_3)\in\mathbf{C}\big[0,\alpha_1(T)\big]$. Тогда, используя (149) и неравенство Гронуолла, заключаем, что

$$\|\widetilde{c}_{12}\|(X_0)\leq C\Big\{\|\widetilde{h}_3\|_2(T_1)+\|\widetilde{c}_{11}\|(X)+\|\widetilde{c}_{44}\|(X)\Big\}, \tag{152}$$

где значение постоянных C, X, X_0, T_1 описаны в теореме 1.9.

Доказательство леммы 2.

(а) Покажем, что $\mathcal{U}_1\in U(T)$ и справедлива формула (145).

Так как начально-краевая задача (142)–(144) при $j=1$ аналогична начально-краевой задаче (100)–(102), полагая $U^1=\mathcal{U}_1$, $c_{12}=\widetilde{c}_{12}$, $U^0=U_*^0$, получаем, что, во-первых, $\mathcal{U}_1\in U(T)$, во-вторых, справедлива формула, аналогичная формуле (116), при $\widehat{R}_2(t)=A_1(t)$, $\widehat{R}_3(\xi,t)=B_1(\xi,t)$, $h'(t)=\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}_1(0,t)$, и, в-третьих, $A_1(t)\neq 0$. Тем самым формула (145) доказана.

(б) Докажем, что $\mathcal{U}_2\in U(T)$ и справедлива формула (146) при $j=2$.

Рассмотрим начально-краевую задачу (142)–(144) при $j=2$. В правую часть равенства (142) входит функция U_0^*, являющаяся решением начально-краевой задачи (138)–(140) и имеющая следующую структуру:

$$U_*^0(x_3,t)=d_{*0}(x_3)\theta\big(t-|\tau_1^*(x_3)|\big)+d_{*1}(x_3,t)\theta\big(t-|\tau_1^*(x_3)|\big), \tag{153}$$

где

$$d_{*0}(x_3) = S_1\big(\tau_1^*(x_3)\big)\frac{a_1(0)}{2},$$
$$d_{*1}(x_3,t) = S_1\big(\tau_1^*(x_3)\big)\widetilde{W}_3\big(\tau_1^*(x_3),t\big),$$
$$a_1^*(y) = \frac{1}{\sqrt{c_{11}\big(\tau_1^*(y)\big)}},$$
$$S_1^*(y) = \left(\frac{c_{11}^*(0)}{c_{11}^*\big(\tau_1^{-1}(y)\big)}\right)^{1/4},$$
$$\tau_1^*(x_3) = \int_0^{x_3}\sqrt{\frac{\rho}{c_{11}^*(\xi)}}\,d\xi,$$

функция $\widetilde{W}_3(y,t)$ — решение уравнения (119) при

$$q(y) = q_1^*(y) = \frac{S_1^{*\prime\prime}(y)}{S_1^*(y)} - 2\left[\frac{S_1^{*\prime}(y)}{S_1^*(y)}\right]^2.$$

С помощью рассуждений из раздела 3.2, которые использовались при переходе от (2.1)–(2.3) к (2.16), получим

$$\mathcal{W}_2(y,t) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2}\theta\big(t-\tau-|\xi-y|\big)\left[\frac{1}{2}+R_4(y,t-\tau,\xi)\right]$$
$$\times\frac{i}{\rho S_4(\xi)}\frac{\partial}{\partial x_3}\big(\widetilde{c}_{44}(x_3)U_*^0(x_3,\tau)\big)\Big|_{x_3=\tau_4^{-1}(\xi)}\,d\xi\,d\tau, \qquad (154)$$

где

$$\mathcal{W}_2(y,t) = \frac{\mathcal{U}_2\big(\tau_4^{-1}(y),t\big)}{S_4(y)}.$$

Используя известные формулы дифференциального исчисления и свойства свертки, с помощью рассуждений, которые применялись при получении формулы (2.19) из раздела 3.2 и формулы (153), равенство (154) может быть переписано в следующем виде:

$$\mathcal{W}_2(y,t) = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\theta\big(t-\psi_{14}^*(y)\big)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{y_{*i}(y,t)}^{y_i^*(y,t)}\int\limits_{|g_{14}^*(\xi)|}^{t-|\xi-y|}\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)D_1(\xi)\,d\tau\,d\xi\right\}$$
$$-\frac{\partial}{\partial y}\left\{\theta(t-\psi_{14}^*(y))\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{y_{*i}(y,t)}^{y_i^*(y,t)}\int\limits_{|g_{14}^*(\xi)|}^{t-|\xi-y|}\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)D_2(\xi,\tau)\,d\tau\,d\xi\right\}$$
$$+\theta\big(t-\psi_{14}^*(y)\big)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{y_{*i}(y,t)}^{y_i^*(y,t)}\int\limits_{|g_{14}^*(\xi)|}^{t-|\xi-y|}\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)D_3(y,t-\tau,\xi)\,d\tau\,d\xi, \qquad (155)$$

где $g^*_{14}(y) = \tau^*_1\big(\tau_4^{-1}(y)\big)$, $\psi^*_{14}(y)$ — функция, построенная по алгоритму из раздела 3.2 для функции $g(y) = g^*_{14}(y)$,

$$D_1(y) = \frac{id_{*0}\big(\tau_4^{-1}(y)\big)}{2S_4(y)\sqrt{\rho c_{44}(y)}},$$

$$D_2(y,t) = \frac{id_{*1}\big(\tau_4^{-1}(y),t\big)}{2S_4(y)\sqrt{\rho c_{44}(y)}},$$

$$D_3(y,t-\tau,\xi) = i\Big[\tfrac{1}{S_4(\xi)\sqrt{\rho c_{44}(\xi)}}R'_{4\xi}(y,t-\tau,\xi) - R_4(y,t-\tau,\xi)\tfrac{\partial}{\partial\xi}\tfrac{1}{S_4(\xi)\sqrt{\rho c_{44}(\xi)}}\Big]$$
$$\times\Big[d_{*0}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big) + d_{*1}\big(\tau_4^{-1}(\xi),\tau\big)\Big].$$

Далее, используя для первого слагаемого рассуждения, проведенные в разделе 3.2 при получении формулы (2.19) (т.е. свойства дельта-функции Дирака и тот факт, что при $t \to \psi(y) + 0$ мера множества $\Delta(y,t)\cap\nabla$ стремится к нулю), получаем

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\theta\big(t-\psi^*_{14}(y)\big)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{y_{*i}(y,t)}^{y_i^*(y,t)}\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)D_1(\xi)\big(t-|\xi-y|-|g^*_{14}(\xi)|\big)\,d\xi\right\}$$
$$= \theta\big(t-\psi^*_{14}(y)\big)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{y_{*i}(y,t)}^{y_i^*(y,t)}\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)D_1(\xi)\,\mathrm{sign}(\xi-y)\,d\xi; \tag{156}$$

аналогичным образом для второго слагаемого устанавливается формула

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\theta\big(t-\psi^*_{14}(y)\big)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{y_{*i}(y,t)}^{y_i^*(y,t)}\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)D_2\big(\xi,t-|\xi-y|\big)\,d\xi\right\}$$
$$= \theta\big(t-\psi^*_{14}(y)\big)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{y_{*i}(y,t)}^{y_i^*(y,t)}\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)D_2\big(\xi,t-|\xi-y|\big)\,\mathrm{sign}(\xi-y)\,d\xi. \tag{157}$$

Из (156) и (157) вытекает, что

$$\mathcal{W}_2(y,t) = \theta\big(t-\psi^*_{14}(y)\big)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{y_{*i}(y,t)}^{y_i^*(y,t)}\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)D_4(y,t,\xi)\,d\xi,$$

где

$$D_4(y,t,\xi) = \Big[D_1(\xi) - D_2\big(\xi,t-|\xi-y|\big)\Big]\,\mathrm{sign}(\xi-y) + \int\limits_{|g^*_{14}(\xi)|}^{t-|\xi-y|} D_3(y,t-\tau,\xi)\,d\tau.$$

Следовательно, при $y=0$ имеет место равенство

$$\mathcal{W}_2(0,t)=\theta(t)\int_0^{y_1^*(0,t)}\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)2D_4(0,t,\xi)\,d\xi,$$

продифференцировав которое по t, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{W}_2(0,t)$$

$$=2\theta(t)\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}\big(y_1^*(0,t)\big)\big)\Big[D_1\big(y_1^*(0,t)\big)-D_2\big(y_1^*(0,t),t-|y_1^*(0,t)|\big)\Big]\frac{d}{dt}y_1^*(0,t)$$

$$+2\int_0^{y_1^*(0,t)}\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)\left[-\frac{\partial}{\partial t}D_2\big(\xi,t-|\xi|\big)+\int_{|g_{14}^*(\xi)|}^{t-|\xi|}D_3(0,t-\tau,\xi)\,d\tau\right]d\xi.$$

Таким образом, справедливо равенство (146) при $j=2$, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}_2(0,t)=A_2(t)\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}\big(\alpha_2(t)\big)\big)+\int_0^{\alpha_2(t)}\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)B_2(\xi,t)\,d\xi,$$

где

$$A_2(t)=2\Big[D_1\big(\alpha_2(t)\big)-D_2\big(\alpha_2(t),t-|\alpha_2(t)|\big)\Big]\frac{d}{dt}\alpha_2'(t),$$

$$B_2(\xi,t)=2\left[-\frac{\partial}{\partial t}D_2\big(\xi,t-|\xi|\big)+\int_{|g_{14}^*(\xi)|}^{t-|\xi|}D_3(0,t-\tau,\xi)\,d\tau\right].$$

(в) Покажем, что $\mathcal{U}_3\in U(T)$ и справедлива формула (147).

Рассмотрим начально-краевую задачу (142)–(144) при $j=3$. В правую часть равенства (142) при $j=3$ входит функция U_*^1, являющаяся решением начально-краевой задачи (125)–(127), а в равенства (125)–(127) входит функция U_*^0; поэтому нам необходимо исследовать структуру функций U_*^0, $\frac{\partial}{\partial x_3}U_*^0$, U_*^1, $\frac{\partial}{\partial x_3}U_*^1$.

Для функций $U_*^0(x_3,t)$, $\frac{\partial}{\partial x_3}U_*^0(x_3,t)$ имеют место представления, аналогичные формуле (153):

$$U_*^0(x_3,t)=d_0^*(x_3,t)\theta\big(t-|\tau_1^*(x_3)|\big),\tag{158}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}U_*^0(x_3,t)=d_1^*(x_3)\frac{\partial}{\partial t}\theta\big(t-|\tau_1^*(x_3)|\big)+d_2^*(x_3,t)\theta\big(t-|\tau_1^*(x_3)|\big),\tag{158a}$$

где

$$d_0^*(x_3,t)=S_1^*\big(\tau_1^*(x_3)\big)\left[\frac{a_1^*(0)}{2}+\widetilde{W}_{3*}\big(\tau_1^*(x_3),t\big)\right],$$

$$d_1^*(x_3)\quad=-\sqrt{\frac{\rho}{c_1^*(x_3)}}\,d_0^*\big(x_3,|\tau_1^*(x_3)|\big)\,\mathrm{sign}(x_3),$$

$$d_2^*(x_3,t)=\frac{\partial}{\partial x_3}d_0^*(x_3,t).$$

Так как начально-краевая задача (125)–(127) аналогична начально-краевой задаче (2.1)–(2.3) из раздела 3.2 с первым слагаемым в правой части и начально-краевой задаче (142)–(144) при $j = 2$ со вторым слагаемым в правой части, полагая $c = c_{44}$, $c_1 = c_{12}^*$, $f = U_*^0$ в задаче (2.1)–(2.3) и формуле (2.19) из раздела 3.2 и $c_{44} = c_{44}^*$, $\widetilde{c}_{44} = c_{44}^*$ в задаче (142)–(144) при $j = 2$, получаем

$$U_*^1(x_3,t) = \theta\Big(t - \psi_{14}^{**}\big(\tau_4^*(x_3)\big)\Big) D_5\big(\tau_4^*(x_3),t\big) + \theta\Big(t - \big|\tau_4^*(x_3)\big|\Big) D_6(x_3,t), \quad (159)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} U_*^1(x_3,t) = \frac{\partial}{\partial t}\theta\Big(t - \psi_{14}^{**}\big(\tau_4^*(x_3)\big)\Big) D_7(x_3,t) + \theta\Big(t - \psi_{14}^{**}\big(\tau_4^*(x_3)\big)\Big) D_8(x_3,t)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t}\theta\Big(t - \big|\tau_4^*(x_3)\big|\Big) D_9(x_3,t) + \theta\Big(t - \big|\tau_4^*(x_3)\big|\Big) D_{10}(x_3,t), \quad (160)$$

где

$$D_5(y,t) = S_4^*(y) \sum_{i=1}^{n} \int_{Y_{*i}(y,t)}^{Y_i^*(y,t)} \Big[c_{12}^*\big(\tau_4^*(\xi)\big) d_3^*(y,t,\xi) + c_{12}^*\big(\tau_4^*(\xi)\big) D_4^*(y,t,\xi)\Big]\, d\xi,$$

$$D_6(x_3,t) = \sqrt{\frac{c_{44}^*(0)}{\rho}} S_4^*\big(\tau_4^*(x_3)\big) \int_0^{t-|\tau_4^*(x_3)|} \Big[\theta\big(t-\tau-|\tau_4^*(x_3)|\big) - \widehat{G}_4^*(x_3,t-\tau)\Big]$$
$$\times \left[\frac{a_1^*(0)}{2}\theta(\tau) + U_*^0(0,\tau)\right] d\tau,$$

$\psi_{14}^{**}(y)$ — функция, построенная по алгоритму из раздела 3.2 для функции $g(y) = g_{14}^{**}(y) = \tau_1^*(\tau_4^{*-1}(y))$, $Y_{*i}(y,t)$ и $Y_i^*(y,t)$ — решения уравнения $t - |\xi - y| = |g_{14}^{**}(\xi)|$ относительно переменной ξ. Полагая $c = c_{44}$, $c_1 = c_{12}^*$, $f = U_*^0$ в разделе 3.2, получим

$$d_j^*(y,t,\xi) = d_j(y,t,\xi) \quad j = 1,2,3,$$

$$D_1^*(y) = \frac{i d_{*0}\big(\tau_4^{*-1}(y)\big)}{2S_4^*(y)\sqrt{\rho c_{44}^*(y)}},$$

$$D_2^*(y,t) = \frac{i d_{*1}\big(\tau_4^{*-1}(y),t\big)}{2S_4^*(y)\sqrt{\rho c_{44}^*(y)}},$$

$$D_3^*(y,t-\tau,\xi) = i\left[\frac{1}{S_4^*(\xi)\sqrt{\rho c_{44}^*(\xi)}} R_{4\xi}^{*\prime}(y,t-\tau,\xi) - R_4^*(y,t-\tau,\xi)\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{S_4^*(\xi)\sqrt{\rho c_{44}^*(\xi)}}\right]$$
$$\times \Big[d_{*0}\big(\tau_4^{*-1}(\xi)\big) + d_{*1}\big(\tau_4^{*-1}(\xi),\tau\big)\Big],$$

$$D_4^*(y,t,\xi) = \Big[D_1^*(\xi) - D_2^*\big(\xi, t - |\xi - y|\big)\Big]\operatorname{sign}(\xi - y) + \int\limits_{|g_{14}^{**}(\xi)|}^{t-|\xi-y|} D_3^*(y,t-\tau,\xi)\, d\tau,$$

$$S_4^*(y) = \left(\frac{c_{44}^*(0)}{c_{44}^*\big(\tau_4^{*-1}(y)\big)}\right)^{1/4}, \quad \tau_4^*(x_3) = \int_0^{x_3} \sqrt{\frac{\rho}{c_{44}^*(\xi)}}\, d\xi,$$

$R_4^*(y,t,y^0)$ — решение интегрального уравнения (1.12) для

$$q(y) = q_4^*(y) = \frac{S_4^{*\prime\prime}(y)}{S_4^*(y)} - 2\left[\frac{S_4^{*\prime}(y)}{S_4^*(y)}\right]^2,$$

$\widehat{G}_4^*(x_3,t)$ — решение интегрального уравнения

$$\widehat{G}_4^*(x_3,t) = \frac{1}{2}\theta\Big(t - \big|\tau_4^*(x_3)\big|\Big) \int\limits_{\frac{\tau_4^*(x_3)-t}{2}}^{\frac{\tau_4^*(x_3)+t}{2}} \int\limits_{|\xi|}^{t-|\xi-\tau_4^*(x_3)|} q_4^*(\xi)\left(\frac{1}{2} + \widehat{G}_4^*(\xi,\tau)\right) d\tau\, d\xi,$$

$$D_7(x_3,t) = D_5\big(\tau_4^*(x_3),t\big)\frac{\partial}{\partial x_3}\psi_{14}^{**}\big(\tau_4^*(x_3)\big)\sqrt{\frac{\rho}{c_{44}^*(x_3)}},$$

$$D_8(x_3,t) = \frac{\partial}{\partial x_3} D_5\big(\tau_4^*(x_3),t\big),$$

$$D_9(x_3,t) = D_6(x_3,t)\sqrt{\frac{\rho}{c_{44}^*(x_3)}},$$

$$D_{10}(x_3,t) = \frac{\partial}{\partial x_3} D_6(x_3,t).$$

Итак, мы выяснили структуру функции $\frac{\partial}{\partial x_3}U_*^1$, входящей в правую часть равенства (142) при $j = 3$. Теперь запишем представление решения $\mathcal{U}_3(x_3,t)$ начально-краевой задачи (142)–(144) при $j = 3$.

Применяя к равенствам (142)–(144) при $j = 3$ рассуждения из раздела 3.2, которые использовались при переходе от равенств (2.1)–(2.3) к (2.16), получим

$$\mathcal{W}_3(y,t) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \theta\big(t - \tau - |\xi - y|\big)\left[\frac{1}{2} + R_4(y, t-\tau, \xi)\right]$$
$$\times \frac{i}{\rho S_4(\xi)}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\widetilde{c}_{44}(x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}U_*^1(x_3,\tau)\right)\right]\Bigg|_{x_3=\tau_4^{-1}(\xi)} d\xi\, d\tau,$$

где

$$\mathcal{W}_3(y,t) = \frac{\mathcal{U}_3\big(\tau_4^{-1}(y),t\big)}{S_4(y)}.$$

Используя рассуждения, применявшиеся при получении формулы (155), приходим к равенству

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_3(y,t) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \theta\big(t-\tau-|\xi-y|\big)\theta\big(\tau-|g_2(\xi)|\big)\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)M_1(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \\ + \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \theta\big(t-\tau-|\xi-y|\big)\theta\big(\tau-|g_2(\xi)|\big)\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)M_2(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \\ + \frac{\partial}{\partial y} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \theta\big(t-\tau-|\xi-y|\big)\theta\big(\tau-|g_2(\xi)|\big)\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)M_3(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \\ + \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \theta\big(t-\tau-|\xi-y|\big)\theta\big(\tau-|g_2(\xi)|\big)\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)M_4(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \\ + \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \theta\big(t-\tau-|\xi-y|\big)\theta\big(\tau-|g_3(\xi)|\big)\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)M_5(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \\ + \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \theta\big(t-\tau-|\xi-y|\big)\theta\big(\tau-|g_3(\xi)|\big)\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)M_6(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \\ + \frac{\partial}{\partial y} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \theta\big(t-\tau-|\xi-y|\big)\theta\big(\tau-|g_3(\xi)|\big)\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)M_7(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \\ + \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \theta\big(t-\tau-|\xi-y|\big)\theta\big(\tau-|g_3(\xi)|\big)\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)M_8(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,\end{aligned} \tag{161}$$

где

$$g_2(x_3) = \psi_{14}^{**}\big(\tau_4^*\big(\tau_4^{-1}(x_3)\big)\big), \quad g_3(x_3) = \tau_4^*\big(\tau_4^{-1}(x_3)\big), \quad a_6(\xi) = \frac{i}{\rho S_4(\xi)},$$

$$M_1(\xi,\tau) = \frac{1}{2}D_7\big(\tau_4^{-1}(\xi),\tau\big)a_6(\xi)\sqrt{\frac{\rho}{c_{44}^*(\xi)}},$$

$$M_2(\xi,\tau) = -\frac{1}{2}D_7\big(\tau_4^{-1}(\xi),\tau\big)a_6'(\xi)\sqrt{\frac{\rho}{c_{44}^*(\xi)}},$$

$$M_3(\xi,\tau) = \frac{1}{2}D_8\big(\tau_4^{-1}(\xi),\tau\big)a_6(\xi)\sqrt{\frac{\rho}{c_{44}^*(\xi)}},$$

$$M_4(\xi,\tau)=D_7\big(\tau_4^{-1}(\xi),\tau\big)\sqrt{\frac{\rho}{c^*_{44}(\xi)}}\left[a_6(\xi)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\tau}R_4(y,t-\tau,\xi)\right.$$
$$\left.-a_6'(\xi)\frac{\partial}{\partial\tau}R_4(y,t-\tau,\xi)\right]$$
$$-D_8\big(\tau_4^{-1}(\xi),\tau\big)\sqrt{\frac{\rho}{c^*_{44}(\xi)}}\left[\frac{1}{2}a_6'(\xi)-a_6(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}R_4(y,t-\tau,\xi)\right.$$
$$\left.-a_6'(\xi)R_4(y,t-\tau,\xi)\right],$$

$$M_5(\xi,\tau)=\frac{1}{2}D_9\big(\tau_4^{-1}(\xi),\tau\big)a_6(\xi)\sqrt{\frac{\rho}{c^*_{44}(\xi)}},$$
$$M_6(\xi,\tau)=-\frac{1}{2}D_9\big(\tau_4^{-1}(\xi),\tau\big)a_6'(\xi)\sqrt{\frac{\rho}{c^*_{44}(\xi)}},$$
$$M_7(\xi,\tau)=\frac{1}{2}D_{10}\big(\tau_4^{-1}(\xi),\tau\big)a_6(\xi)\sqrt{\frac{\rho}{c^*_{44}(\xi)}},$$

$$M_8(\xi,\tau)=D_9\big(\tau_4^{-1}(\xi),\tau\big)\sqrt{\frac{\rho}{c^*_{44}(\xi)}}\left[a_6(\xi)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\tau}R_4(y,t-\tau,\xi)\right.$$
$$\left.-a_6'(\xi)\frac{\partial}{\partial\tau}R_4(y,t-\tau,\xi)\right]$$
$$-D_{10}(\tau_4^{-1}(\xi),\tau)\sqrt{\frac{\rho}{c^*_{44}(\xi)}}\left[\frac{1}{2}a_6'(\xi)-a_6(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}R_4(y,t-\tau,\xi)\right.$$
$$\left.-a_6'(\xi)R_4(y,t-\tau,\xi)\right].$$

Введем обозначения

$$M_j^*(y,t)=\theta\big(t-\psi_2(y)\big)\sum_{i=1}^{n_2}\int\limits_{z_{*i}(y,t)}^{z_i^*(y,t)}\int\limits_{|g_1(\xi)|}^{t-|\xi-y|}\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)M_j(\xi)\,d\tau\,d\xi,\quad j=1,2,3,4,$$
$$M_j^*(y,t)=\theta\big(t-\psi_3(y)\big)\sum_{i=1}^{n_3}\int\limits_{w_{*i}(y,t)}^{w_i^*(y,t)}\int\limits_{|g_3(\xi)|}^{t-|\xi-y|}\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)M_j(\xi)\,d\tau\,d\xi,\quad j=5,6,7,8,$$

где $\psi_2(y)$ и $\psi_3(y)$ — функции, построенные по алгоритму из раздела 3.2 для функций $g_2(y)$ и $g_3(y)$ соответственно, $z_{*i}(y,t)$ и $z_i^*(y,t)$ — решения уравнения $t-|\xi-y|=|g_2(\xi)|$ относительно переменной ξ, $w_{*i}(y,t)$ и $w_i^*(y,t)$ — решения уравнения $t-|\xi-y|=|g_3(\xi)|$ относительно переменной ξ.

Тогда в терминах функций $M_j^*(y,t)$, $j=\overline{1,8}$, равенство (161) запишется следующим образом:

$$\mathcal{W}_3(y,t) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial t}\Big[M_1^*(y,t) + M_5^*(y,t)\Big] + \frac{\partial}{\partial t}\Big[M_2^*(y,t) + M_6^*(y,t)\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[M_3^*(y,t) + M_7^*(y,t)\Big] + \Big[M_4^*(y,t) + M_8^*(y,t)\Big].$$

Для первого слагаемого имеем

$$\lim_{y\to+0} \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} M_1^*(y,t) = 2\theta(t)\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}\big(z_1^*(0,t)\big)\big) M_1\big(z_1^*(0,t), t - z_1^*(0,t)\big)\frac{d}{dt} z_1^*(0,t). \qquad (162)$$

Следовательно, используя формулы (162), (156) и рассуждения, проведенные в разделе 3.2, при $y=0$ получим равенство (147), т. е.

$$\mathcal{U}_3(0,t) = A_3^1(t)\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}\big(\alpha_3^1(t)\big)\big) + \int_0^{\alpha_3^1(t)} \widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big) B_3^1(\xi,t)\,d\xi + A_3^2(t)\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}\big(\alpha_3^2(t)\big)\big) + \int_0^{\alpha_3^2(t)} \widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big) B_3^2(\xi,t)\,d\xi,$$

где

$$\alpha_3^1(t) = z_1^*(0,t), \quad \alpha_3^2(t) = w_1^*(0,t),$$
$$A_3^1(t) = 2M_1\big(\alpha_3^1(t), t - \alpha_3^1(t)\big)\frac{d}{dt}\alpha_3^{1\prime}(t),$$
$$A_3^2(t) = 2M_5\big(\alpha_3^2(t), t - \alpha_3^2(t)\big)\frac{d}{dt}\alpha_3^{2\prime}(t),$$
$$B_3^1(\xi,t) = 2\int_{|g_2(\xi)|}^{t-|\xi|} \big[M_2(\xi,\tau) + M_3(\xi,\tau) + M_4(\xi,\tau)\big]\,d\tau,$$
$$B_3^2(\xi,t) = 2\int_{|g_3(\xi)|}^{t-|\xi|} \big[M_6(\xi,\tau) + M_7(\xi,\tau) + M_8(\xi,\tau)\big]\,d\tau.$$

(г) Покажем, что $\mathcal{U}_4 \in U(T)$ и справедлива формула (146) при $j=4$.

Рассмотрим начально-краевую задачу (142)–(144) при $j=4$. В правую часть равенства (142) при $j=4$ входит функция $\widetilde{U}^0$, являющаяся решением начально-краевой задачи (135)–(137).

Решение $\widetilde{U}^0(x_3,t)$ начально-краевой задачи (165)–(167) имеет интегральное представление

$$\widetilde{w}^{\,0}(y,t)=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\theta\big(t-\tau-|\xi-y|\big)\left[\frac{1}{2}+R_1(y,t-\tau,\xi)\right] \\ \times\frac{i}{\rho S_1(\xi)}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\widetilde{c}_{11}(x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}U_*^0(x_3,\tau)\right)\right]\bigg|_{x_3=\tau_1^{-1}(\xi)}d\xi\,d\tau,\quad(163)$$

где

$$\widetilde{w}^{\,0}(y,t)=\frac{\widetilde{U}^0\big(\tau_1^{-1}(y),t\big)}{S_1(y)}.$$

Используя формулу (158а) и рассуждения, которые применялись при выводе формулы (155), получим

$$\widetilde{w}^{\,0}(y,t)=\frac{\partial^2}{\partial y\partial t}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\theta\big(t-\tau-|\xi-y|\big)\theta\big(\tau-|g_4(\xi)|\big)\widetilde{c}_{11}\big(\tau_1^{-1}(\xi)\big)M_9(\xi)\,d\xi\,d\tau \\ +\frac{\partial}{\partial y}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\theta\big(t-\tau-|\xi-y|\big)\theta\big(\tau-|g_4(\xi)|\big)\widetilde{c}_{11}\big(\tau_1^{-1}(\xi)\big)M_{10}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \\ +\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\theta\big(t-\tau-|\xi-y|\big)\theta\big(\tau-|g_4(\xi)|\big)\widetilde{c}_{11}\big(\tau_1^{-1}(\xi)\big)M_{11}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \\ +\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\theta\big(t-\tau-|\xi-y|\big)\theta\big(\tau-|g_4(\xi)|\big)\widetilde{c}_{11}\big(\tau_1^{-1}(\xi)\big)M_{12}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$g_4(x_3)=\tau_1^*\big(\tau_1^{-1}(x_3)\big),\quad a_7(\xi)=\frac{1}{\rho S_1(\xi)}\sqrt{\frac{\rho}{c_{11}^*(\xi)}},$$

$$M_9(\xi)=\frac{1}{2}d_1^*\big(\tau_1^{-1}(\xi)\big)a_7(\xi),$$

$$M_{10}(\xi,\tau)=\frac{1}{2}d_2^*\big(\tau_4^{-1}(\xi),\tau\big)a_7(\xi),$$

$$M_{11}(\xi,\tau)=-\frac{1}{2}d_2^*\big(\tau_1^{-1}(\xi),\tau\big)a_7'(\xi),$$

$$M_{12}(\xi,\tau)=d_1^*\big(\tau_1^{-1}(\xi)\big)\left[a_7(\xi)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\tau}R_1(y,t-\tau,\xi)-a_7'(\xi)\frac{\partial}{\partial\tau}R_1(y,t-\tau,\xi)\right] \\ -d_2^*\big(\tau_4^{-1}(\xi),\tau\big)\left[\frac{1}{2}a_7'(\xi)-a_7(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}R_1(y,t-\tau,\xi) \\ -a_7'(\xi)R_1(y,t-\tau,\xi)\right].$$

Введем обозначения

$$M_9^*(y,t) = \theta\big(t-\psi_4(y)\big)\sum_{i=1}^{n_4}\int\limits_{l_{*i}(y,t)}^{l_i^*(y,t)}\int\limits_{|g_4(\xi)|}^{t-|\xi-y|}\widetilde{c}_{11}\big(\tau_1^{-1}(\xi)\big)M_9(\xi)\,d\tau\,d\xi,$$

$$M_j^*(y,t) = \theta\big(t-\psi_4(y)\big)\sum_{i=1}^{n_4}\int\limits_{l_{*i}(y,t)}^{l_i^*(y,t)}\int\limits_{|g_4(\xi)|}^{t-|\xi-y|}\widetilde{c}_{11}\big(\tau_1^{-1}(\xi)\big)M_j(\xi,\tau)\,d\tau d\xi, \quad j{=}10,11,12,$$

где $\psi_4(y)$ — функция, построенная по алгоритму из раздела 3.2 для функции $g_4(y)$, $l_{*i}(y,t)$ и $l_i^*(y,t)$ — решения уравнения $t-|\xi-y| = |g_4(\xi)|$ относительно переменной ξ.

Тогда в терминах $M_j^*(y,t)$, $j = 9, 10, 11, 12$, функция $\widetilde{w}^{\,0}(y,t)$ запишется следующим образом:

$$\widetilde{w}^{\,0}(y,t) = \frac{\partial^2}{\partial y\partial t}M_9^*(y,t) + \frac{\partial}{\partial y}M_{10}^*(y,t) + \frac{\partial}{\partial t}M_{11}^*(y,t) + M_{12}^*(y,t).$$

Для первого слагаемого имеем место формула

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial t}M_9^*(y,t) = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\theta\big(t-\psi_4(y)\big)\sum_{i=1}^{n_4}\int_{l_{*i}(y,t)}^{l_i^*(y,t)}\widetilde{c}_{11}\big(\tau_1^{-1}(\xi)\big)M_9(\xi)\,d\xi\right\}. \quad (164)$$

Используя формулу (164) и рассуждения, которые применялись при выводе формулы (155), получим

$$\widetilde{w}^0(y,t) = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\theta\big(t-\psi_4(y)\big)\sum_{i=1}^{n_4}\int_{l_{*i}(y,t)}^{l_i^*(y,t)}\widetilde{c}_{11}\big(\tau_1^{-1}(\xi)\big)M_9(\xi)\,d\xi\right\}$$
$$+\,\theta\big(t-\psi_4(y)\big)\sum_{i=1}^{n_4}\int_{l_{*i}(y,t)}^{l_i^*(y,t)}\widetilde{c}_{11}\big(\tau_1^{-1}(\xi)\big)M_{13}(y,t,\xi)\,d\xi,$$

где

$$M_{13}(y,t,\xi) = M_{10}\big(\xi, t-|y-\xi|\big)\,\mathrm{sign}(y-\xi) + M_{11}(\xi,t) + \int\limits_{|g_4(\xi)|}^{t-|\xi-y|}M_{12}(\xi,\tau)\,d\tau.$$

Следовательно, для $\widetilde{U}^0\big(\tau_4^{-1}(\xi),\tau\big)$ имеем

$$\widetilde{U}^0\big(\tau_4^{-1}(\xi),\tau\big) = \frac{\partial}{\partial\xi}\theta\big(\tau-\psi_5(\xi)\big)I_1[\widetilde{c}_{11}](\xi,\tau) + \theta\big(\tau-\psi_5(\xi)\big)I_2[\widetilde{c}_{11}](\xi,\tau),$$

где

$$g_7(\xi) = S_1\big(g_6(\xi)\big)g_6'(\xi), \quad g_6(\xi) = \tau_1\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big), \quad \psi_5(\xi) = \psi_4\big(g_6(\xi)\big),$$

$$I_1[\widetilde{c}_{11}](\xi,\tau) = g_7(\xi)\sum_{i=1}^{n_4}\int_{l_{*i}(g_6(\xi),\tau)}^{l_i^*(g_6(\xi),\tau)} \widetilde{c}_{11}\big(\tau_1^{-1}(\zeta)\big)M_9(\zeta)\,d\zeta,$$

$$I_2[\widetilde{c}_{11}](\xi,\tau) = g_7(\xi)\sum_{i=1}^{n_4}\int_{l_{*i}(g_6(\xi),\tau)}^{l_i^*(g_6(\xi),\tau)} \widetilde{c}_{11}\big(\tau_1^{-1}(\zeta)\big)M_{13}\big(g_6(\xi),\tau,\zeta\big)\,d\zeta.$$

Итак, мы выяснили структуру функции $\widetilde{U}^0$. Теперь запишем представление решения $\mathcal{U}_4(x_3,t)$ начально-краевой задачи (142)–(144) при $j=4$.

Применяя к равенствам (142)–(144) при $j=4$ рассуждения из раздела 3.2, которые использовались при переходе от (2.1)–(2.3) к (2.16), получим

$$\mathcal{W}_4(y,t) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \theta\big(t-\tau-|\xi-y|\big)\left[\frac{1}{2}+R_4(y,t-\tau,\xi)\right] \times \frac{-i}{\rho S_4(\xi)}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{12}(x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}\widetilde{U}^0(x_3,\tau)\right)\right]\bigg|_{x_3=\tau_4^{-1}(\xi)} d\xi\,d\tau, \quad (165)$$

где

$$\mathcal{W}_4(y,t) = \frac{\mathcal{U}_4\big(\tau_4^{-1}(y),t\big)}{S_4(y)}.$$

Рассмотрим правую часть равенства (165) как сумму интегралов

$$\mathcal{W}_4(y,t) = \sum_{i=1}^{6} J_j^0[\widetilde{c}_{11}](y,t), \quad (166)$$

где

$$J_j^0[\widetilde{c}_{11}](y,t) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \theta\big(t-\tau-|\xi-y|\big)\left[\frac{1}{2}+R_4(y,t-\tau,\xi)\right]J_j[\widetilde{c}_{11}](\xi,\tau)\,d\tau d\xi$$

при $j=\overline{1,6}$,

$$J_1[\widetilde{c}_{11}](\xi,\tau) = A_2(\xi)\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}\Big[\theta\big(t-\psi_5(\xi)\big)I_1[\widetilde{c}_{11}](\xi,\tau)\Big],$$

$$J_2[\widetilde{c}_{11}](\xi,\tau) = -A_2(\xi)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[\theta\big(t-\psi_5(\xi)\big)\frac{\partial}{\partial\xi}\big(I_1[\widetilde{c}_{11}](\xi,\tau)\big)\right],$$

$$J_3[\widetilde{c}_{11}](\xi,\tau) = A_2(\xi)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\Big[\theta\big(t-\psi_5(\xi)\big)I_2[\widetilde{c}_{11}](\xi,\tau)\Big],$$

$$J_4[\widetilde{c}_{11}](\xi,\tau) = A_1(\xi)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\Big[\theta\big(t-\psi_5(\xi)\big)I_1[\widetilde{c}_{11}](\xi,\tau)\Big],$$

$$J_5[\widetilde{c}_{11}](\xi,\tau) = -A_1(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\Big[\theta\big(t-\psi_5(\xi)\big)\frac{\partial}{\partial\xi}\big(I_1[\widetilde{c}_{11}](\xi,\tau)\big)\Big],$$

$$J_6[\widetilde{c}_{11}](\xi,\tau) = A_1(\xi)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\Big[\theta\big(t-\psi_5(\xi)\big)I_2[\widetilde{c}_{11}](\xi,\tau)\Big],$$

$$A_1(\xi) = \frac{-i}{\rho S_4(\xi)}\,\frac{d}{d\xi}\left[\frac{c_{12}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)}{\sqrt{c_{44}(\xi)}}\right],$$

$$A_2(\xi) = \frac{-i}{\rho S_4(\xi)}\frac{c_{12}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)}{c_{44}(\xi)}.$$

Слагаемые, содержащие производные порядка ниже третьего, исследуются аналогично разд. (а)–(в). Рассмотрим слагаемое, содержащее производную третьего порядка:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\theta\big(t-\tau-|\xi-y|\big)\left[\frac{1}{2}+R_4(y,t-\tau,\xi)\right]\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}\Big[\theta\big(t-\psi_5(\xi)\big)A_2(\xi)I_1[\widetilde{c}_{11}](\xi,\tau)\Big]$$

$$= \frac{\partial^3}{\partial y^3}\theta\big(t-\psi_6(y)\big)\sum_{i=1}^{n_6}\int_{z_{*i}(y,t)}^{z_i^*(y,t)}\int_{|g_8(\xi)|}^{t-|\xi-y|} I_1[\widetilde{c}_{11}](\xi,\tau)L_1(\xi)\,d\tau\,d\xi$$

$$+\,\theta\big(t-\psi_6(y)\big)\sum_{i=1}^{n_6}\int_{z_{*i}(y,t)}^{z_i^*(y,t)}\int_{|\psi_5(\xi)|}^{t-|\xi-y|} I_1[\widetilde{c}_{11}](\xi,\tau)L_2(y,t-\tau,\xi,\tau)\,d\tau\,d\xi,$$

где

$$L_1(\xi) = \frac{1}{2}A_2(\xi)g_7(\xi),$$

$$L_2(y,t-\tau,\xi,\tau) = A_2(\xi)g_7(\xi)\frac{\partial^3}{\partial y^3}R_4(y,t-\tau,\xi,\tau),$$

$\psi_6(y)$ — функция, построенная по алгоритму из раздела 3.2 для функции $\psi_5(y)$, $z_{*i}(y,t)$ и $z_i^*(y,t)$ — решения уравнения $t-|\xi-y| = |\psi_5(\xi)|$ относительно переменной ξ.

Для первого слагаемого справедлива формула

$$\lim_{y\to+0}\frac{\partial^3}{\partial y^3}\theta\big(t-\psi_6(y)\big)\sum_{i=1}^{n_6}\int_{z_{*i}(y,t)}^{z_i^*(y,t)}\int_{|g_8(\xi)|}^{t-|\xi-y|} I_1[\widetilde{c}_{11}](\xi,\tau)L_1(\xi)\,d\tau\,d\xi$$

$$= 2\theta(t)I_1[\widetilde{c}_{11}]\big(z_1^*(0,t),t-z_1^*(0,t)\big)L_1(t). \tag{167}$$

Используя формулы (166), (167) и рассуждения, проведенные в разделе 3.2, получим равенство (146) при $j = 4$, т. е.

$$\mathcal{U}_4(0,t) = A_4(t)\widetilde{c}_{11}\big(\tau_4^{-1}\big(\alpha_4(t)\big)\big) + \int_0^{\alpha_4(t)} \widetilde{c}_{11}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)B_4(\xi,t)\,d\xi,$$

где

$$\alpha_4(t) = z_1^*(0,t);$$

формулы для $A_4(t)$ и $B_4(\xi,t)$ мы не приводим ввиду их громоздкости.

(д) Включения $\mathcal{U}_j \in U(T)$ и формулы (146) и (148) при $j = 5, 6, 7, 8$ доказываются аналогично.

2.6. *Доказательство теорем* 1.10 *и* 1.11. Рассмотрим равенства (81)–(82). Решением задачи (81), (82) является функция

$$\phi^0(t) = \theta(t). \tag{168}$$

Равенства (77)–(80) в терминах функции

$$W_2^1(y,t) = \frac{1}{S_4(y)}\frac{\partial}{\partial t}U_2^1\big(\tau_4^{-1}(y),t\big) \tag{169}$$

принимают вид

$$\frac{\partial^2 W_2^1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 W_2^1}{\partial y^2} + q_4(y)\,W_2^1 - i\frac{1}{S_4(y)}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}e_{14}(x_3)\right]_{x_3=\tau_4^{-1}(y)}\delta(t), \tag{170}$$

$$W_2^1\big|_{t<0} = 0, \tag{171}$$

$$\left.\frac{\partial W_2^1}{\partial y}\right|_{y=0} = -ia_4(0)e_{14}(0)\delta(t). \tag{172}$$

Цель дальнейших рассуждений состоит в том, чтобы показать эквивалентность соотношений (170)–(172) некоторому интегральному соотношению и установить равносильность решения обратной задачи 4 решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Решение задачи (170)–(172) будем искать в виде

$$W_2^1(y,t) = w_1(y,t) + w_2(y,t), \tag{173}$$

где $w_1(y,t)$ — решение задачи

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + q_4(y)\,w_1 - i\frac{1}{S_4(y)}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}e_{14}(x_3)\right]_{x_3=\tau_4^{-1}(y)}\delta(t), \quad y > 0,\ t \in \mathbb{R}, \tag{174}$$

$$w_1\big|_{t<0} = 0, \tag{175}$$

$$\left.\frac{\partial w_1}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \tag{176}$$

а $w_2(y,t)$ — решение задачи

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + q_4(y)\, w_2, \quad y > 0,\ t \in \mathbb{R}, \tag{177}$$

$$w_2\big|_{t<0} = 0, \tag{178}$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial y}\bigg|_{y=0} = -ia_4(0)e_{14}(0)\delta(t). \tag{179}$$

Мы будем предполагать, что в равенстве (174) функции w_1 и q продолжены четным образом по y при $y < 0$, а функция e_{14} — нечетным. При этом равенство (176) будет выполняться автоматически. Тогда от (174)–(176) можно перейти к (174), (175) при $y \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

Используя рассуждения из раздела 3.1, можно показать, что равенства (174), (175) эквивалентны соотношению

$$w_1(y,t) = -i \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{2}\theta\big(t-\tau-|y-\xi|\big) + R_4(y,\xi,t-\tau)\right] \times \frac{1}{S_4(\xi)} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} e_{14}(x_3)\right)\bigg|_{x_3=\tau_4^{-1}(\xi)} \delta(t)\, d\xi\, d\tau, \tag{180}$$

где $R_4(y,y^0,t)$ — функция, описанная в разделе 3.1.

Введем обозначения

$$f_1(\xi) = \frac{i}{2S_4(\xi)} \sqrt{\frac{c_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)}{\rho}},$$

$$A(y,\xi,t-\tau) = \frac{\partial}{\partial \xi} R_4(y,\xi,t-\tau) f_1(\xi) + R_4(y,\xi,t-\tau) f_1'(\xi).$$

Тогда в терминах функций $f_1(\xi)$, $A(y,\xi,t)$ равенство (180) может быть записано в виде

$$w_1(y,t) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{y-t}^{y+t} e_{14}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big) f_1(\xi)\, d\xi - \int_{y-t}^{y+t} e_{14}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big) f_1'(\xi)\, d\xi + \int_{y-t}^{y+t} e_{14}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big) A(y,\xi,t)\, d\xi.$$

При $y = 0$ из последнего соотношения получим

$$w_1(0,t) = 2e_{14}\big(\tau_4^{-1}(t)\big) f_1(t) + \int_0^t e_{14}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big) K(\xi,t)\, d\xi, \tag{181}$$

где

$$K(\xi,t) = -2\big[f_1'(\xi) + A(0,\xi,t)\big].$$

Решение задачи (177)–(179) будем искать в виде

$$w_2(y,t) = ie_{14}(0)a_4(0)\theta(t-y) + p_4(y,t), \tag{182}$$

где функция $p_4(y,t)$ является решением задачи

$$\frac{\partial^2 p_4}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p_4}{\partial y^2} + q_4(y)p_4 - ie_{14}(0)a_4(0)\theta(t-y)q_4(y), \quad y>0,\ t\in\mathbb{R}, \tag{183}$$

$$p_4\big|_{t<0} = 0, \tag{184}$$

$$\frac{\partial p_4}{\partial y}\bigg|_{y=0} = 0. \tag{185}$$

Продолжим функции $q_4(y)$ и $\theta(t-y)$ четным образом по y при $y<0$. При этом равенство (185) будет выполняться автоматически. Далее, используя рассуждения, проведенные в разделе 3.1, будем считать функцию $p_4(y,t)$ известной и обладающей свойствами (1.16).

