инвариантом, определяемым дифференциальной окрестностью первого порядка прямой комплекса – углом между нормалями к касательной гиперплоскости к гиперповерхности, изображающей комплекс в обоих пространствах $^2R_4$ в метрике пространства $^2R_4$ с расстоянием Δ ; этот инвариант может быть выражен через "кривизну" комплекса в пространстве $^{01}S_3^1$, определяющейся аналогично"кривизне" комплекса ь пространстве Лобачевского $^1S_3$ [4, с.281].

Литература

I. Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства. М., "Наука", I969.

2. Железина И. И. Линейчатая геометрия вырожденных неевклидовых пространств. – Доклады АН СССР, т.I06, № 6, I956, с.959-962.

3. Кованцов Н. И. Теория комплексов.Киев, Изд-во Киевск.ун-та, I963.

4. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М., "Наука", I966.

5. Широков П. А., Широков А. П. Аффинная дифференциальная геометрия. М., ГИТТЛ, I959.

Б.А. Розенфельд, Т.А. Степашко

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ МНОГООБРАЗИЙ ОБРАЗОВ ПРОСТОТЫ

Образы простоты [I] – важнейшие, наряду с образами симметрии, геометрические образы однороцных пространств. В случае, когда фундаментальная группа однороцного пространства является простой вещественной или комплексной группой Ли, эти образы, вместе с более общими образами полупростоты, характеризуются тем, что их стационарные подгруппы являются параболическими подгруппами фундаментальных групп; в случае образов простоты эти подгруппы определяются одним простым корнем группы, а в случае образов полупростоты – несколькими простыми

корнями. К образам простоты относятся точки, прямые и плоскости проективных пространств, точки абсолютов, прямолинейные образующие и плоские образующие абсолютов неевклидовых пространств (в некоторых случаях послелние образы являются образами полупростоты) и нулевые точки, прямые и плоскости симплектических пространств.

В настоящей работе мы найдем топологическое строение многообразий всех образов простоты однородных пространств, фундаментальные группы которых являются комплексными и некомпактными вещественными простыми группами Ли бесконечных серий (таблица всех таких однородных пространств приведена в начале работы [2]). § I этой работы написан Б.А.Розенфельдом, §§2-4-Т.А.Степашко.

§ I. Локальные расслоения многообразий образов простоты

Л.И.Кантор [3] показал, что алгебра Ли $\underline{G}$ фундаментальной группы G однородного пространства для всякой параболической подгруппы P группы может быть представлена в виде прямой суммы подпространств

$$\underline{G} = \underline{G}_{-k} \oplus \underline{G}_{-k+1} \oplus \ldots \oplus \underline{G}_{-1} \oplus \underline{G}_0 \oplus \underline{G}_1 \oplus \ldots \oplus \underline{G}_{k-1} \oplus \underline{G}_k, \quad (1)$$

причем подалгебра $\underline{P}$ алгебры Ли $\underline{G}$, соответствующая подгруппе P, имеет вид

$$\underline{P} = \underline{G}_0 \oplus \underline{G}_1 \oplus \ldots \oplus \underline{G}_{k-1} \oplus \underline{G}_k, \quad (2)$$

а прямую сумму

$$\underline{T} = \underline{G}_{-k} \oplus \underline{G}_{-k+1} \oplus \ldots \oplus \underline{G}_{-1} \quad (3)$$

можно рассматривать как касательное пространство к фактор-пространству G/P, т.е. к многообразию образов простоты или полупростоты. Разбиение (3) определяет локальное расслоение многообразия G/P.

Ниже мы покажем, что всякому локальному расслоению (3) соответствует расслоение соответствующего пространства образов простоты в целом.

§ 2. Топологическое строение многообразий образов простоты с комплексными фундаментальными группами

