В. В. Ишханов, О задаче погружения с неабелевым ядром прядка p^4,
Тр. МИАН СССР, 1990, том 183, 116–121

Таким образом, индуктивный шаг уменьшения параметров (n, s) сделан и, следовательно, лексикографическая индукция по (n, s) завершает доказательство теоремы.

Литература

1. Алгебраические поверхности // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1965. Т. 75. 215 с.
2. Гизатуллин М. Х. Определяющие соотношения для кремоновой группы плоскости // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1982. Т. 46, № 5. С. 909—970.

В. В. ИШХАНОВ

О ЗАДАЧЕ ПОГРУЖЕНИЯ С НЕАБЕЛЕВЫМ ЯДРОМ ПОРЯДКА p^4

Пусть A — неабелева группа порядка p^4 с двумя образующими a и b и соотношениями $a^{p^2}=(a, b)$, $b^p=1$ (скобки обозначают коммутатор); K/k — нормальное p-расширение полей алгебраических чисел с группой Галуа F, G — расширение группы A с помощью F и φ — естественный гомоморфизм группы G на F. Рассмотрим задачу погружения, которая состоит в построении расширения Галуа (алгебры Галуа) над полем k с группой Галуа G, причем $K \subset L$ и ограничение автоморфизмов $\sigma \in G$ на подполе K совпадает с $\varphi(\sigma)$. В дальнейшем для задачи погружения будем использовать стандартное обозначение $(K/k, G, \varphi)$.

Для любой простой точки $\mathfrak{p}$ поля k с исходной задачей погружения можно связать сопутствующую локальную задачу $(K_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p}, G, \varphi)$, где $K_\mathfrak{p}=K\underset{k}{\otimes} k_\mathfrak{p}$. Вообще говоря, $K_\mathfrak{p}$ может и не быть расширением Галуа, однако это всегда алгебра Галуа с группой F.

В работе Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеева [1] было исследовано необходимое условие (условие согласности) для разрешимости произвольной задачи погружения, состоящее в существовании модуля согласности, «решающего» задачу погружения. В работе Б. Б. Лурье [2] было показано, в частности, что для числовых полей условия согласности для задачи погружения и сопутствующей задачи, полученной факторизацией группы G по коммутанту ядра, равносильны.

Теорема. *Для разрешимости исходной задачи погружения $(K/k, G, \varphi)$ необходимо и достаточно, во-первых, выполнения условия согласности и, во-вторых, разрешимости сопутствующих локальных задач во всех бесконечных точках поля k.*

Доказательство. Заметим, что второе условие автоматически выполняется при нечетных p. Необходимость условий очевидна. Докажем их достаточность. Предположим сначала, что поле k содержит первообразный корень из 1 степени p. Если поле K не содержит первообразного корня из 1 степени p^2, то его можно присоединить стандартным способом, переходя от K к $K(\zeta_2)$, где ζ_2 — фиксированный первообразный корень из 1 степени p^2. В этом случае группа G заменяется на $G\times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Мы сохраним старые обозначения, считая, что $\zeta_2 \in K$. Положим $\zeta_1=\zeta_2^p$.

Пусть $F_1=G/(A, A)$, $A_0=A/(A, A)$ и φ_0 — естественное отображение группы F_1 на F (через (A, A) мы обозначаем коммутант группы A). На группе характеров $\hat{A}_0=\mathrm{Hom}(A_0, K^*)$ естественным образом действуют операторы из группы F, а именно $\chi^\sigma(c)=(\chi(c^{\sigma^{-1}}))^\sigma$, где $\chi\in\hat{A}_0$, $c\in A_0$, $\sigma\in F$. Обозначим через H подгруппу группы F, элементы которой действуют тривиально на $\hat{A}_0$. Положим $F_0=F/H$ и $K_0=K^H$.

Покажем, что задача погружения $(K/k,\ F_1,\ \varphi_0)$ разрешима. Согласно основному результату работы А. В. Яковлева [3], нам достаточно доказать инъективность отображения $\psi_1 : H^1(F_0,\ \hat{A}_0) \to \pi_{\mathfrak{p}} H^1(F_{0\mathfrak{p}},\ \hat{A}_0)$, которое является набором гомоморфизмов ограничения, где $\mathfrak{p}$ пробегает все простые дивизоры поля k, а $F_{0\mathfrak{p}}$ — группа разложения простого делителя $\mathfrak{P}$ дивизора $\mathfrak{p}$ в расширении K_0/k. Заметим, что для любой циклической подгруппы $\bar{F}_0 \subset F_0$ существует такой дивизор $\mathfrak{p}$, что $F_{0\mathfrak{p}} = \bar{F}_0$, следовательно, можно считать, что F_0 не является циклической группой.

Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — образы элементов a и b соответственно в группе F_1. Ясно, что $\bar{a}^p$ и $\bar{b}$ лежат в центре группы F_1. Рассмотрим характеры $\chi_1,\ \chi_2$, определенные своими значениями следующим образом: $\chi_1(\bar{a}) = \zeta_2,\ \chi_1(\bar{b}) = 1;\ \chi_2(\bar{a}) = 1,\ \chi_2(\bar{b}) = \zeta_1$. Тогда в группе F_0 существуют такие автоморфизмы σ_1 и σ_2, что $\chi_1^{\sigma_1} = \chi_1^{1+p},\ \chi_2^{\sigma_1} = \chi_2;\ \chi_1^{\sigma_2} = \chi_1,\ \chi_2^{\sigma_2} = \chi_2\chi_1^p$.

Пусть $f \in Z^1(F_0,\ \hat{A}_0)$ и ограничение коцикла f на любую циклическую подгруппу распадается. Если $f(\sigma_1) = \chi_1^{c_1}\chi_2^{c_2}$ и $f(\sigma_2) = \chi_1^{c_3}\chi_2^{c_4}$, то, рассматривая ограничение f на подгруппы $\{\sigma_1\}$ и $\{\sigma_2\}$, имеем: $c_1 \equiv 0 \pmod p$, $c_2 = 0$, $c_3 \equiv 0 \pmod p$, $c_4 = 0$, т. е. $f(\sigma_1) = \chi_1^{pc_1}$ и $f(\sigma_2) = \chi_1^{pc_2}$. Следовательно, f — кограница.

Известно, что в качестве решения разрешимой абелевой задачи погружения полей алгебраических чисел всегда можно выбрать поле. Пусть K_1/k — расширение Галуа, являющееся решением задачи $(K/k,\ F_1,\ \varphi_0)$. Обозначим через G_1 прямое произведение групп F_1 и G с отождествленной фактор-группой F, через φ_1 — отображение группы G_1 на F_1, задаваемое соответствием $\varphi_1((\sigma_1,\ \sigma_2)) = \sigma_1$, где $\sigma_1 \in F_1,\ \sigma_2 \in G$ и $\varphi_0(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2)$. Подгруппу, состоящую из элементов $(1,\ c)$, где $c \in A$, будем в дальнейшем обозначать также через A. Заметим, что G_1 является расширением группы A с помощью F_1, причем фактор-группа $G_1/(A,\ A)$ является уже полупрямым расширением подгруппы $A_0 = A/(A,\ A)$ с помощью F_1. Действительно, отображение $\psi_2 : F_1 \to G_1/(A,\ A)$, задаваемое соответствием $\psi_2(\sigma) = (\sigma,\ \sigma)$, является вложением группы F_1 в $G_1/(A,\ A)$. Обозначим образ $\psi_2 F_1$ через $\bar{F}_1$, а через G_0 — полный прообраз подгруппы $\bar{F}_1$ в группе G_1 относительно гомоморфизма группы G_1 в $G_1/(A,\ A)$. Тогда группа G_1 является произведением (вообще говоря, не полупрямым) подгрупп G_0 и A. Ясно, что условия погружения для задач $(K/k,\ G,\ \varphi)$ и $(K_1/k,\ G_1,\ \varphi_1)$ эквивалентны.

Пусть H_1 — подгруппа группы G_0, состоящая из элементов, коммутирующих в группе G_1 с элементами из A, H_2 — образ H_1 в группе F_1 и K_2 — подполе поля K_1, принадлежащее подгруппе H_2. Заметим, что фактор-группа $F_2 = G_0/H_1$ вкладывается в силовскую p-подгруппу $\mathrm{Aut}_p A$ группы автоморфизмов группы A. Пусть $\sigma,\ \tau,\ \omega \in \mathrm{Aut}_p A$ и определяются равенствами $a^\sigma = a,\ b^\sigma = ba^{p^2}$, $a^\tau = ab,\ b^\tau = b,\ a^\omega = a^{1+p},\ b^\omega = b$. Непосредственно проверяется, что автоморфизмы $\sigma,\ \tau,\ \omega$ порождают группу $\mathrm{Aut}_p A$ и связаны соотношениями $\sigma^p = 1$, $\tau^p = 1,\ \omega^{p^2} = 1,\ (\sigma, \tau) = \omega^{-p},\ (\sigma,\ \omega) = 1,\ (\tau,\ \omega) = 1$ при $p \neq 2$ и $\sigma^2 = 1,\ \tau^2 = 1,\ \omega^2 = 1$, $(\sigma,\ \omega) = 1,\ (\sigma,\ \tau) = (\tau,\ \omega),\ (\sigma,\ \tau,\ \sigma) = 1,\ (\sigma,\ \tau,\ \tau) = 1$ при $p = 2$.

Пусть A_1 — подгруппа группы A, порожденная элементами $a_1 = a^p$ и b. Ясно, что A_1 — абелев нормальный делитель в G_1. Фактор-группа G_1/A_1 — прямое произведение групп F_1 и A/A_1, следовательно, расширение L_1 с группой Галуа G_1/A_1 (первый шаг решения задачи погружения) имеет вид $L_1 = K_1(\sqrt[p]{m_a})$, где $m_a \in k^*$. Элемент m_a необходимо выбрать так, чтобы для задачи погружения $(L_1/k,\ G_1,\ \varphi_2)$ выполнялось условие согласности, где φ_2 — естественный гомоморфизм группы G_1 на G_1/A_1.

Зададим на L_1 действие группы $F_1 \times A/A_1 = \varphi_2(G_0 A)$, положив

$$\left(z \sqrt[p]{m_a}^{\,t}\right)^{\varphi_2(\alpha a^i b^j)} = z^{\varphi_1(\alpha)} \sqrt[p]{m_a}^{\,t} \zeta_1^{ti},$$

где $z \in K_1$, $\alpha \in G_0$, i, j, t — целые числа. Тогда подгруппа $\varphi_2(G_0)$ действует тривиально на подполе $k\left(\sqrt[p]{m_a}\right)$.

Рассмотрим скрещенное произведение $M = G_1 \times L_1$. Как было показано в работе [1], для задачи погружения с абелевым ядром условие согласности равносильно распадению скрещенного произведения над своим центром. Заметим, что алгебра M содержит в качестве подалгебры скрещенное произведение $M_0 = G_0 \times K_1$ подгруппы G_0 и подполя K_1.

Для любого $\chi \in \hat{A}_1$ $e_\chi = (1/p^3) \sum_{c \in A_1} \chi(c)^{-1} c$ — идемпотент алгебры M. Для любого $\alpha \in G_1$ имеем: $\alpha^{-1} e_\chi \alpha = e_{\chi\varphi_2(\alpha)}$. Будем обозначать через $\bar{\chi}$ класс сопряженных с χ элементов в группе $\hat{A}_1$ относительно действия группы $F_1 \times A/A_1$. Тогда идемпотенты $e_{\bar{\chi}} = \sum_{\chi \in \bar{\chi}} e_\chi$ лежат в центре алгебры M. Обозначим через $F_{\bar{\chi}}$ подгруппу группы $F_1 \times A/A_1$, действующую тривиально на класс $\bar{\chi}$ (т. е. для $\alpha \in F_{\bar{\chi}}$ и $\chi \in \bar{\chi}$ имеем $\chi^\alpha = \chi$), и через $k_{\bar{\chi}}$ — подполе поля L_1, соответствующее подгруппе $F_{\bar{\chi}}$.

Пусть $\{f_{\bar{\chi}}\}$ — система представителей смежных классов группы $F_1 \times A/A_1$ по подгруппе $F_{\bar{\chi}}$. Рассмотрим компоненту $Me_{\bar{\chi}}$ алгебры M. Ее центр изоморфен полю $k_{\bar{\chi}}$. Действительно, элементы $\sum_{\alpha \in \{f_{\bar{\chi}}\}} e_{\chi\alpha} z^\alpha$, где $z \in k_{\bar{\chi}}$, образуют поле, изоморфное $k_{\bar{\chi}}$, и коммутируют со всеми элементами алгебры $Me_{\bar{\chi}}$.

Пусть $f(\sigma_1, \sigma_2)$ — система факторов, определяющая группу G_0 как расширение подгруппы (A, A) с помощью F_1. Алгебра $Me_{\bar{\chi}}$ содержит подалгебру $M_0 e_{\bar{\chi}}$, которая является обычным скрещенным произведением поля K_1 с группой F_1 и системой факторов $\chi(f(\sigma_1, \sigma_2))$ (можно взять любой характер χ из класса $\bar{\chi}$, так как значения $f(\sigma_1, \sigma_2)$ находятся в центре группы G_1).

Пусть $\chi_0 \in \hat{A}_1$ и $\chi_0(a_1) = \zeta_2$, $\chi_0(b) = 1$. Обозначим алгебру $M_0 e_{\bar{\chi}_0}$ через X. Алгебра X определена над полем k, и ее класс в группе Брауэра имеет показатель p. Заметим, что если $\chi' \in \hat{A}_1$ и $\chi'(a_1) = \zeta_2^i$, то алгебры $M_0 e_{\bar{\chi}'}$ и $(M_0 e_{\bar{\chi}_0})^i$ подобны. Подсчет размерности алгебры $Me_{\bar{\chi}}$ показывает, что централизатором подалгебры $M_0 e_{\bar{\chi}}$ является некоторая подалгебра $\bar{M}_{0,\bar{\chi}}$ порядка p^2 над полем $k_{\bar{\chi}}$. Заметим, что радикал $\sqrt[p]{m_a} \in \bar{M}_{0,\bar{\chi}}$, следовательно, $k_{\bar{\chi}}\left(\sqrt[p]{m_a}\right)$ является полем разложения алгебры $\bar{M}_{0,\bar{\chi}}$, т. е. она изоморфна алгебре обобщенных кватернионов $[m_a, x_{\bar{\chi}}]_{k_{\bar{\chi}}}$, где $x_\chi \in k_{\bar{\chi}}$. Таким образом, если $\chi(a_1^p) = \zeta_1^i$, то алгебра $Me_{\bar{\chi}}$ изоморфна алгебре $X^i [m_a, x_{\bar{\chi}}]_{k_{\bar{\chi}}}$. Если значения характера χ лежат в группе корней степени p из 1, то класс $\bar{\chi}$ состоит из одного элемента и идемпотент e_χ — центральный, следовательно, $k_{\bar{\chi}} = k$.

Точнее вычислить алгебры $Me_{\bar{\chi}}$ можно, зная вложение группы F_2 в $\mathrm{Aut}_p A$. Рассмотрим случай, когда F_2 совпадает со всей группой $\mathrm{Aut}_p A$. Пусть $\sqrt[p]{m_\sigma}$, $\sqrt[p]{m_\tau}$, $\sqrt[p]{m_\omega}$ — такие элементы поля K_2, что выполнены равенства $\sqrt[p]{m_\sigma}^{\,\sigma-1} = \zeta_1$, $\sqrt[p]{m_\sigma}^{\,\tau-1} = \sqrt[p]{m_\sigma}^{\,\omega-1} = 1$; $\sqrt[p]{m_\tau}^{\,\tau-1} = \zeta_1$, $\sqrt[p]{m_\tau}^{\,\sigma-1} = \sqrt[p]{m_\tau}^{\,\omega-1} = 1$; $\sqrt[p]{m_\omega}^{\,\omega-1} = \zeta_1$, $\sqrt[p]{m_\omega}^{\,\sigma-1} = \sqrt[p]{m_\omega}^{\,\tau-1} = 1$.

Условие согласности для задачи погружения $\left(K_1\left(\sqrt[p]{m_a}\right)/k,\ G_1,\ \varphi_2\right)$ выполнено тогда и только тогда, когда алгебры $Me_{\bar{\chi}}$ одновременно распадаются для всех классов $\bar{\chi}$. Ясно, что необходимым условием для этого является возможность для каждой точки $\mathfrak{p}$ поля k выбрать в качестве m_a элемент $m_{a,\,\mathfrak{p}} \in k_{\mathfrak{p}}^*$. Пусть S_0 — конечное множество конечных точек поля k, в которых локальный инвариант алгебры X отличен от 0. Тогда если $\mathfrak{p} \notin S_0$, то можно положить $m_{a,\,\mathfrak{p}} = 1$.