Следовательно, при $y=0$ из равенства (182) имеем

$$w_2(0,t) = ie_{14}(0)a_4(0)\theta(t) + p_4(0,t). \tag{186}$$

Переходя в равенствах (56) и (186) к пределу при $t\to 0$, получим

$$e_{14}(0) = \frac{h_4'(0)}{ia_4(0)\big(c_{44}(0)+1\big)}. \tag{187}$$

Из (80), (181), (186) вытекает

$$e_{14}(y) = H_4\big(\tau_4(y)\big) + \int_0^{\tau_4(y)} e_{14}(\xi)K_4\big(\xi,\tau_4(y)\big)\,d\xi, \tag{188}$$

где

$$y = \tau_4^{-1}(t),$$
$$H_4(t) = \frac{1}{2f_1(t)}\left[h_4'(t) - \frac{h_4'(0)}{c_{44}(0)+1} + p_4(0,t)\right],$$
$$K_4(\xi,t) = \frac{K(\xi,t)}{2f_1(t)}.$$

Уравнение (188) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода.

Так как $K_4(\xi, x_3)$ — кусочно-непрерывная функция при $0 \le \xi \le x_3 \le \tau_4(T)$ и

$$H_4(y) \in \mathbf{C}[0, T/2],$$
$$R_4(\xi, y) \in \mathbf{C}\big(\Omega(T)\big),$$
$$\Omega(T) = \big\{(\xi, y) : 0 \le \xi \le T/2\big\},$$

уравнение (188) имеет единственное непрерывное решение $e_{14}(y)$ при $y \in [0, T/2]$.

2.7. *Доказательство теоремы* 1.12. С учетом (168) равенства (77)–(80) в терминах функции

$$U^1(x_3, t) = \frac{\partial}{\partial t} U_2^1(x_3, t)$$

принимают вид

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} U^1 = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44} \frac{\partial}{\partial x_3} U^1\right) - i \frac{\partial}{\partial x_3} e_{14}(x_3)\delta(t), \tag{189}$$
$$U^1\big|_{t<0} = 0, \tag{190}$$
$$\left(c_{44} \frac{\partial}{\partial x_3} U^1\right)\bigg|_{x_3=0} = 0, \tag{191}$$
$$U^1\big|_{x_3=0} = h_4(t). \tag{192}$$

Наряду с (189)–(192) рассмотрим аналогичные равенства

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} U^{1*} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c^*_{44} \frac{\partial}{\partial x_3} U^{1*}\right) - i \frac{\partial}{\partial x_3} e^*_{14}(x_3)\delta(t), \tag{193}$$
$$U^{1*}\big|_{t<0} = 0, \tag{194}$$
$$\left(c^*_{44} \frac{\partial}{\partial x_3} U^{1*}\right)\bigg|_{x_3=0} = 0, \tag{195}$$
$$U^{1*}\big|_{x_3=0} = h^*_4(t). \tag{196}$$

Обозначим

$$\widetilde{U}^1 = U^1 - U^{1*}, \quad \widetilde{c}_{44} = c_{44} - c^*_{44}, \quad \widetilde{e}_{14} = e_{14} - e^*_{14}, \quad \widetilde{h}_4' = h_4' - h_4^{*\prime}.$$

Тогда для функций $\widetilde{U}^1$, $\widetilde{c}_{44}$, $\widetilde{e}_{14}$, $\widetilde{h}_4$ получим следующую задачу:

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\widetilde{U}^1 = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial}{\partial x_3}\widetilde{U}^1\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\widetilde{c}_{44}\frac{\partial}{\partial x_3}U^{1*}\right) - i\frac{\partial}{\partial x_3}\widetilde{e}_{14}(x_3)\delta(t), \quad (197)$$

$$\widetilde{U}^1\big|_{t<0} = 0, \quad (198)$$

$$\left(c_{44}\frac{\partial}{\partial x_3}\widetilde{U}^1\right)\bigg|_{x_3=0} = -i\widetilde{e}_{14}(0)\delta(t) - \left(\widetilde{c}_{44}\frac{\partial}{\partial x_3}U^{1*}\right)\bigg|_{x_3=0}, \quad (199)$$

$$\widetilde{U}^1\big|_{x_3=0} = \widetilde{h}_4'(t). \quad (200)$$

Решение $\widetilde{U}^1(x_3,t)$ начально-краевой задачи (197)–(199) будем искать в виде

$$\widetilde{U}^1(x_3,t) = \sum_{j=1}^{4}\widetilde{\mathcal{U}}_j^1(x_3,t), \quad (201)$$

где функции $\widetilde{\mathcal{U}}_j^1(x_3,t)$, $j=\overline{1,4}$, являются решениями следующих задач:

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\widetilde{\mathcal{U}}_j^1 = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(c_{44}\frac{\partial\widetilde{\mathcal{U}}_j^1}{\partial x_3}\right) + f_j(x_3,t), \quad x_3>0, \quad (202)$$

$$\widetilde{\mathcal{U}}_j^1\big|_{t<0} = 0, \quad (203)$$

$$\left(c_{44}\frac{\partial\widetilde{\mathcal{U}}_j^1}{\partial x_3}\right)\bigg|_{x_3=0} = g_j(t), \quad j=\overline{1,4}, \quad (204)$$

где

$$\begin{aligned}
&f_1(x_3,t) = i\frac{\partial}{\partial x_3}\widetilde{e}_{14}(x_3)\delta(t),\\
&f_2(x_3,t) = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\widetilde{c}_{44}\frac{\partial}{\partial x_3}U^{1*}\right),\\
&f_3 = 0, \quad f_4 = 0,\\
&g_1 = 0, \quad g_2 = 0,\\
&g_3(t) = -i\widetilde{e}_{14}(0)\delta(t),\\
&g_4(t) = -\widetilde{c}_{44}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_3}U^{1*}(x_3,t)\right)\bigg|_{x_3=0}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим равенства (202)–(204) при $j=1$. С помощью рассуждений, аналогичных тем, которые использовались в предыдущем пункте при выводе формулы (181), получим

$$\widetilde{\mathcal{U}}_1^1(0,t) = 2\widetilde{e}_{14}\big(\tau_4^{-1}(t)\big)f_1(t) + \int_0^t \widetilde{e}_{14}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)K(\xi,t)\,d\xi. \tag{205}$$

Рассмотрим равенства (202)–(204) при $j = 2$. Проведя рассуждения, аналогичные использовавшимся в предыдущем пункте, имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{w}_2^1(y,t) = \frac{\partial}{\partial y}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \theta\big(t-\tau-|y-\xi|\big)\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)f_5(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \\ + \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \theta\big(t-\tau-|y-\xi|\big)\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)f_6(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \end{aligned} \tag{206}$$

где

$$\widetilde{w}_2^1(y,t) = \frac{1}{S_4(y)}\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\mathcal{U}}_2^1\big(\tau_4^{-1}(y),t\big),$$

$$f_5(\xi) = \frac{1}{2}f_7(\xi)\left(\frac{\partial}{\partial x_3}U^{1*}\right)\bigg|_{x_3=\tau_4^{-1}(\xi)},$$

$$f_7(\xi) = \frac{1}{2S_4(\xi)}\sqrt{\frac{c_{44}(\xi)}{\rho}},$$

$$\begin{aligned} f_6(y,\xi,t-\tau) = \frac{\partial}{\partial \xi}R_4(y,\xi,t-\tau)f_7(\xi) \\ + R_4(y,\xi,t-\tau)f_7'(\xi) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}U^{1*}\right)\bigg|_{x_3=\tau_4^{-1}(\xi)} f_7'(\xi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U^{1*}(x_3,t) = S\big(\tau^*(x_3)\big)\Big[e_{14}\Big(\tau_4^{-1}\big(\tau^*(x_3)+t\big)\Big)f_1\big(\tau^*(x_3)+t\big) \\ - e_{14}\Big(\tau_4^{-1}\big(\tau^*(x_3)-t\big)\Big)f_1\big(\tau^*(x_3)-t\big)\Big] \\ + \int_{\tau^*(x_3)-t}^{\tau^*(x_3)+t} e_{14}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)K^*\big(\tau^*(x_3),\xi,t\big)\,d\xi, \end{aligned}$$

$$f_1^*(\xi) = \frac{i}{2S_4^*(\xi)}\sqrt{\frac{c_{44}^*\big(\tau_4^{-1*}(\xi)\big)}{\rho}},$$

$$K^*(y,\xi,t) = -2[f_1^{*\prime}(\xi) + A^*(y,\xi,t)],$$

$$A^*(y,\xi,t-\tau) = \frac{\partial}{\partial \xi}R_4^*(y,\xi,t-\tau)f_1^*(\xi) + R_4^*(y,\xi,t-\tau)f_1^{*\prime}(\xi).$$

Далее функцию U^{1*} будем считать известной. С учетом введенных обозначений равенство (206) запишется следующим образом:

$$\widetilde{w}_2^1(y,t) = \frac{\partial}{\partial y}\int_0^t \int_{y-(t-\tau)}^{y+(t-\tau)} \widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big) f_5(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau$$

$$+ \int_0^t \int_{y-(t-\tau)}^{y+(t-\tau)} \widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big) f_6(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau$$

$$= \int_0^t \Big[\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}\big(y+(t-\tau)\big)\big) f_5\big(y+(t-\tau),\tau\big)$$

$$- \widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}\big(y-(t-\tau)\big)\big) f_5\big(y-(t-\tau),\tau\big)\Big]\, d\tau$$

$$+ \int_0^t \int_{y-(t-\tau)}^{y+(t-\tau)} \widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big) f_6(y,\xi,t-\tau)\, d\xi\, d\tau.$$

Следовательно,

$$\widetilde{w}_2^1(0,t) = \int_0^t \big[\widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(t-\tau)\big) f_5(t-\tau,\tau) - \widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(t-\tau)\big) f_5(t-\tau,\tau)\big]\, d\tau$$

$$+ \int_0^t \int_{-t-\tau}^{t-\tau} \widetilde{c}_{44}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big) f_6(0,\xi,t-\tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{207}$$

Таким образом,

$$\big|\widetilde{w}_2^1(0,t)\big| = C\|\widetilde{c}_{44}\|(X). \tag{208}$$

Рассмотрим равенства (202)–(204) при $j=3$. Проведя рассуждения, аналогичные использовавшимся в предыдущем пункте при выводе формулы (186), получим

$$\widetilde{\mathcal{U}}_3^1(0,t) = \widetilde{e}_{14}(0)\theta(t)\big[ia_4(0) + p(0,t)\big]. \tag{209}$$

Рассмотрим равенства (202)–(204) при $j=4$. С помощью рассуждений, подобных тем, которые использовались в предыдущем пункте при выводе формулы (181), установим следующее соотношение:

$$\widetilde{w}_4^1(y,t) = -\theta(t-y)\widetilde{c}_{44}(0)\int_0^{t-y} f_8(\tau)\, d\tau + p_5(y,t), \tag{210}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{W}}_4^1(y,t) = \frac{1}{S_4(y)}\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\mathcal{U}}_4^1\big(\tau_4^{-1}(y),t\big),$$

$$f_8(\tau) = -a_4(0)\bigg(\frac{\partial}{\partial x_3}U^{1*}(x_3,\tau)\bigg)\bigg|_{x_3=0},$$

$p_5(y,t)$ — решение задачи

$$\frac{\partial^2 p_5}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p_5}{\partial y^2} + q_4(y)p_5 - \theta(t-y)q_4(y)\widetilde{c}_{44}(0)\int_0^{t-y} f_8(\tau)\,d\tau,$$

$$y > 0,\ t \in \mathbb{R}, \tag{211}$$

$$p_5\big|_{t<0} = 0, \tag{212}$$

$$\frac{\partial p_5}{\partial y}\bigg|_{y=0} = 0. \tag{213}$$

Продолжим функции $q_4(y)$ и $\theta(t-y)$ четным образом по y при $y < 0$. При этом равенство (213) будет выполняться автоматически. Далее будем считать функцию $p_5(y,t)$ известной и обладающей свойствами (1.16). Следовательно, при $y = 0$ из равенства (210) получим

$$\widetilde{w}_4^1(0,t) = -\widetilde{c}_{44}(0)\theta(t)\left[\int_0^t f_8(\tau)\,d\tau + p_5(0,t)\right]; \tag{214}$$

значит,

$$\left|\widetilde{w}_4^1(0,t)\right| = C\|\widetilde{c}_{44}\|(X). \tag{215}$$

Переходя в равенствах (200), (207), (197) к пределу при $t \to 0$, имеем

$$\widetilde{e}_{14}(0) = \frac{\widetilde{h}_4'(0)}{ia_4(0)\big(c_{44}(0)+1\big)}. \tag{216}$$

Так как

$$\widetilde{h}_4'(t) = \sum_{j=1}^{4}\widetilde{\mathcal{U}}_j^1(0,t),$$

из равенств (200), (207), (214) вытекает

$$\widetilde{e}_{14}\big(\tau_4^{-1}(x_3)\big) = \int_0^{x_3}\widetilde{e}_{14}\big(\tau_4^{-1}(\xi)\big)K_1(\xi,x_3)\,d\xi + \widetilde{H}_4[\widetilde{c}_{44}](x_3), \tag{217}$$

где

$$\widetilde{H}_4[\widetilde{c}_{44}](x_3) = \frac{1}{2f_1(x_3)}\bigg\{\widetilde{h}_4'(x_3) - \frac{\widetilde{h}_4'(0)}{ia_4(0)\big(c_{44}(0)+1\big)}\big[ia_4(0) + p(0,x_3)\big]$$
$$- \widetilde{w}_2^1[\widetilde{c}_{44}](0,x_3) - \widetilde{w}_3^1[\widetilde{c}_{44}](0,x_3)\bigg\},$$

$$K_1(\xi,x_3) = \frac{K(\xi,x_3)}{2f_1(x_3)}.$$

Уравнение (217) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода. Поскольку $K_1(\xi, x_3)$ — кусочно-непрерывная функция при $0 \le \xi \le x_3 \le \tau_4(T)$ и

$$\widetilde{H}_4[\widetilde{c}_{44}](y) \in \mathbf{C}[0, T/2],$$
$$K_1(\xi, y) \in \mathbf{C}\big(\Omega(T)\big),$$
$$\Omega(T) = \big\{(\xi, y) : 0 \le \xi \le T/2\big\},$$

уравнение (217) имеет единственное непрерывное решение $\widetilde{e}_{14}(y)$ при $y \in [0, T/2]$.

Используя (217) и неравенство Гроноулла, получим

$$\|\widetilde{e}_{14}\|(X_0) \le C\Big\{\|\widetilde{h}_4\|_2(T_1) + \|\widetilde{c}_{44}\|(X)\Big\}, \tag{218}$$

где значения постоянных C, X, X_0, T_1 описаны в теореме 1.9.

§ 3. Приложение

3.1. *Интегральное представление решения начально-краевой задачи.* В этом разделе мы поясним одну из форм представления решения задачи вида (35)–(37). Для этого поставим задачу нахождения функции $w(y, t, \nu)$, удовлетворяющей при $y > 0$, $t \in \mathbb{R}$ равенствам

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q(y, \nu)w + f(y, t, \nu), \tag{1.1}$$

$$w\big|_{t<0} = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}w\bigg|_{y=+0} = g(t, \nu); \tag{1.3}$$

здесь $q(y, \nu) \in \mathbf{C}$ $(y \ge 0)$ — заданная функция.

Решение задачи (1.1)–(1.3) будем искать в виде

$$w(y, t, \nu) = w_1(y, t, \nu) + w_2(y, t, \nu),$$

где $w_1(y, t, \nu)$ — решение задачи

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + q(y, \nu)w_1 + f(y, t, \nu), \quad y > 0, \tag{1.4}$$

$$w_1\big|_{t<0} = 0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}w_1\bigg|_{y=+0} = 0, \tag{1.6}$$

$w_2(y,t,\nu)$ — решение задачи

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + q(y,\nu)w_2, \quad y > 0, \tag{1.7}$$

$$w_2\big|_{t<0} = 0, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} w_2\bigg|_{y=+0} = g(t,\nu). \tag{1.9}$$

Продолжим функции $q(y,\nu)$ и $f(y,t,\nu)$ в область $y<0$ четным образом. Тогда решение задачи (1.4)–(1.6) эквивалентно задаче нахождения четной по y функции $w_1(y,t,\nu)$, удовлетворяющей равенствам (1.4), (1.5).

Как хорошо известно (см. например [11]), решение задачи (1.4)–(1.6) представимо в виде

$$w_1(y,t,\nu) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \theta\big(t-\tau-|y-\xi|\big) G(y,t-\tau,\xi,\nu) f(\xi,\tau,\nu)\, d\xi\, d\tau, \tag{1.10}$$

где функция $G(y,t,y^0,\nu)$ (y^0 — параметр) является фундаментальным решением задачи Коши для оператора $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - q(y,\nu)$.

В работе [11] показано, что функция $G(y,t,y^0,\nu)$ имеет представление

$$G(y,t,y^0,\nu) = \theta\big(t - \big|y-y^0\big|\big)\left[\frac{1}{2} + R(y,t,y^0,\nu)\right], \tag{1.11}$$

где $R(y,t,y^0,\nu)$ определяется как решение интегрального уравнения

$$R(y,t,y^0,\nu) = \int_{\frac{y+y^0-t}{2}}^{\frac{y+y^0+t}{2}} \int_{|\xi-y^0|}^{t-|\xi-y|} q(\xi,\nu)\left(\frac{1}{2} + R(\xi,\tau,y^0,\nu)\right) d\tau\, d\xi. \tag{1.12}$$

Из (1.12) вытекает, что функция $R(y,t,y^0,\nu)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered} R\big(y, \big|y-y^0\big|, y^0, \nu\big) = 0, \\ R(y,t,y^0,\nu) \in \mathbf{C}^1\big(\mathbb{R}; \mathbf{C}^2(D)\big), \\ D = \big\{(y,t,y^0) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R},\ y^0 \in \mathbb{R},\ t \geq \big|y-y^0\big|\big\}, \\ \frac{\partial}{\partial t} R(y,t,y^0,\nu)\bigg|_{y=0,t=y^0} = \frac{1}{4}\int_0^{y^0} q(\xi,\nu)\, d\xi. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Как показано в [12], решение задачи (1.7)–(1.9) имеет представление

$$w_2(y,t,\nu) = \theta\big(t-|y|\big)\left[p(y,t,\nu) - \int_0^{t-|y|} g(\tau,\nu)\, d\tau\right], \tag{1.14}$$

где $p(y,t,\nu)$ определяется как решение интегрального уравнения

$$p(y,t,\nu)=\theta\big(t-|y|\big)\int\limits_{\frac{y-t}{2}}^{\frac{y+t}{2}}\int\limits_{|\xi|}^{t-|\xi-y|}q(\xi,\nu)\left[p(\xi,\tau,\nu)-\int\limits_{0}^{\tau-|\xi|}g(\zeta,\nu)\,d\zeta\right]d\tau\,d\xi. \tag{1.15}$$

Далее будем считать $p(y,t,\nu)$ известной функцией, которая может быть найдена посредством решения последнего интегрального уравнения. Из (1.15) вытекают следующие соотношения для функции $p(y,t,\nu)$:

$$\begin{gathered}p(y,t,\nu)\big|_{t<|y|}=0,\quad p(y,t,\nu)\in\mathbf{C}^1\big(\mathbb{R};\mathbf{C}^2\big(\nabla(T)\big)\big),\\ \nabla(T)=\big\{(y,t)\in\mathbb{R}^2:|y|\le t\le T\big\},\\ \frac{\partial}{\partial t}p(y,t,\nu)\bigg|_{t=+0}=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}p(y,t,\nu)\bigg|_{y=0,t=+0}=0.\end{gathered} \tag{1.16}$$

Из (1.10), (1.14) следует, что решение задачи (1.1)–(1.3) имеет вид

$$\begin{aligned}w(y,t,\nu)=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\theta\big(t-\tau-|y-\xi|\big)\left[\frac12+R(y,t-\tau,\xi,\nu)\right]f(\xi,\tau,\nu)\,d\xi\,d\tau\\ +\theta\big(t-|y|\big)\left[p(y,t,\nu)-\int_0^{t-|y|}g(\tau,\nu)\,d\tau\right].\end{aligned} \tag{1.17}$$

Формула (1.17) дает представление решения задачи (1.1)–(1.3) и составляет основное содержание этого раздела.

3.2. *Формула для решения начально-краевой задачи для гиперболических уравнений с правой частью специальной структуры.* Рассмотрим при $x>0$, $t\in\mathbb{R}$ дифференциальное уравнение

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u=\frac{\partial}{\partial x_3}\left(c(x_3)\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)+c_1(x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}f(x_3,t),\quad x_3>0, \tag{2.1}$$

со следующими условиями:

$$u\big|_{t<0}=0, \tag{2.2}$$

$$\left(c(x_3)\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)\bigg|_{x_3=0}=0. \tag{2.3}$$

Здесь функция $f(x_3,t)$, входящая в правую часть (2.1), имеет структуру

$$f(x_3,t)=\theta\big(t-|\tau^*(x_3)|\big)d(x_3,t), \tag{2.4}$$

$$\tau^*(x_3)=\int_0^{x_3}\sqrt{\frac{\rho}{c^*(\xi)}}\,d\xi, \tag{2.5}$$

где ρ — положительная постоянная и $c(x_3)$, $c^*(x_3)$, $c_1(x_3)$, $d(x_3,t)$ — заданные функции со следующими свойствами: $c(x_3)$, $c^*(x_3)$ — четные функции, $c(x_3), c^*(x_3) \in \mathbf{C}^2$ $(x_3 \geq 0)$, $c(x_3), c^*(x_3) > 0$, $c_1(x_3)$ — нечетная функция, $c_1(x_3) \in \mathbf{C}(\mathbb{R})$, $d(x_3,t)$ — четная функция по переменной x_3, $d(x_3,t) \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Пользуясь соотношениями (2.4), (2.5) и свойствами дельта-функции Дирака $\delta\big(t - |\tau^*(x_3)|\big)$, находим

$$\frac{\partial}{\partial x_3} f(x_3,t) = d_1(x_3)\,\frac{\partial}{\partial t}\theta\big(t - |\tau^*(x_3)|\big) + d_2(x_3,t)\theta\big(t - |\tau^*(x_3)|\big), \tag{2.6}$$

где

$$d_1(x_3) = -\sqrt{\frac{\rho}{c^*(x_3)}}\, d\big(x_3, |\tau^*(x_3)|\big)\,\mathrm{sign}(x_3),$$

$$\mathrm{sign}(x_3) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_3 > 0, \\ -1 & \text{при } x_3 < 0, \end{cases}$$

$$d_2(x_3,t) = \frac{\partial}{\partial x_3} d(x_3,t).$$

В (2.1) функцию $u(x_3,t)$ считаем четной по переменной x_3. При этом равенство (2.3) будет выполняться автоматически. Цель дальнейших рассуждений состоит в том, чтобы показать эквивалентность соотношений (2.1), (2.2) некоторому интегральному уравнению.