Для выяснения топологического строения многообразий образов простоты комплексных пространств $P_n(i)$, $S_n(i)$ и $Sp_n(i)$ введем в эти пространства метрику пространства $\bar{S}_n(i)$. При этом указанные многообразия становятся компактными симметрическими римановыми пространствами, фундаментальными группами которых являются, соответственно, группа движений пространства $\bar{S}_n(i)$ и ее пересечения с фундаментальными группами пространств $S_n(i)$ и $Sp_n(i)$. В случае пространства $P_n(i)$ это риманово пространство является симметрическим пространством класса AIII по терминологии Картана [4, с.340], т.е. многообразием m -плоскостей пространства $\bar{S}_n(i)$ (при $m = 0$ - симметрическим пространством класса AIV); в этом случае в формуле (3) k =I, т.е. многообразие не расслаивается. Пересечение групп движений пространств $S_n(i)$ и $\bar{S}_n(i)$ является группой движений вещественного пространства S_n. Произведение поляритетов относительно абсолютов пространств $S_n(i)$ и $\bar{S}_n(i)$ является коллинеацией $'x^i = \bar{x}^i$ и выделяет нормальную n -цепь пространства $S_n(i)$, отражение от которой переводит каждую точку пространства $S_n(i)$ в мнимо сопряженную точку. Поэтому с каждой точкой абсолюта пространства $S_n(i)$ связана мнимо сопряженная с ней точка и определяемая ими вещественная прямая пространства S_n. В этом случае в формуле (3) также $k=1$, и многообразие не расслаивается, риманово пространство является симметрическим пространством BDI при $m=1$ по терминологии Картана, т.е. многообразием прямых пространства S_n. С каждой n -плоской образующей абсолюта пространства $S_{2n+1}(i)$ связана мнимо сопряженная с ней n -плоскость и определяемая ими паратактическая конгруэнция пространства S_{2n+1}. В этом случае в формуле (3) снова $k=1$, многообразие не расслаивается, риманово пространство является симметрическим пространством DIII, т.е. многообразием паратактических конгруэнций пространства S_{2n+1}. Однако с каждой m -плоской образующей абсолюта пространства $S_n(i)$ при $0 < m < \frac{n-1}{2}$ связана мнимо сопряженная с ней m -плоскость и определяемая ими $(2m+1)$ - плоскость пространства S_n и паратактическая кон-

груэнция в этой $(2m+1)$- плоскости, являющейся пространством S_{2m+1}. Поэтому многообразие m -плоских обарзующих абсолюта пространства $S_n(i)$ является расслоенным пространством, базой которого является симметрическое пространство BDI, являющееся многообразием $(2m+1)$ -плоскостей пространства S_n, а слоем - симметрическое пространство $D\overline{III}$, являющееся многообразием паратактических конгруэнций пространства S_{2m+1}. В этом случае в формуле (3) $k=2$ и подпространства $\underline{G}_{-1}$ и $\underline{G}_{-2}$ являются касательными пространствами к указанным симметрическим пространствам. Пересечение фундаментальных групп пространств $Sp_{2n+1}(i)$ и $\bar{S}_{2n+1}(i)$ изоморфно группе движений пространства $\bar{S}_n(i,j)$. Произведение абсолютной нуль-системы пространства $Sp_{2n+1}(i)$ и абсолютного поляритета пространства $\bar{S}_{2n+1}(i)$ является отражением от паратактической конгруэнции пространства $\bar{S}_{2n+1}(i)$, изометричной пространству $\bar{S}_n(i,j)$[5, с.652]. Пространство $\bar{S}_{2n+1}(i)$ можно рассматривать как расслоенное пространство, базой которого является пространство $\bar{S}_n(i,j)$, а слоями - прямые этой паратактической конгруэнции, это же расслоение имеет место и для пространства $Sp_{2n+1}(i)$, т.е. для многообразия нулевых точек этого пространства. В этом случае в формуле (3) $k=2$, база расслоения является симметрическим пространством $C\overline{II}$, а слои - симметрическими пространствами $A\overline{III}$ при $m=1$. Нулевые n -плоскости пространства $Sp_{2n+1}(i)$ опрецеляют многообразия прямых паратактической конгруэнции пространства $\bar{S}_{2n+1}(i)$, изображающие нормальные комплексные n -цепи пространства $\bar{S}_n(i,j)$. Многообразие этих n -цепей является симметрическим пространством CI; в этом случае в формуле (3) $k=1$ и многообразие не расслаивается. Нулевые m -плоскости пространства $Sp_{2n+1}(i)$ при $0<m<n$ опрецеляют многообразия прямых паратактической конгруэнции пространства $\bar{S}_{2n+1}(i)$, изображающие нормальные комплексные m -цепи m -плоскостей пространства $\bar{S}_n(i,j)$. Поэтому многообразие нулевых m -плоскостей пространства $Sp_{2n+1}(i)$ при $0<m<n$ является расслоенным пространством, базой которого является многообразие m -плоскостей пространства $\bar{S}_n(i,j)$, т.е. симметрическое пространство $C\overline{II}$, а слоями - многообразия нормальных комплексных m -цепей пространства $\bar{S}_m(i,j)$, т.е. симметрические пространства CI.

В этом случае в формуле (3) k =2, и подпространства $\underline{G}_{-1}$ и $\underline{G}_{-2}$ также являются касательными пространствами к указанным симметрическим пространствам.