Действие группы $F_2 \times A/A_1$ на модуле A_1 имеет вид

$$a_1^\sigma = a_1,\ \ b^\sigma = ba_1^p,\ \ a_1^\tau = a_1^{1+p^2(p-1)/2},\ \ b^\tau = b;\ \ a_1^\omega = a_2^{1+p},\ \ b^\omega = b;\ \ a_1^a = a_1,\ \ b^a = ba_1^{-p}.$$

Пусть сначала $\zeta_2 \in k$. Если $\chi \in \hat{A}_1$, $\chi(a_1) = \zeta_2^i$, $\chi(b) = \zeta_1^j$ и $i \not\equiv 0 \pmod p$, то $F_{\bar\chi}$ порождается подгруппой H_2 и элементами σa, $\tau\omega^{-p(p-1)/2}$. Следовательно, $k_{\bar\chi} = k\left(\sqrt[p]{m_a m_\sigma^{-1}},\ \sqrt[p]{m_\omega m_\tau^{p(p-1)/2}}\right)$. Если $i \equiv 0 \pmod p$, то в алгебре $Me_{\bar\chi}$ элемент $a\sqrt[p]{m_\tau}^{\,-j}\sqrt[p]{m_\omega}^{\,-ip^{-1}}$ коммутирует с элементами подалгебры $M_0 e_{\bar\chi}$, т. е. $Me_{\bar\chi}$ подобна алгебре $[m_\tau^{-j}(m_\omega^{-1}\zeta_1)^{ip^{-1}},\ m_a]_k$. Таким образом, одновременно должны распадаться алгебры $X^i[m_a,\ x_{\bar\chi}]_{k\left(\sqrt[p]{m_a m_\sigma^{-1}},\ \sqrt[p]{m_\omega m_\tau^{p(p-1)/2}}\right)}$ и $[m_\tau^{-j} m_\omega^{-ip^{-1}},\ m_a]_k$.

Пусть $\mathfrak{p} \in S_0$ и либо m_σ, либо $m_\omega m_\tau^{p(p-1)/2}$ не является p-й степенью в $k_{\mathfrak{p}}^*$, тогда можно положить $m_{a,\,\mathfrak{p}} = 1$. Если $m_\sigma m_\omega$, $m_\tau^{p(p-1)/2} \in k_{\mathfrak{p}}^{*p}$, то положим $m_{a,\,\mathfrak{p}}$ равным — m_τ, если $m_\tau \notin k_{\mathfrak{p}}^{*p}$, и произвольному элементу из $k_{\mathfrak{p}}^* \setminus k_{\mathfrak{p}}^{*p}$, если $m_\tau \in k_{\mathfrak{p}}^{*p}$. Легко проверяется, что при таком выборе $m_{a,\,\mathfrak{p}}$ все алгебры $Me_{\bar\chi}$ распадаются.

Пусть теперь $\zeta_2 \notin K_2$. Выберем автоморфизмы σ', τ', ω' расширения $K_2(\zeta_2)/k$, продолжающие соответственно автоморфизмы σ, τ, ω так, чтобы они действовали тривиально на ζ_2. Кроме того, существует автоморфизм γ расширения $K_2(\zeta_2)/k$, действующий тривиально на элементы поля K_2, а на ζ_2 — по формуле $\zeta_2^\gamma = \zeta_2^{1+p}$. Обозначим через H_2' подгруппу группы H_2, которой принадлежит подполе $K_2\left(\sqrt[p]{\zeta_1}\right)$.

Пусть $\chi \in \hat{A}_1$ и $\chi(a_1) = \zeta_2^i$, $\chi(b) = \zeta_1^j$. Если $i \equiv 0 \pmod p$, то $F_{\bar\chi}$ порождается подгруппой H_2' и элементами $a\sigma'$, $\gamma\omega'$, $\tau'\gamma^{p(p-1)/2}$. Следовательно, $k_{\bar\chi} = k\left(\sqrt[p]{m_\sigma^{-1} m_a},\ \sqrt[p]{\zeta_1^{-1} m_\omega m_\tau^{p(p-1)/2}}\right)$. При $i \equiv 0 \pmod p$ $Me_{\bar\chi}$ подобна алгебре $[(\zeta_1 m_\omega^{-1})^{ip^{-1}} m_\tau^{-j},\ m_a]_k$. Если либо $m_\sigma \notin k_{\mathfrak{p}}^{*p}$, либо $m_\omega \zeta_1^{-1} m_\tau^{p(p-1)/2} \notin k_{\mathfrak{p}}^{*p}$, то положим $m_{a,\,\mathfrak{p}} = 1$. Если m_σ, $m_\omega \zeta_1^{-1} m_\tau^{p(p-1)/2} \in k_{\mathfrak{p}}^{*p}$, то положим $m_{a,\,\mathfrak{p}} = -m_\tau$ при $m_\tau \notin k_{\mathfrak{p}}^{*p}$ и $m_{a,\,\mathfrak{p}}$ — произвольный элемент из $k_{\mathfrak{p}}^* \setminus k_{\mathfrak{p}}^{*p}$ при $m_\tau \in k_{\mathfrak{p}}^{*p}$. Непосредственная проверка показывает, что при таком выборе $m_{a,\,\mathfrak{p}}$ все алгебры $Me_{\bar\chi}$ распадаются.

Остается рассмотреть случай, когда $\zeta_2 \notin k$, но $\zeta_2 \in K_2$. Заметим, что в этом случае существуют такие числа c_1, c_2, c_3, не делящиеся одновременно на p, что выполняется равенство $m_\sigma^{c_1} m_\tau^{c_2} m_\omega^{c_3} = \zeta_1 B^p$, где $B \in k$. Пусть $\chi \in \hat{A}_1$ и $\chi(a_1) = \zeta_2^i$, $\chi(b) = \zeta_1^j$. Если $i \not\equiv 0 \pmod p$, то $k\left(\sqrt[p]{m_a m_\sigma^{-1}}\right) \subset k_{\bar\chi}$. Ясно, что $k_{\bar\chi} = k\left(\sqrt[p]{m_a m_\sigma^{-1}}\right)$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\zeta_2^\tau = \zeta_2^{1+p^2(p-1)/2}$, $\zeta_2^\omega = \zeta_2^{1+p}$. В противном случае $k_{\bar\chi} = k\left(\sqrt[p]{m_a m_\sigma^{-1}},\ \sqrt[p]{m_\sigma^{c_4} m_\tau^{c_5} m_\omega^{c_6}}\right)$, где c_5 и c_6 одновременно не делятся на p. При $i \equiv 0 \pmod p$ алгебра $Me_{\bar\chi}$ подобна алгебре $[(\zeta_1 m_\omega^{-1})^{ip^{-1}} m_\tau^{-j},\ m_a]_k$. Если $(k_{\bar\chi} : k) = p$, то, действуя на равенство $\sqrt[p]{m_\sigma}^{\,c_1}\sqrt[p]{m_\tau}^{\,c_2} \times \sqrt[p]{m_\omega}^{\,c_3} = \zeta_2 B'$, где $B' \in k$, автоморфизмами ω и τ, получаем $c_2 = p(p-1)/2$ и $c_3 = 1$, т. е. $m_\omega \zeta_1^{-1} m_\tau^{p(p-1)/2} m_\sigma^{c_1} \in k^{*p}$.

Пусть $\mathfrak{p} \in S_0$, Если $m_\sigma \notin k_{\mathfrak{p}}^{*p}$ или при $(k_{\bar\chi} : k) = p^2$ и $m_\sigma^{c_4} m_\tau^{c_5} m_\omega^{c_6} \notin k_{\mathfrak{p}}^{*p}$, то, как и прежде, положим $m_{a,\,\mathfrak{p}} = 1$. Иначе, если $m_\sigma \in k_{\mathfrak{p}}^{*p}$ или $(k_{\bar\chi} : k) = p^2$ и $m_\tau^{c_5} m_\omega^{c_6} \in k_{\mathfrak{p}}^{*p}$, то из этих условий и условия $m_\tau^{c_2} m_\omega^{c_3} \xi_1^{-1} \in k_{\mathfrak{p}}^{*p}$ следует, что $m_{a,\,\mathfrak{p}} = -m_\tau$ при $m_\tau \notin k_{\mathfrak{p}}^{*p}$, а если $m_\tau \in k_{\mathfrak{p}}^{*p}$, то $m_{a,\,\mathfrak{p}}$ — произвольный элемент из $k_{\mathfrak{p}}^* \setminus k_{\mathfrak{p}}^{*p}$. Таким образом, мы показали, что для всех конечных точек поля k сопутствующие локальные задачи погружения разрешимы.

Пусть S — конечное множество простых дивизоров поля k, содержащее S_0, делители p, бесконечные дивизоры, критические дивизоры для расширения K_1/k. Обозначим через L_0 поле классов к подгруппе $\mathcal{J}_k^p k^* U_S$, где $\mathcal{J}_k$ — группа иделей поля k, $U_S = \prod_{\mathfrak{p} \notin S} U_\mathfrak{p}$ ($U_\mathfrak{p}$ — группа $\mathfrak{p}$-адических единиц, а произведение берется по всем простым дивизорам поля k, не входящим в множество S). Положим $m_S = \prod_{\mathfrak{p} \in S} m_{a,\mathfrak{p}}^{-1}$. Согласно теории полей классов, элементу m_S соответствует некоторый автоморфизм α расширения L_0/k. По теореме Чеботарева о плотности, существует простой дивизор $\mathfrak{a}$ поля k, принадлежащий автоморфизму α. Таким образом, в поле k существует такой элемент m_a, что при $\mathfrak{p} \in S$ $m_a = m_{a,\mathfrak{p}} l_\mathfrak{p}^p$, где $l_\mathfrak{p} \in k_\mathfrak{p}^*$, а во всех остальных точках, кроме $\mathfrak{a}$, m_a — $\mathfrak{p}$-адическая единица.

Заметим, что, по построению, в множество критических дивизоров расширения $K_1(\sqrt[p]{m_a})/k$ кроме дивизоров из множества S входит лишь $\mathfrak{a}$. Кроме того, условие согласности во всех точках из множества S выполнено, следовательно, остается рассмотреть сопутствующую локальную задачу $\left(K_1(\sqrt[p]{m_a}) \otimes_k k_\mathfrak{a}/k_\mathfrak{a}, G_1, \varphi_2\right)$. Заметим также, что инварианты алгебр $[m_\tau^{-j}(m_\omega^{-1}\zeta_1)^i, m_a]_k$ равны 0 во всех точках, кроме разве лишь $\mathfrak{a}$. Тогда из равенства суммы инвариантов 0 следует, что и в точке $\mathfrak{a}$ инвариант нулевой.

Из закона взаимности для элементов m_σ и m_a следует, что $m_\sigma \in k_\mathfrak{a}^{*p}$, следовательно, алгебра $X^i[m_a, x_\chi]_{k_\chi}$ распадается над полем $\left(k_\mathfrak{a}\sqrt[p]{m_a m_\sigma^{-1}}\right)$. Таким образом, мы показали, что для задачи погружения $\left(K_1\sqrt[p]{m_a}\right)/k, G_1, \varphi_2)$ выполнено условие согласности. Докажем ее разрешимость. Пусть H_3 — подгруппа группы $F_1 \times A/A_1$, действующая тривиально на $\hat{A}_1$, $F_3 = (F_1 \times A/A_1)/H_3$ и K_3 — подполе поля L_1, принадлежащее подгруппе H_3. Воспользуемся вновь критерием А. В. Яковлева и докажем инъективность отображения $\psi_3 : H^1(F_3, \hat{A}_1) \to \prod_\mathfrak{p} H^1(F_{3\mathfrak{p}}, \hat{A}_1)$. Заметим, что в группе F_3 существуют такие σ_1, σ_2, что выполняются равенства $\chi_1^{\sigma_1} = \chi_1^{1+p}$, $\chi_2^{\sigma_1} = \chi_2$; $\chi_1^{\sigma_2} = \chi_1\chi_2$, $\chi_2^{\sigma_2} = \chi_2$, где $\chi_1, \chi_2 \in \hat{A}_1$ и $\chi_1(a_1) = \zeta_2$, $\chi_1(b) = 1$; $\chi_2(a_1) = 1$, $\chi_2(b) = \zeta_1$.

Пусть $f \in Z^1(F_3, \hat{A}_1)$ — коцикл, ограничение которого на любую циклическую подгруппу распадается. Тогда, рассматривая ограничение на подгруппы $\{\sigma_1\}$, $\{\sigma_2\}$ и $\{\sigma_1\sigma_2\}$, получаем, что f — кограница. Случай, когда группа F_2 является собственной подгруппой группы $\mathrm{Aut}_p A$, рассматривается аналогично.

Пусть теперь $\zeta_1 \notin k$ и $\mathfrak{p}$ — критическая точка для расширения K/k. Тогда если $\zeta_1 \notin k_\mathfrak{p}$, то локальная задача погружения разрешима, так как в этом случае группа Галуа максимального p-расширения локального поля является свободной про-p-группой. Если же $\zeta_1 \in k_\mathfrak{p}$, то сопутствующая локальная задача разрешима при выполнении условия согласности, как мы это показали выше. Остается воспользоваться теоремой Нойкирха (см. [4]), из которой следует, что при $\zeta_1 \notin k$ в случае p-групп разрешимость глобальной задачи погружения эквивалентна разрешимости сопутствующих локальных задач. Теорема доказана.

Литература

1. Делоне Б. Н., Фаддеев Д. К. Исследования по геометрии теории Галуа // Мат. сб. 1944. Т. 15 (57), № 2. С. 243—276.
2. Лурье Б. Б. Об условии согласности в проблеме погружения полей // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1977. Т. 71. С. 155—162.
3. Яковлев А. В. Задача погружения для числовых полей // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1967. Т. 31, № 2. С. 211—224.
4. Neukirch J. On solvable number fields // Invent. Math. 1979. Vol. 53, N 2. P. 135—164.

Б. Б. ЛУРЬЕ

ОБ УНИВЕРСАЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ ЗАДАЧАХ ПОГРУЖЕНИЯ

Рассматриваются задачи погружения полей (или алгебр Галуа), связанные с точными последовательностями конечных групп $1 \to A \to G \xrightarrow{\varphi} F \to 1$, где F реализована как группа Галуа расширения K/k (K может быть как полем, так и алгеброй Галуа). Как известно, если указанное расширение групп является полупрямым (другими словами, расщепляется), соответствующая задача погружения всегда разрешима [1]. Назовем расширение групп универсальным, если соответствующая задача погружения разрешима для любого расширения K/k с группой F (универсальная разрешимость).

В настоящей работе построены примеры универсальных, но не полупрямых расширений. Рассмотрен вопрос о характеризации универсальных расширений в теоретико-групповых терминах.

1°. Легко видеть, что когда F — группа порядка 2, всякое универсальное расширение является полупрямым. Действительно, положим $k=\mathbb{R}$, $K=\mathbb{C}$ (поля вещественных и комплексных чисел). Поскольку $\mathbb{C}$ — алгебраически замкнуто, поле-ядро решения совпадает с $\mathbb{C}$; поэтому F как группа Галуа поля-ядра реализуется в G. Оказывается, впрочем, что фактор-группа порядка 2 — единственная, для которой класс универсальных расширений совпадает с классом полупрямых. Рассмотрим сначала несколько простых примеров.

а. Пусть G — некоммутативная группа порядка p^3 и периода p^2 (p нечетное). Она задается двумя образующими, α, β, и соотношениями $\alpha^{p^2}=1$, $\beta^p=1$, $\beta^{-1}\alpha\beta=\alpha^{1+p}$. Пусть φ — гомоморфизм G на циклическую группу порядка p с образующей f, такой, что $\varphi(\alpha)=f$, $\varphi(\beta)=1$. Ядро A этого отображения порождено элементами α^p, β. Для $p\neq 2$ всякий прообраз элемента f в G имеет порядок p^2, так что это расширение не расщепляется. В то же время всякая задача погружения с циклическим расширением K/k степени p разрешима. Это тривиально, когда характеристика поля k равна p, поскольку в этом случае группа Галуа максимального p-расширения поля k — свободная про-p-группа. Поэтому будем считать, что $\operatorname{char} k\neq p$. В силу [5] можно считать, что k содержит корень степени p из 1. Группа F — циклическая, значит, условие согласности гарантирует погружаемость [4], а условие согласности равносильно разрешимости всех сопутствующих брауэровских задач. Но при $\chi(\alpha^p)=1$ соответствующая задача определяется прямым расширением, а для $\chi(\alpha^p)\neq 1$ происходит подъем основного поля k до K, так что условие согласности всегда выполнено.

На этот пример можно посмотреть и по-другому. Пусть K/k — циклическое расширение полей степени p. Будем считать, что $\varepsilon=\sqrt[p]{1}\in k$, а $\sqrt[p]{\varepsilon}\notin K$. Поле K получено присоединением к полю k элемента $\sqrt[p]{c}$, где $c\in k^*$. Положим $L=K\left(\sqrt[p]{\varepsilon}, \sqrt[p^2]{c}\right)$. Расширение L нормально над k и имеет указанную группу G