В терминах функции

$$w(y,t) = \frac{u\big(\tau^{-1}(y), t\big)}{S(y)}, \tag{2.7}$$

где

$$S(y) = \left(\frac{c(0)}{c\big(\tau^{-1}(y)\big)}\right)^{1/4}, \quad y = \tau(x_3) = \int_0^{x_3} \sqrt{\frac{\rho}{c(\xi)}}\, d\xi, \tag{2.8}$$

$\tau^{-1}(y)$ — функция, обратная к $\tau(x_3)$, равенства (2.1), (2.2) принимают вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w = \frac{\partial^2}{\partial y^2} w + q(y)w + \widehat{c}_1(y) f_1(y,t), \tag{2.9}$$

$$w\big|_{t<0} = 0, \tag{2.10}$$

где

$$q(y) = \frac{S''(y)}{S(y)} - 2\left[\frac{S'(y)}{S(y)}\right]^2, \tag{2.11}$$

$$f_1(y,t) = \frac{1}{\rho S(y)} \left\{\frac{\partial}{\partial x_3} f(x_3,t)\right\}\bigg|_{x_3 = \tau^{-1}(y)}, \tag{2.12}$$

$$\widehat{c}_1(y) = c_1\big(\tau^{-1}(y)\big). \tag{2.13}$$

Равенства (2.9), (2.10) эквивалентны соотношению

$$w(y,t) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} G(y,\xi,t-\tau)\widehat{c}_1(\xi)f_1(\xi,\tau)\,d\tau\,d\xi, \tag{2.14}$$

где $G(y,\xi,t-\tau)$ — фундаментальное решение оператора $\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-q(y)\Big)$, т. е.

$$G(y,y^0,t) = \theta\big(t-\big|y-y^0\big|\big)\left[\frac{1}{2}+R(y,y^0,t)\right], \tag{2.15}$$

функция $R(y,y^0,t)$ определена в разделе 3.1.

Используя представления (2.6), (2.12), (2.15) и свойство «свертки»

$$p*D^\alpha q = D^\alpha p*q = D^\alpha(p*q),$$

перепишем уравнение (2.14) в виде

$$\begin{aligned} w(y,t) = \frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \theta(t-\tau-|\xi-y|)\theta\big(\tau-|g(\xi)|\big)\widehat{c}_1(\xi)\widehat{d}_1(\xi)\,d\tau\,d\xi \\ + \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \theta\big(t-\tau-|\xi-y|\big)\theta\big(\tau-|g(\xi)|\big)\widehat{c}_1(\xi)\widehat{d}_2(y,\xi,t-\tau,\tau)\,d\tau\,d\xi, \end{aligned} \tag{2.16}$$

где

$$g(y) = \tau^*\big(\tau^{-1}(y)\big), \quad \widehat{d}_1(\xi) = \frac{1}{\rho S(\xi)}d_1\big(\tau^{-1}(\xi)\big),$$

$$\begin{aligned} \widehat{d}_2(y,\xi,t-\tau,\tau) = \frac{1}{\rho S(\xi)}\bigg\{ d_1\big(\tau^{-1}(\xi)\big)R'_t(y,\xi,t-\tau) \\ + d_2\big(\tau^{-1}(\xi),\tau\big)\left[\frac{1}{2}+R(y,\xi,t-\tau)\right]\bigg\}. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 1. Цель этого замечания состоит в том, чтобы дать другие представления второго слагаемого формулы (2.16). Для этого нам необходимо определить некоторые функции и множества. Функцию $\psi(y)$ определим посредством следующего описания.

Пусть $g'(0) > 1$. Обозначим через y_0 наименьший положительный корень уравнения $g'(y) = 1$, удовлетворяющий условию $g'(y) < 1$, если таковой существует. В этом случае определим функцию $\psi(y)$ на интервале $[0,y_0]$ формулой $\psi(y) = y$. Если же такой корень не существует, полагаем $\psi(y) = y$ на всей полуоси $[y_0,+\infty)$ (см. рис. 1).

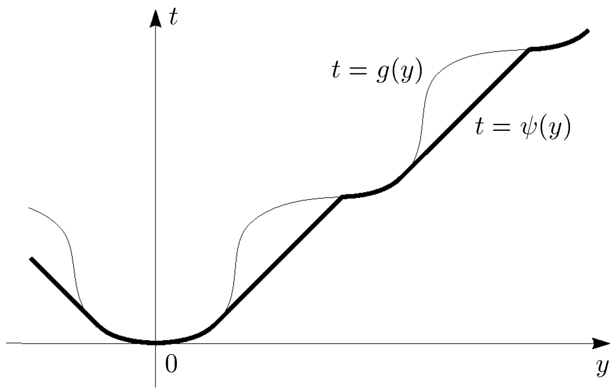

Рис. 1

Пусть теперь $g'(0) \leq 1$. Положим $y_0 = 0$ (см. рис. 2).

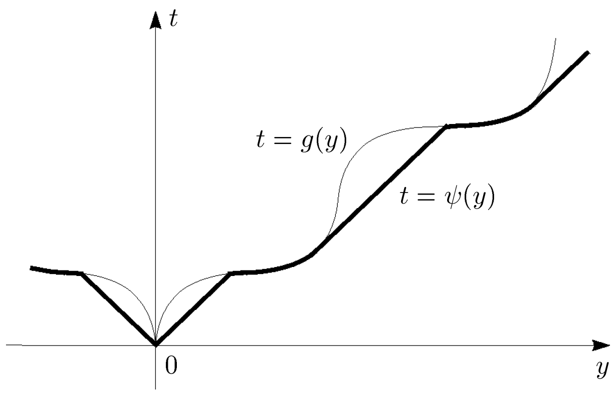

Рис. 2

Далее, через y_1 обозначим наименьший положительный корень уравнения $g'(y) = 1$, если он существует. В том случае, когда корень y_1 конечен, положим

$$\psi(y) = g(y) \quad \text{при} \quad y \in [y_0, y_1];$$

в противном случае будем считать, что

$$\psi(y) = g(y) \quad \text{при} \quad y \in [y_0, +\infty).$$

Обозначим через y_2 наименьший из корней уравнения $g(y) = y - g(y_1)$, принадлежащих интервалу $[y_1, +\infty)$ и удовлетворяющих условию $g'(y_2) < 1$. Если корень y_2 конечен, положим

$$\psi(y) = y - g(y_1) \quad \text{при} \quad y \in [y_1, y_2];$$

в противном случае считаем, что

$$\psi(y) = y - g(y_1) \quad \text{при} \quad y \in [y_1, +\infty).$$

Если конечные величины y_0, y_1, y_2 уже определены, то мы вводим точки y_{2i}, y_{2i+1}, $i = 1, 2, \dots$, и определяем функцию $\psi(y)$ по правилам, описанным выше, а именно: если $g'(y_{2i}) < 1$, то через y_{2i+1} обозначим наименьший из корней уравнения $g'(y) = 1$, принадлежащих интервалу $[y_{2i}, +\infty)$; если корень y_{2i+1} конечен, положим

$$\psi(y) = g(y) \quad \text{при} \quad y \in [y_{2i}, y_{2i+1}],$$

в противном случае считаем, что

$$\psi(y) = g(y) \quad \text{при} \quad y \in [y_{2i}, +\infty).$$

Далее, обозначим через y_{2i+2} наименьший из корней уравнения $g(y) = y - g(y_{2i+1})$, принадлежащих интервалу $[y_{2i+1}, +\infty)$ и удовлетворяющих условию $g'(y_{2i+2}) < 1$. Если корень y_{2i+2} конечен, положим

$$\psi(y) = y - g(y_{2i+1}) \quad \text{при} \quad y \in [y_{2i+1}, y_{2i+2}],$$

в противном случае считаем, что

$$\psi(y) = y - g(y_{2i+1}) \quad \text{при} \quad y \in [y_{2i+1}, +\infty).$$

Таким образом, функция $\psi(y)$ определена для положительных значений y. Продолжим эту функцию четным образом для отрицательных y, т. е. будем считать $\psi(y) = \psi(-y)$ при $y < 0$.

Введем множества

$$\begin{aligned} \Delta(y,t) &= \big\{(\xi,\tau) : 0 \le \tau \le t - |y-\xi|\big\}, \\ \nabla &= \big\{(\xi,\tau) : |g(\xi)| \le \tau\big\}, \\ \mathcal{O} &= \big\{(y,t) : 0 < t \le \psi(y)\big\}. \end{aligned}$$

Из определения функций $\psi(y)$, $g(y)$ и множеств $\Delta(y,t)$, ∇, $\mathcal{O}$ вытекают следующие формулы:

$$\begin{aligned} &\Delta(y,t) \cap \nabla = \varnothing, && (y,t) \in \mathcal{O}, \\ &\Delta(y,t) \cap \nabla = \bigcup_{i=1}^{n} D_i(y,t), && (y,t) \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{O}, \end{aligned}$$

где $D_i(y,t)$ — множества, имеющие структуру

$$D_i(y,t) = \big\{(\xi,\tau) : y_{*i}(y,t) \le \xi \le y_i^*(y,t),\ |g(\xi)| \le \tau \le t - |y-\xi|\big\}, \tag{2.17}$$

причем

$$\Delta(0,t) \cap \nabla = D_1(0,t),$$

функции $y_{*i}(y,t)$, $y_i^*(y,t)$, $i = 0,1,2,\ldots$, являются решениями уравнения $t - |\xi - y| = |g(\xi)|$ относительно переменной ξ, $y_{*i}(y,t) \le y_i^*(y,t)$. Из условия $g(y) \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R}^2)$ следует, что корни $y_{*i}(y,t)$, $y_i^*(y,t)$, $i = 0,1,2,\ldots,$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции по y, t.

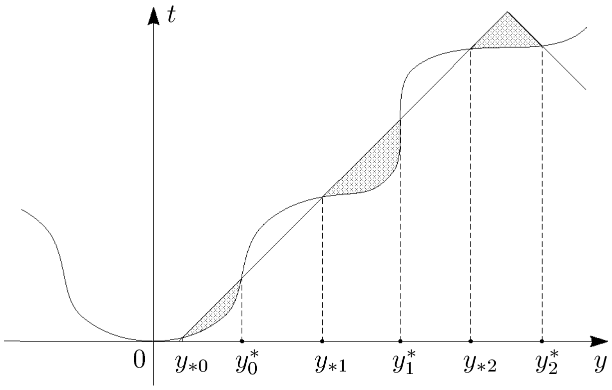

Рис. 3

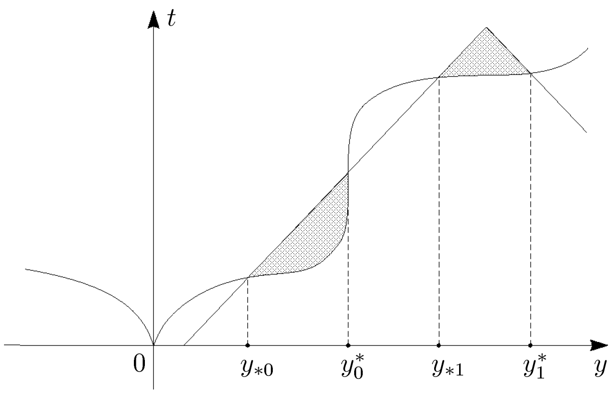

Рис. 4

С учетом введенных обозначений из проведенных выше рассуждений вытекает следующая цепочка равенств для второго слагаемого формулы (2.16):

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \theta\big(t - \tau - |y - \xi|\big)\theta\big(\tau - |g(\xi)|\big)\widehat{c}_1(\xi)\widehat{d}_2(y,\xi,t-\tau,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

$$= \theta\big(t - \psi(y)\big) \iint\limits_{\Delta(y,t)\cap\nabla} \widehat{c}_1(\xi)\widehat{d}_2(y,\xi,t-\tau,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

$$= \theta\big(t - \psi(y)\big) \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i(y,t)} \widehat{c}_1(\xi)\widehat{d}_2(y,\xi,t-\tau,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

$$= \theta\big(t - \psi(y)\big) \sum_{i=1}^{n} \int_{y_{*i}(y,t)}^{y_i^*(y,t)} \int_{|g(\xi)|}^{t-|\xi-y|} \widehat{c}_1(\xi)\widehat{d}_2(y,\xi,t-\tau,\tau)\,d\tau\,d\xi. \qquad (2.18)$$

Используя (2.16), (2.18), получим представление для функции $w(y,t)$:

$$w(y,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big\{\theta\big(t-\psi(y)\big)\iint\limits_{\Delta(y,t)\cap\nabla} \widehat{c}_1(\xi)\widehat{d}_1(\xi)\,d\xi\,d\tau\Big\}$$
$$+\,\theta\big(t-\psi(y)\big)\sum_{i=1}^{n}\int_{y_{*i}(y,t)}^{y_i^*(y,t)}\int_{|g(\xi)|}^{t-|\xi-y|}\widehat{c}_1(\xi)\widehat{d}_2(y,\xi,t-\tau,\tau)\,d\tau\,d\xi.$$

Для первого слагаемого последней формулы имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big\{\theta\big(t-\psi(y)\big)\iint\limits_{\Delta(y,t)\cap\nabla} \widehat{c}_1(\xi)\widehat{d}_1(\xi)\,d\xi\,d\tau\Big\}$$
$$=\delta\big(t-\psi(y)\big)\iint\limits_{\Delta(y,t)\cap\nabla} \widehat{c}_1(\xi)\widehat{d}_1(\xi)\,d\xi\,d\tau$$
$$+\,\theta\big(t-\psi(y)\big)\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\Delta(y,t)\cap\nabla} \widehat{c}_1(\xi)\widehat{d}_1(\xi)\,d\xi\,d\tau.$$

Далее, используя свойства дельта-функции Дирака и тот факт, что при $t\to\psi(y)+0$ мера множества $\Delta(y,t)\cap\nabla$ стремится к нулю, получим

$$w(y,t) = \theta\big(t-\psi(y)\big)\sum_{i=1}^{n}\int_{y_{*i}(y,t)}^{y_i^*(y,t)}\widehat{c}_1(\xi)\widehat{d}_1(\xi)\,\mathrm{sign}(\xi-y)\,d\xi$$
$$+\,\theta\big(t-\psi(y)\big)\sum_{i=1}^{n}\int_{y_{*i}(y,t)}^{y_i^*(y,t)}\widehat{c}_1(\xi)\int_{|g(\xi)|}^{t-|\xi-y|}\widehat{d}_2(y,\xi,t-\tau,\tau)\,d\tau\,d\xi$$
$$=\theta\big(t-\psi(y)\big)\sum_{i=1}^{n}\int_{y_{*i}(y,t)}^{y_i^*(y,t)}\widehat{c}_1(\xi)d_3(y,\xi,t)\,d\xi, \tag{2.19}$$

где

$$d_3(y,\xi,t) = \widehat{d}_1(\xi)\,\mathrm{sign}(\xi-y)+\int_{|g(\xi)|}^{t-|\xi-y|}\widehat{d}_2(y,\xi,t-\tau,\tau)\,d\tau.$$

Формула (2.19) составляет основной результат этого раздела.

З а м е ч а н и е 2. В этом замечании мы получим представление для первого слагаемого в равенстве (2.16) при $y=0$. При этом мы используем ранее введенные обозначения; в частности, $D_1(0,t)$ — множество, введенное в замечании 1 формулой (2.17). Рассмотрим первое слагаемое (2.16) при $y=0$ и, используя рассуждения замечания 1, получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\theta\big(t-\tau-|\xi|\big)\theta\big(\tau-|g(\xi)|\big)\widehat{c}_1(\xi)\widehat{d}_1(\xi)\,d\xi\,d\tau\\
&\quad=\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{D_1(0,t)}\widehat{c}_1(\xi)\widehat{d}_1(\xi)\,d\xi\,d\tau\\
&\quad=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\theta(t)\int_{y_{*1}(0,t)}^{y_1^*(0,t)}\widehat{c}_1(\xi)\widehat{d}_1(\xi)\,\big[t-|\xi|-|g(\xi)|\big]\,d\xi\right\}\\
&\quad=\delta(t)\int_{y_{*1}(0,t)}^{y_1^*(0,t)}\widehat{c}_1(\xi)\widehat{d}_1(\xi)\,\big[t-|\xi|-|g(\xi)|\big]\,d\xi\\
&\qquad+\theta(t)\Big\{\widehat{c}_1\big(y_1^*(0,t)\big)\widehat{d}_1\big(y_1^*(0,t)\big)\Big[t-\big|y_1^*(0,t)\big|-\big|g\big(y_1^*(0,t)\big)\big|\Big]\frac{\partial}{\partial t}y_1^*(0,t)\\
&\qquad\quad-\widehat{c}_1\big(y_{*1}(0,t)\big)\widehat{d}_1\big(y_{*1}(0,t)\big)\Big[t-\big|y_{*1}(0,t)\big|-\big|g\big(y_{*1}(0,t)\big)\big|\Big]\frac{\partial}{\partial t}y_{*1}(0,t)\Big\}\\
&\qquad+\theta(t)\int_{y_{*1}(0,t)}^{y_1^*(0,t)}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\widehat{c}_1(\xi)\widehat{d}_1(\xi)\big[t-|\xi|-|g(\xi)|\big]\Big)\,d\xi\\
&\quad=\theta(t)\int_{y_{*1}(0,t)}^{y_1^*(0,t)}\widehat{c}_1(\xi)\widehat{d}_1(\xi)\,d\xi.
\end{aligned}\tag{2.20}$$

Далее, при $y=0$, применяя формулы (2.16), (2.18), (2.20), заключаем, что

$$\begin{aligned}
w(0,t)=\theta(t)&\int_{y_{*1}(0,t)}^{y_1^*(0,t)}\widehat{c}_1(\xi)\widehat{d}_1(\xi)\,d\xi\\
&+\theta(t)\int_{y_{*1}(0,t)}^{y_1^*(0,t)}\int_{|g(\xi)|}^{t-|\xi|}\widehat{c}_1(\xi)\widehat{d}_2(0,\xi,t-\tau,\tau)\,d\xi\,d\tau.
\end{aligned}$$

Дифференцируя последнее равенство по t и используя четность подынтегральной функции, выводим

$$\frac{\partial}{\partial t}w(0,t)=\widehat{R}(t)\widehat{c}_1\big(\alpha(t)\big)+\int_0^{\alpha(t)}\widehat{c}_1(\xi)\widehat{R}_1(\xi,t)\,d\xi,\tag{2.21}$$

где

$$\alpha(t)=y_1^*(0,t),\quad \widehat{R}(t)=2\theta(t)\widehat{d}_1\big(\alpha(t)\big)\alpha'(t),$$

$$\widehat{R}_1(\xi,t)=2\theta(t)\Big[\widehat{d}_2\big(0,\xi,|\xi|,t-|\xi|\big)+\int_{|g(\xi)|}^{t-|\xi|}\frac{\partial}{\partial t}\widehat{d}_2(0,\xi,t-\tau,\tau)\,d\tau\Big].$$

Привлекая формулу (2.7), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}u(0,t) = \widehat{R}(t)\widehat{c}_1\bigl(\alpha(t)\bigr) + \int_0^{\alpha(t)} \widehat{c}_1(\xi)\widehat{R}_1(\xi,t)\,d\xi. \tag{2.22}$$

Литература

1. *Авдеев А. В., Горюнов Э. В., Прийменко В. И.* Численное решение одной обратной задачи электромагнитоупругости // Тр. международного семинара: *Обратные задачи геофизики.* Новосибирск: Вычислит. центр СО РАН, 1996. С. 7–10.
2. *Балакирев М. К., Гилинский И. А. Волны в пьезокристаллах.* Новосибирск: Наука, 1982.
3. *Благовещенский А. С.* О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны // *Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова.* 1971. Т. 115. С. 28–38.
4. *Бурдакова О. А., Яхно В. Г.* Обратная задача электроупругости // Тр. Ин-та математики СО АН СССР: *Вопросы корректности задачи анализа.* Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1989. С. 3–20.
5. *Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах.* М.: Наука, 1982.
6. *Меражов И. З., Яхно В. Г.* Прямые и обратные задачи для системы дифференциальных уравнений электромагнитоупругости // Тр. международного семинара: *Обратные задачи геофизики.* Новосибирск: Вычислит. центр СО РАН, 1996. С. 134–137.
7. *Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел.* М.: Наука, 1988.
8. *Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики.* Т. 2. М.: Мир, 1978.
9. *Романов В. Г.* Обратные задачи для гиперболических уравнений и энергетические неравенства // *Докл. АН СССР.* 1978. Т. 242, № 3. С. 541–544.
10. *Романов В. Г. Обратные задачи математической физики.* М.: Наука, 1984.
11. *Романов В. Г.* Структура решения задачи Коши для системы уравнений электродинамики и упругости в случае точечных источников // *Сиб. мат. журн.* 1995. Т. 36, № 3. С. 628–649.

12. *Сурнев В. Б.* Интегродифференциальные уравнения задачи рассеяния упругих волн локальным пьезоэлектрическим телом // *Изв. АН СССР. Сер. физика Земли.* 1986, № 7. С. 43–52.

13. *Яхно В. Г.* *Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости.* Новосибирск: Наука, 1990.

14. *Lavrent'ev M. M. (Jr.), Priĭmenko V. I.* Simultaneous determination of elastic and electromagnetic medium parameters // *Computerized Tomography.* Utrecht: TVP/VSP, 1995. P. 302–308.

15. *Lorenzi A., Romanov V. G.* Identification of an electromagnetic coefficient connected with deformation currents // *Inverse Probl.* 1993. V. 9, N 2. P. 301–319.

16. *Lorenzi A., Priĭmenko V. I.* Identification problems related to electro-magneto-elastic interactions // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 1996. V. 4, N 2. P. 115–143.

17. *Merazhov I. Z., Yakhno V. G.* One-dimensional inverse problem for electric-elasticity equation // *Conditionally Well-Posed Problems.* Utrecht: TVP/VSP, 1994. P. 70–74.

18. *Merazhov I. Z., Yakhno V. G.* Direct and inverse problems for system of electromagneto-elasticity equations // *Computerized Tomography.* Utrecht: TVP/VSP, 1995. P. 332–335.

19. *Mikhailenko B. G., Soboleva O. N.* Numerical modeling of seismomagnetic effects in an elastic medium // *Advanced Mathematics: Computations and Applications* (Alekseev A. S., Bakhvalov N. S., eds.). Novosibirsk: Novosibirsk Computing Center, 1995. P. 722–730.

Яхно Валерий Георгиевич

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, РОССИЯ.
E-mail: yakhno@math.nsc.ru

Статья поступила
7 сентября 1998 г.

Меражов Илхом Завкидинович

Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
Сибирский университет потребительской кооперации,
630090 Новосибирск, РОССИЯ.
E-mail: meraj@math.nsc.ru