§ 3. Топологическое строение многообразий образов простоты с вещественными антикомпактными фундаментальными группами

Для выяснения топологического строения многообразий образов простоты вещественных пространств P_n, ${}^{\ell}S_n$ и Sp_n введем в эти пространства метрику пространства S_n. При этом указанные многообразия, как и в комплексном случае, становятся симметрическими римановыми пространствами, фундаментальные группы этих пространств - соответственно, группа движений пространства S_n и ее пересечения с фундаментальными группами пространств ${}^{\ell}S_n$ и Sp_n. В случае пространства P_n это риманово пространство - симметрическое пространство BDI, т.е. многообразие m-плоскостей пространства S_n (при m =0- симметрическое пространство BDII); в этом случае в формуле (3) k =I, т.е. многообразие не расслаивается. Пересечение групп движений пространств ${}^{\ell}S_n$ и S_n является стационарной группой квадрики пространства S_n, представляющей собой $(\ell-1)$ - эквидистанту (эквидистанту $(\ell-1)$ - плоскости и ее поляры) этого пространства. Пересекая $(\ell-1)$ - эквидистанту ℓ - плоскостями, проходящими через одну точку на одной из ее баз и через другую базу, мы представим ее в виде топологического произведения $(\ell-1)$ - плоскости на $(n-\ell)$ -сферу; в этом случае в формуле (3) k =I, и подпространство $\underline{G}_{-1}$ является касательным пространством к этому топологическому произведению. Каждое семейство n -плоских образующих n -эквидистанты пространства S_{2n+1} при четном n и фактор-пространство каждого из этих семейств по парам n -плоскостей при нечетном n гомеоморфны связной группе движений пространства S_n [5, с.349]; в этом случае в формуле (3) также k =I, и подпространство $\underline{G}_{-1}$ можно рассматривать как алгебру Ли указанной группы. С каждой m -плоской образующей абсолюта пространства ${}^{\ell}S_n$ связана другая m -плоская образующая $(\ell-1)$ -эквидистанты, симметричная первой относительно баз $(\ell-1)$ -эквидистанты, и определяемая ими $(2m+1)$ -плоскость пространства S_n, являющаяся

пространством S_{2m+1}. Поэтому многообразие m-плоских образующих абсолюта пространств ${}^{n}S_{2n}$ и ${}^{n+1}S_{2n+1}$ при $0<m<n$ является расслоенным пространством, базой которого является пространство ВФ I, являющееся многообразием $(2m+1)$-плоскостей пространства S_{2n} или S_{2n+1}, а слоем - связная группа движений пространства S_n или группа, дважды накрывающая эту группу. В этом случае в формуле (3) $k=2$, и подпространства $\underline{G}_{-1}$ и $\underline{G}_{-2}$ являются касательными пространствами к указанному симметрическому пространству и к указанной группе. Произведение абсолютной нуль-системы пространства Sp_{2n+1} и абсолютного поляритета пространства S_{2n+1} является отражением от паратактической конгруэнции пространства S_{2n+1}, изометричной пространству $\bar{S}_n(i)$ [5, с.643], а пересечение фундаментальных групп пространств Sp_{2n+1} и S_{2n+1} изоморфно прямому произведению группы движений пространства $\bar{S}_n(i)$ на группу вращений круга. Пространство S_{2n+1} можно рассматривать как расслоенное пространство, базой которого является пространство $\bar{S}_n(i)$, а слоями - прямые указанной паратактической конгруэнции, это же расслоение имеет место и для пространства Sp_{2n+1}, т.е. для многообразия нулевых точек этого пространства. В этом случае в формуле (3) $k=2$, база расслоения является симметрическим пространством AIV, а слоями - круги. Нулевые n-плоскости пространства Sp_{2n+1} определяют многообразия прямых паратактической конгруэнции пространства S_{2n+1}, изображающие нормальные n-цепи пространства $\bar{S}_n(i)$. Многообразие этих n-цепей является симметрическим пространством AI; в этом случае в формуле (3) $k=1$, и многообразие не расслаивается. Нулевые m-плоскости пространства Sp_{2n+1} при $0<m<n$ определяют многообразия прямых паратактической конгруэнции пространства S_{2n+1}, изображающие нормальные m-цепи m-плоскостей пространства $\bar{S}_n(i)$. Поэтому многообразие нулевых m-плоскостей пространства Sp_{2n+1} при $0<m<n$ является расслоенным пространством, базой которого является многообразие m-плоскостей пространства $\bar{S}_n(i)$, т.е. симметрическое пространство AIII, а слоями - многообразия нормальных m-цепей пространства $\bar{S}_m(i)$, т.е. симметрические пространства AI. В этом случае в формуле (3) $k=2$, и подпространства $\underline{G}_{-1}$ и $\underline{G}_{-2}$ также являются касательными пространствами к указанным симметрическим пространствам.

§ 4. Топологическое строение многообразий образов простоты с вещественными некомпактными, неантикомпактными фундаментальными группами

Топологическое строение многообразий m -плоских образующих абсолютов пространств ${}^{\ell}S_n$ при $\ell \neq \frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}$ находится совершенно аналогично строению этих многообразий для пространств ${}^{n}S_{2n}$ и ${}^{n+1}S_{2n+1}$. Для выяснения топологического строения образов простоты кватернионных пространств $P_n(i,j)$ и $\bar{S}p_n(i,j)$ введем в них метрику пространства $\bar{S}_n(i,j)$. При этом эти многообразия становятся симметрическими римановыми пространствами, фундаментальные группы которых, соответственно, группа движений пространства $\bar{S}_n(i,j)$ и ее пересечение с фундаментальной группой пространства $\bar{S}p_n(i,j)$. В случае пространства $P_n(i,j)$ это риманово пространство - симметрическое пространство $C\overline{\overline{III}}$, т.е. многообразие m -плоскостей пространства $\bar{S}_n(i,j)$; в этом случае в формуле (3) $k=1$, т.е. многообразие не расслаивается. Произведение абсолютной нуль-системы пространства $\bar{S}p_n(i,j)$ и абсолютного поляритета пространства $\bar{S}_n(i,j)$ является отражением от нормальной комплексной n -цепи пространства $\bar{S}_n(i,j)$, изометричной пространству $\bar{S}_n(i)$, а пересечение фундаментальных групп пространств $\bar{S}p_n(i,j)$ и $\bar{S}_n(i,j)$ изоморфно прямому произведению группы движений пространства $\bar{S}_n(i)$ на группу вращений круга. С каждой нулевой $\frac{n-1}{2}$ - плоскостью пространства $\bar{S}p_n(i,j)$ связана симметричная ей относительно этой n - цепи $\frac{n-1}{2}$ - плоскость и определяемая ими паратактическая конгруэнция пространства $\bar{S}_n(i)$. В этом случае в формуле (3) $k=1$, многообразие не расслаивается и риманово пространство является симметрическим пространством $A\overline{\overline{III}}$, т.е. многообразием паратактических конгруэнций пространства $\bar{S}_n(i)$. С каждой нулевой m -плоскостью пространства $\bar{S}p_n(i,j)$ также связана симметричная ей m - плоскость и определяемая ими паратактическая конгруэнция $(2m+1)$ - плоскости пространства $\bar{S}_n(i)$, являющейся пространством $\bar{S}_{2m+1}(i)$. Поэтому многообразие нулевых m -плоскостей пространства $\bar{S}p_n(i,j)$ является расслоенным пространством, базой которого является симметрическое пространство $A\overline{\overline{III}}$, являющееся многообразием $(2m+1)$ - плоскостей пространства $\bar{S}_n(i)$, а слоем - симметрическое пространство

$A\bar{\Pi}$, являющееся многообразием паратактических конгруэнций пространства $\bar{S}_{2m+1}(i)$. В этом случае в формуле (3) k =2, и поц - пространства G_{-1} и G_{-2} являются касательными пространствами к указанным симметрическим пространствам.

Топологическое строение многообразий m -плоских образующих абсолютов пространств $^{l}\bar{S}_{n}(i)$ и $^{l}\bar{S}_{n}(i,j)$ находится аналогично строению таких же многообразий для пространств $^{l}S_{n}$.

Изучение топологических свойств многообразий образов простоты комплексных пространств с помощью введения в них метрики пространства $\bar{S}_{n}(i)$ впервые произвоцилось Ш.Эресманом [6].

Литература

I. Розенфельд Б. А. Образы простоты и полупростоты. - Труды семинара по вект. и тенз.анализу при МГУ, вып.I2, I963, 269-285.

2. Розенфельд Б. А., Харитонова Н. И., Каширина И.Н. Конечные геометрии с простыми, полупростыми и квазипростыми фундаментальными группами. - Труды геометрического семинара, вып.I3. Казань, I98I, 63-70.

3. Кантор И. Л. Некоторые обобщения йордановых алгебр. - Труды семинара по вект. и тенз.анализу при МГУ, вып.I6, I972, 407-499.

4. Картан Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства. М., ИЛ, I949.

5. Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии. М., ГИТТЛ, I955.

6. Ehresmann Ch. Sur la topologie de certains espaces homogénes. - Annals of Math. (2), vol.35, № 2, I934, 396-443.