ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ИЮЛЬ 1977 г., ТОМ XIII, № 7

УДК 517.934

А. М. МЕЙЛАХС

О РЕЛЕЙНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(x, \varphi(u)), \tag{1}$$

где $x \in R^n$ — фазовый вектор, $u = u(x)$ — скалярное управление, $u(0) = 0$, $\varphi(u)$ — скалярная разрывная функция такая, что $\varphi(u) = 1$ при $u > 0$, $\varphi(u) = -1$ при $u < 0$. Предполагается, что функции $f(x, 1)$, $f(x, -1)$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности начала координат, а функция $u(x)$ дважды непрерывно дифференцируема. Решения системы (1) понимаются в смысле [1].

Требуется выяснить условия, при которых система (1) имеет асимптотически устойчивое по Ляпунову положение равновесия $x = 0$, а также дать способ построения управлений $u(x)$, при которых система (1) обладает указанным свойством.

Очевидно, функция $u(x)$ представима в виде

$$u(x) = c^*x + g(x), \quad c \in R^n, \quad g(0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0) = 0.$$

Дифференцируя функцию $u(x)$ в силу системы (1) и применяя теорему Четаева [2] о неустойчивости, нетрудно установить, что для устойчивости системы (1) необходимо выполнение условий $c^*f(0, 1) \leqslant 0$, $c^*f(0, -1) \geqslant 0$. Далее всюду предполагается $c^*f(0, 1) < 0$, $c^*f(0, -1) > 0$ (этот случай будем называть некритическим).

Из [3] следует также, что для устойчивости системы (1) необходимо выполнение условия

$$p_1^0 f(0, 1) + p_2^0 f(0, -1) = 0, \quad p_1^0 \geqslant 0, \quad p_2^0 \geqslant 0, \quad p_1^0 + p_2^0 = 1.$$

Будем считать это условие выполненным, причем в некритическом случае, очевидно, $p_1^0 > 0$, $p_2^0 > 0$.

В этом случае существует окрестность S начала координат, обладающая тем свойством, что всякое решение $x(t)$, для которого $x(0) \in S$, за конечное время попадает на гиперповерхность $u(x) = 0$ и остается на ней до тех пор пока $x(t) \in S$, удовлетворяя системе дифференциальных уравнений, описывающей движение в скользящем режиме ([1], лемма 3)

$$\dot{x} = p_1(x) f(x, 1) + p_2(x) f(x, -1), \tag{2}$$

где $p_1(x)$, $p_2(x)$ единственным образом отыскиваются из условий

$$p_1(x) + p_2(x) = 1, \quad p_1(x) \frac{\partial u}{\partial x} f(x, 1) + p_2(x) \frac{\partial u}{\partial x} f(x, -1) = 0. \tag{3}$$

Из (3) видно, что функции $p_1(x)$, $p_2(x)$ будут непрерывно дифференцируемыми в S, причем $p_1(0) = p_1^0$, $p_2(0) = p_2^0$, и функция $u(x)$ будет первым интегралом системы (2).

Нетрудно убедиться, что система (2), рассмотренная в линейном приближении, имеет вид

$$\dot{x} = \left(A - \frac{1}{c^*b} bc^*A\right) x, \tag{4}$$

где

$$A = p_1^0 \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) + p_2^0 \frac{\partial f}{\partial x}(0, -1), \quad b = f(0, 1).$$

Функция $u_1(x)=c^*x$ является первым интегралом системы (4), следовательно, матрица системы (4) имеет нулевое собственное число. Для того чтобы все движения в подпространстве $c^*x=0$ стремились к началу координат, необходимо и достаточно, чтобы остальные собственные числа имели отрицательные вещественные части, т. е.

$$\left|\lambda E-\left(A-\frac{1}{c^*b}\,bc^*A\right)\right|=\lambda\,(\lambda^{n-1}+m_1\lambda^{n-2}+\ .\ .\ .\ +m_{n-1}), \tag{5}$$

где многочлен $\lambda^{n-1}+m_1\lambda^{n-2}+\ .\ .\ .\ +m_{n-1}$ гурвицев. Из [4] следует, что равенство (5) эквивалентно равенству

$$c^*k=-c^*b\,(1,\ m_1,\ .\ .\ .\ ,\ m_{n-1}), \tag{6}$$

где

$$K=(b,\ Ab,\ .\ .\ .\ ,\ A^{n-1}b)\begin{pmatrix}-1 & -l_1 & -l_2 & \ldots & -l_{n-1}\\ 0 & -1 & -l_1 & \ldots & -l_{n-2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1\end{pmatrix},$$

$l_1,\ \ldots,\ l_n$ — коэффициенты характеристического многочлена матрицы A, т. е.

$$|\lambda E-A|=\lambda^n+l_1\lambda^{n-1}+\ .\ .\ .\ +l_n.$$

Используя эти факты, нетрудно доказать следующее.

Теорема 1. *Если все корни многочлена* $(\lambda^{n-1},\ \ldots,\ \lambda,\ 1)K^*c$ *имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Теорема 2. *Если многочлен* $(\lambda^{n-1},\ \ldots,\ \lambda,\ 1)\ K^*c$ *имеет корень с положительной вещественной частью, то нулевое решение системы (1) неустойчиво.*

Если система (1) линейная, то теоремы 1 и 2 в некритическом случае дают необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости, совпадая в этом случае с критерием [5].

Если

$$\det K=(-1)^n\det(b,\ Ab,\ .\ .\ .\ ,\ A^{n-1}b)\neq 0,$$

то, как следует из теорем 1, 2, почти все векторы $c\in R^n$, обеспечивающие асимптотическую устойчивость системы (1), могут быть построены по формуле $c=K^{*-1}a$, где вектор $a=(a_1,\ \ldots,\ a_n)^*$ таков, что $a_1>0$ и многочлен $a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n$ гурвицев. Случай $\det K=0$ также легко исследуется (см., например, [6]).

Литература

1. Филиппов А. Ф. Математический сборник, 51, № 1, 1960.
2. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
3. Петров Н. Н. Дифференц. уравнения, 4, № 7, 1968.
4. Мейлахс А. М. Вестник ЛГУ, № 13, 1972.
5. Аносов Д. В. Автоматика и телемеханика, № 2, 1959.
6. Гальперин Е. А., Дергачева Е. И. Автоматика и телемеханика, № 8, 1968.

Поступила в редакцию
20 июня 1974 г.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова