И. П. Рязанцева, О нелинейных операторных уравнениях с аккретивными отображениями, *Изв. вузов. Матем.*, 1985, номер 1, 42–46

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа.— М., 1980.— 286 с.
2. Джрбашян М. М. О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций.— ДАН АрмССР, 1945, т. 3, № 1, с. 3—9.
3. Шамоян Ф. А. О нулях аналитических в круге функций, растущих вблизи границы.— Изв. АН АрмССР. Сер. матем., 1983, т. 18, № 1, с. 15—27.
4. Horowitz C. Zeros of functions in the Bergman spaces.—Duke Math. J., 1974, v. 41, № 4, p. 693—710.
5. Beller Eliyahu. Zeros of A^p functions and related classes of analytic functions.— Isr. J. Math., 1975, v. 22, № 1, p. 68—80.
6. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций.— М.— Л., 1950.— 703 с.
7. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.— М., 1966.— 671 с.

г. Свердловск

Поступила
20.04.1984

И. П. Рязанцева

УДК 517.98

О НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЯХ С АККРЕТИВНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

1. Пусть X — вещественное рефлексивное банахово пространство, X^* — его сопряженное, причем X и X^* строго выпуклы, $\langle x, y\rangle$ — значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$. Пусть $U: X \to X^*$, $J: X^* \to X$ — дуальные отображения с масштабной функцией $\mu(t) = t$ (см. [1]) в X и X^* соответственно. Предположим также, что оператор $U: X \to X^*$ непрерывный.

Определение 1 (см., напр., [1]). Оператор $A: X \to X$ называется аккретивным, если

$$\langle y_1 - y_2,\ U(x_1 - x_2)\rangle \geqslant 0 \tag{1}$$

для любых x_1 и x_2 из $D(A)$, $y_1 \in Ax_1$, $y_2 \in Ax_2$.

Лемма 1. *Аккретивный оператор $A: X \to X$ с $D(A) = X$ в рефлексивном строго выпуклом банаховом пространстве с непрерывным дуальным отображением локально ограничен в каждой точке X.*

Доказательство ведем от противного. Пусть $x_n \to x_0$, а $\|Ax_n\| \to \infty$, $x_n \in X$ $\forall n \geqslant 0$. Построим последовательность $\{z_n\}: z_n = U(x_n - x_0 - y) + v$, где $Uy = v$. Это можно сделать для любого $v \in X^*$, т. к. $R(U) = X^*$ (см. [1]). В силу непрерывности дуального отображения в X получим $\|z_n\| = \|U(x_n - x_0 - y) + v\| \to 0$ при $n \to \infty$. Поскольку $D(A) = X$, то $x_0 + y \in D(A)$ $\forall y \in X$. Запишем условие аккретивности оператора A: $\langle Ax_n - A(x_0 + y), z_n - v\rangle \geqslant 0$. Значит, $\langle Ax_n, v\rangle \leqslant \|Ax_n\|\,\|z_n\| + \|A(x_0 + y)\|(\|z_n\| + \|v\|)$. Пусть $a_n = 1 + \|Ax_n\|\,\|z_n\|$. Тогда из последнего соотношения имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\langle Ax_n, v\rangle / a_n| < \infty \quad \forall v \in X^*,$$

что противоречит предположению (см. [2], с. 84).

Определение 2 (см. [3]). Аккретивный оператор $A: X \to X$ называется максимальным аккретивным, если его график не является правильной частью графика никакого другого аккретивного оператора $B: X \to X$.

Определение 3 (см. [3]). Аккретивный оператор $A: X \to X$ называется m-аккретивным, если $R(A + tE) = X$ для любого $t > 0$ (E — единичный оператор в X).

Если оператор A m-аккретивный, то он максимальный аккретивный, но обратное, вообще говоря, неверно [4].

2. При условиях п. 1 рассмотрим в X уравнение

$$Ax=f, \tag{2}$$

где $A:X\to X$ — произвольный, возможно, многозначный аккретивный оператор.

Разрешимость уравнения с аккретивным оператором существенно зависит не только от свойств оператора, но и от свойств дуального отображения. Последние целиком определяются свойствами пространств X и X^* (см. [1]). В [1], [5], [6] доказаны теоремы существования решений уравнений с аккретивными операторами, удовлетворяющими некоторым условиям непрерывности или замкнутости. В данной работе исследуется вопрос о разрешимости уравнения с произвольным аккретивным оператором.

Пусть в X задана упорядоченная по включению последовательность конечномерных подпространств $\{X_n\}$ и соответствующее семейство операторов $\{P_n\}$, $P_n:X\to X_n$. Тогда справедлива

Лемма 2 ([1], с. 335). *Для всякого $x\in X_n$ имеет место равенство $P_n^*Ux=Ux$, где P_n^* — оператор, сопряженный P_n.*

Обозначим через $R(Ax-f)$ выпуклую замкнутую оболочку слабых пределов последовательностей из $\{Ax_n-f\}$, где $\{x_n\}$ сильно сходится к $x\in X$, $x_n\in X$ $\forall n>0$.

Определение 4 (см. [7], [8]). Точка $x_0\in X$ называется решением уравнения (2), если $0\in R(Ax_0-f)$.

Пусть $B_r(0)$ есть шар радиуса $r>0$ с центром в нуле пространства X.

Лемма 3. *Пусть оператор $A:X_n\to X_n$ (не обязательно аккретивный) определен в шаре $B_r(0)$ пространства X, и на границе шара справедливо неравенство $\langle Ax-f,\ Ux\rangle\geqslant 0$. Тогда в шаре существует решение уравнения $Ax=f$.*

Доказательство. С помощью дуального отображения U сделаем преобразование шара $B_r(0)$ на шар $B_r^*(0)$ пространства X_n^* (см. лемму 2). Тогда для любого $x\in B_r(0)$ найдется $y\in X_n^*$, что $x=Iy$ (см. [1], [9]). На границе шара $B_r^*(0)$ справедливо неравенство $\langle AIy-f,\ y\rangle\geqslant 0$. Значит, по теореме А. А. Абрамова и А. Н. Гаиповой [7] найдется такой элемент $y_0\in B_r^*(0)$, что $0\in R(AIy_0-f)$ (пространства X_n и X_n^* можно идентифицировать). А т. к. $I:X_n^*\to X_n$ непрерывно (см. [1]), то $0\in R(Ax_0-f)$, где $x_0=Iy_0$.

По аналогии с [7] решение уравнения с разрывным аккретивным оператором можно определить еще и следующим образом.

Определение 5. Точка $x_0\in X$ называется решением уравнения (2), если для любого $x\in D(A)$

$$\langle y-f,\ U(x-x_0)\rangle\geqslant 0 \quad \forall y\in Ax. \tag{3}$$

Пусть $\bar{A}$ — максимальное аккретивное расширение аккретивного оператора A, а $\bar{R}(x)$ — множество значений оператора $\bar{A}$ в точке x.

Так как дуальное отображение $U:X\to X^*$ непрерывно в X, то нетрудно видеть, что $R(Ax-f)\subset\bar{R}(x)-f$ $\forall x\in X$. Теперь пусть $u\in\bar{R}(x_0)-f$, но $u\notin R(Ax_0-f)$. Поскольку множество $R(Ax_0-f)$ замкнуто и выпукло, то существует такой вектор $g\in X$, что $\langle z-u,\ Ug\rangle<0$ $\forall z\in R(Ax_0-f)$. Построим последовательность (ср. с [7]) $\{x_n\}$: $x_n=x_0+\mu_n g$, $\mu_n\downarrow 0$, $n\to\infty$, т. е. $x_n\to x_0$. Множество $\{\bar{A}x_n\}$ ограничено, т. к. оператор $\bar{A}$ локально ограничен. Следовательно, $Ax_k-f\rightharpoonup f_1$, $\{x_k\}\subset\{x_n\}$, т. е. $f_1\in R(Ax_0-f)$. Запишем условие аккретивности $\bar{A}:\langle\bar{A}x_k-f-u,\ U(x_k-x_0)\rangle\geqslant 0$, т. е. $\langle\bar{A}x_k-f-u, Ug\rangle\geqslant 0$, но тогда $\lim\langle Ax_k-f-u,\ Ug\rangle=\langle f_1-u,\ Ug\rangle\geqslant 0$. Получили противоречие. Тем самым доказана

Лемма 4. *Для аккретивного оператора $A:X\to X$ с $D(A)=X$ в рефлексивном строго выпуклом банаховом пространстве с непрерывным дуальным отображением определения решения 4 и 5 эквивалентны.*

Отметим, что в условиях последней леммы оператор A имеет единственное максимальное аккретивное расширение.

Теорема 1. *Пусть X — вещественное банахово пространство, в котором задана упорядоченная по включению последовательность конечномерных подпространств $\{X_n\}$ и соответствующее семейство проекторов, причем $\{X_n\}$ предельно плотна в X, пространства X и X^* равномерно выпуклы, $A: X \to X$ — аккретивный оператор с $D(A) = X$. Пусть существует такое $r > 0$, что $\langle y - f, Ux \rangle \geqslant 0$ при $\|x\| = r$, $y \in Ax$, и дуальное отображение U секвенциально слабо непрерывно. Тогда уравнение* (2) *имеет в X по крайней мере одно решение.*

Доказательство. Рассмотрим в X_n уравнение $P_n(Ax - f) = 0$. При $\|x\| = r$, $x \in X_n$ имеем (см. лемму 2) $\langle P_n(Ax - f), Ux \rangle = \langle Ax - f, Ux \rangle \geqslant 0$. Тогда согласно лемме 3 найдется по крайней мере один элемент $x_n \in X_n$, $\|x_n\| \leqslant r$, такой, что $0 \in R(P_n(Ax_n - f))$. Можно проверить, что оператор $P_n\bar{A}: X_n \to X_n$ есть максимальное аккретивное расширение оператора $P_nA: X_n \to X_n$. Значит (см. лемму 4), существует такое $y^n \in \bar{A}x_n$, что $P_n(y^n - f) = 0$. Покажем, что множество $\{y^n\}$ ограничено в X. Так как оператор $\bar{A}$ локально ограничен, то существуют такие числа $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$, что при $\|u^n\| \leqslant a_1$ имеет место $\|v^n\| \leqslant a_2$, где $v^n \in \bar{A}u^n$. Пусть u^n определяется соотношением $U(u^n - x_n) = w^n - Ux_n$, где $w^n = Uy^n/\|y^n\|\tilde{a}_1$, причем $\tilde{a}_1 \leqslant r$. Поскольку X равномерно выпукло, то дуальное отображение $I: X^* \to X$ равномерно непрерывно на любом ограниченном множестве (см. [10], с. 43), т. е. существует неубывающая функция $\omega_R(t)$, $t \geqslant 0$, $\omega_R(t) \to 0$ при $t \to 0$ и $\|Ix - Iy\| \leqslant \omega_R(\|x - y\|)$, $\|x\| \leqslant R$, $\|y\| \leqslant R$. Возьмем $R = 2r$, тогда т. к. $IU = E$ (см. [9]), то $\|u^n\| \leqslant \omega_R(\|U(x_n) - U(x_n - u^n)\|) = \omega_R(\|w^n\|) = \omega_R(\tilde{a}_1)$. Выберем $\tilde{a}_1$ настолько малым, чтобы $\omega_R(\tilde{a}_1) \leqslant a_1$. Это возможно, т. к. $\omega_R(t) \to 0$ при $t \to 0$. При таком выборе последовательности $\{w^n\}$ имеем $\|v^n\| \leqslant a_2$, где $v^n \in \bar{A}u^n$. Запишем условие аккретивности оператора $\bar{A}$: $\langle y^n - v^n, U(x_n - u^n) \rangle = \langle y^n - v^n, Ux_n - w^n \rangle \geqslant 0$ или

$$\langle y^n, w^n \rangle \leqslant \langle y^n, Ux_n \rangle + \langle v^n, w^n - Ux_n \rangle. \tag{4}$$

Но $\langle y^n, Ux_n \rangle = \langle P_ny^n, Ux_n \rangle = \langle f, Ux_n \rangle$. Теперь из (4) имеем $\tilde{a}_1\|y^n\| \leqslant \|f\|r + a_2(\tilde{a}_1 + r) = a_3$, т. е. $\|y^n\| \leqslant a_3/\tilde{a}_1$. Пусть $\{x_k\} \subset \{x_n\}$ и $x_k \rightharpoonup \bar{x} \in X$. Так как последовательность подпространств $\{X_n\}$ предельно плотна в X, то $\|P_nz - z\| \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $z \in X$. Пусть $P_nz = z_n$. Тогда имеем

$$\langle y^n - f, U(z - x_n) \rangle = \langle y^n - f, U(z - x_n) - U(z_n - x_n) \rangle + \langle y^n - f, U(z_n - x_n) \rangle. \tag{5}$$

Но $\langle y^n - f, U(z_n - x_n) \rangle = \langle P_n(y^n - f), U(z_n - x_n) \rangle = 0$ (см. лемму 2). Кроме того, в силу равномерной выпуклости X^* получим $\|U(z - x_n) - U(z_n - x_n)\| \leqslant \omega^*_{\bar{R}}(\|z - z_n\|)$, где $\bar{R} = r + \|z\|$, $\omega^*_{\bar{R}}(t)$ $(t \geqslant 0)$ — неубывающая функция, причем $\omega^*_{\bar{R}}(t) \to 0$ при $t \to 0$. Следовательно, $\|U(z - x_n) - U(z_n - x_n)\| \to 0$ при $n \to \infty$. А т. к. последовательность $\{y^n\}$ ограничена, то из (5) получим

$$\langle y^n - f, U(z - x_n) \rangle \to 0 \ \forall z \in X, \ n \to \infty. \tag{6}$$

Далее, аккретивность $\bar{A}$ дает $\langle y - y^k, U(z - x_k) \rangle \geqslant 0$, $y \in \bar{A}z$. Откуда при $k \to \infty$ в силу секвенциальной слабой непрерывности оператора U и из (6) имеем $\langle y - f, U(z - \bar{x}) \rangle \geqslant 0$, $y \in \bar{A}z$, т. е. $f \in \bar{R}(\bar{x})$. Теорема доказана.

Замечание 1. Если в условиях теоремы 1 оператор $\bar{A}$ строго аккретивный, т. е. равенство нулю в (1) имеет место тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, то решение уравнения (2) единственно, и последовательность $\{x_n\}$ при $n \to \infty$ слабо сходится к решению (2).

3. Задача нахождения решения уравнения (2) с произвольным аккретивным оператором, вообще говоря, некорректна. В работах [3], [11] для уравнений с деминепрерывными аккретивными и m-аккретивными операторами рассмотрен операторный метод регуляризации, который сводится к решению уравнения вида

$$Ax+\alpha x=f^{\delta},\ \alpha>0,\ \|f-f^{\delta}\|\leqslant\delta. \tag{7}$$

Пусть $A:X\to X$ — разрывный аккретивный оператор, $D(A)=X$. Исследуем для этого случая сходимость метода (7). Рассмотрим в X уравнение

$$\bar{A}x+\alpha x=f^{\delta}. \tag{8}$$

В силу аккретивности $\bar{A}$ имеем $\langle y+\alpha x-f^{\delta},\ Ux\rangle\geqslant\alpha\|x\|(\|x\|-\|A0\|-\|f^{\delta}\|)$, $y\in\bar{A}x$. Следовательно, найдется такое $r_1>0$, что

$$\langle y+\alpha x-f^{\delta},\ Ux\rangle\geqslant 0,\ y\in\bar{A}x,\ \|x\|=r_1.$$

Пусть пространства X, X^* и дуальное отображение $U:X\to X^*$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда для любого $\alpha>0$ существует решение (причем единственное) уравнения (8), которое обозначим через x_α^δ. Значит, оператор $\bar{A}$ m-аккретивный. Далее, оператор E также m-аккретивный. Из теоремы 1 работы [12] следует, что оператор $\bar{A}+\alpha E$ m-аккретивный, а следовательно, и максимальный аккретивный. Значит, решение уравнения (7) единственно. Далее, поскольку x_α^δ — решение (8), то существует такое $y_\alpha^\delta\in\bar{R}(x_\alpha^\delta)$, что $y_\alpha^\delta+\alpha x_\alpha^\delta=f^\delta$, т. е. элемент x_α^δ будет и решением уравнения (7). Верно и обратное.

Теперь доказательство сходимости последовательности $\{x_\alpha^\delta\}$ при $\delta/\alpha\to 0$, $\alpha\to 0$ к некоторому решению уравнения (2) ((2) предполагается разрешимым) можно провести аналогично [3], [11].

Отметим, что (см. доказательство теоремы 1) из равномерной выпуклости пространства X^* и единственности решения уравнения (7) следует сильная сходимость для (7) метода Галёркина (ср. с [8]).

Аналогично [13] можно установить, что параметр регуляризации $\alpha=\bar{\alpha}$ можно выбирать из принципа невязки: $\bar{\alpha}\|x_{\bar{\alpha}}^{\delta}\|=K\delta^p$, $K>2$, $0<p\leqslant 1$, где $x_{\bar{\alpha}}^{\delta}$ — решение уравнения (7) при $\alpha=\bar{\alpha}$. Кроме того, отметим, что результаты [14] в условиях данной заметки также справедливы.

Замечание 2. Основные утверждения работы получены при определенных требованиях на пространства X и X^*. Примеры таких банаховых пространств см. [1], [3], [11]. Сужая класс аккретивных операторов, теоремы существования можно доказать и для более широкого множества банаховых пространств (см., напр., [1], [5], [6]).

Замечание 3. Требование существования в X последовательности конечномерных подпространств $\{X_n\}$, упорядоченных по включению и таких, что $\{X_n\}$ предельно плотна в X, в теореме 1 не является необходимым (см., напр., [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.— М., 1972.— 416 с.

2. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.— М., 1978.— 336 с.

3. Reich S. Approximating zeros of accretive operators.— Proc. Amer. Math. Soc., 1975, v. 51, № 2, p. 381—384.

4. Cernes A. Ensembles maximaux accrétifs et m-accretifs.— Isr. J. Math., 1974, v. 19, № 4 p. 335—348.
5. Yen C.-L. The range m-dissipative sets.— Bull. Amer. Math. Soc., 1972, v. 78, № 2, p. 197—199.
6. Fitzgibbon W. E. Weakly continuous accretive operators.— Bull. Amer. Math. Soc., 1973, v. 79, № 2, p. 473—474.
7. Абрамов А. А., Гаипова А. Н. О существовании решений некоторых уравнений, содержащих разрывные монотонные преобразования.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 2, с. 525—528.
8. Рязанцева И. П. Об уравнениях с полумонотонными разрывными отображениями.— Матем. заметки, 1981, т. 30, № 1, с. 143—152.
9. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М., 1972.— 588 с.
10. Browder F. E. Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces.— Proc. Simp. Pure Math., v. 18, p. 2. Amer Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1976.
11. Альбер Я. И. О решении методом регуляризации операторных уравнений I рода с аккретивными операторами в банаховом пространстве.— Дифференц. уравнения, 1975, т. XI, № 12, с. 2242—2248.
12. Corduneanu Adrian. Some remarks on the sum of two m-accretive mappings.— Rev. roum. math. pures et appl., 1975, v. 20, № 4, p. 411—414.
13. Альбер Я. И., Рязанцева И. П. О решении нелинейных задач с монотонными разрывными отображениями.— Дифференц. уравнения, 1979, т. XV, № 2, с. 331—342.
14. Рязанцева И. П. Регуляризация уравнений с аккретивными операторами методом последовательных приближений.— Сиб. матем. журн., 1980, т. XXI, № 1, с. 223—226.

г. Горький

Поступила
26.01.1983

А. А. Туганбаев

УДК 512.55

ДИСТРИБУТИВНЫЕ СПРАВА КОЛЬЦА

Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей, модули унитарными и, когда не указана сторона, правыми. Слова типа „нётерово кольцо" означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Модуль называется дистрибутивным, если $A\bigcap(B+C)=A\bigcap B+A\bigcap C$ для любых его подмодулей A, B, C. Дистрибутивное справа и слева кольцо называется дистрибутивным. Дистрибутивными кольцами являются коммутативные дедекиндовы кольца (напр., кольцо целых чисел), коммутативные регулярные кольца, кольца нормирования.

Х. Х. Брунгс [1] доказал, что если R — нётерова справа область, то разложимость каждого правого идеала кольца R в произведение (двусторонних) первичных идеалов равносильна правой дистрибутивности кольца R (в коммутативном случае этот класс колец совпадает с классом дедекиндовых колец). В [2] описаны нётеровы дистрибутивные полупервичные кольца, а в [3] — нётеровы дистрибутивные кольца. В связи с этим докажем следующие две теоремы.

Теорема 1. *Для нётерова справа кольца R равносильны условия*: (а) *каждой правый идеал кольца R является произведением первичных идеалов*; (б) *кольцо R дистрибутивно справа.*

Теорема 2. *Для кольца R равносильны условия*:

(а) *R — нётерово справа дистрибутивное кольцо*;

(б) *R — нётерово слева дистрибутивное кольцо*;

(в) *R — конечное прямое произведение цепных артиновых колец и инвариантных нётеровых областей, в которых каждый идеал является произведением максимальных идеалов.*

В связи с теоремой 1 заметим, что в дистрибутивном справа нётеровом справа кольце разложение в произведение первичных идеалов, вообще говоря, не единственно. Кроме того, теорема 2 не допускает непосредственного обобщения на нётеровы справа дистрибутивные справа кольца. Действительно, пусть R — нётерово справа цепное справа кольца с единственным максимальным правым идеалом M, содержащее такой ненулевой первичный идеал N,