



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. P. Il'in, Approximation of functions in the spaces $\widetilde{W}_p^{(l)}(D)$ and $W_p^{(l)}(D)$ by continuously differentiable functions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1961, Volume 137, Number 6, 1283–1286

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.170

February 12, 2025, 04:17:12



В. П. ИЛЬИН

**ОБ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ
 $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ И $W_p^{(l)}(D)$ НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ
ФУНКЦИЯМИ**

(Представлено академиком В. И. Смирновым 28 XI 1960)

1. Пусть D — конечная или бесконечная область n -мерного евклидова пространства E_n ; l — положительное (не обязательно целое) число.

Через $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ ($p \geq 1$) будем обозначать множество всех функций $f(X)$ ($X = (x_1, \dots, x_n)$), определенных в D , имеющих все обобщенные в смысле С. Л. Соболева ⁽¹⁾ производные порядка $\bar{l} = [l]$ ($[l]$ — целая часть l), удовлетворяющих условиям:

$$1) \|f\|_{L_p(D)} = \left[\int_D |f(X)|^p dX \right]^{1/p} < \infty;$$

$$2) \|f\|_{L_p^{(l)}(D)} = \sum_{i_1, \dots, i_{\bar{l}}=1}^n \left[\int_D \left| \frac{\partial^{\bar{l}} f(X)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{\bar{l}}}} \right|^p dX \right]^{1/p} < \infty,$$

если l — целое, или

$$2') \|f\|_{L_p^{(l)}(D)} = \sum_{i_1, \dots, i_{\bar{l}}=1}^n \left[\int_D \left(\int_D \frac{\left| \frac{\partial^{\bar{l}} f(X)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{\bar{l}}}} - \frac{\partial^{\bar{l}} f(Y)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{\bar{l}}}} \right|^p}{|X - Y|^{n + (l - \bar{l})p}} dY \right) dX \right]^{1/p} < \infty,$$

если l — нецелое.

Положим

$$\|f\|_{\tilde{W}_p^{(l)}(D)} = \|f\|_{L_p(D)} + \|f\|_{L_p^{(l)}(D)}.$$

Из класса функций, принадлежащих $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$, выделим подкласс функций, имеющих всевозможные обобщенные производные до порядка \bar{l} включительно, принадлежащие $L_p(D)$. Этот класс функций будем обозначать $W_p^{(l)}(D)$.

Положим

$$\|f\|_{W_p^{(l)}(D)} = \sum_{k=0}^{\bar{l}} \|f\|_{L_p^{(k)}(D)},$$

если l — целое, и

$$\|f\|_{W_p^{(l)}(D)} = \sum_{k=0}^{\bar{l}} \|f\|_{L_p^{(k)}(D)} + \|f\|_{L_p^{(l)}(D)}$$

если l — нецелое.

При изучении пространств $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ и $W_p^{(l)}(D)$ важное значение приобретает проблема аппроксимации функции $f \in \tilde{W}_p^{(l)}(D)$ или $f \in W_p^{(l)}(D)$ в норме $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$ или, соответственно, $W_p^{(l)}(D)$ при помощи последовательности функций $\varphi_\nu(X)$ ($\nu = 1, 2, \dots$), принадлежащих $C^{(l)}(\bar{D})$, где $\bar{D} = D + \Gamma$, Γ — граница D .

Если $D = E_n$, то такая аппроксимация с любой степенью точности осуществляется при помощи средних функций ⁽¹⁾. Если же D не совпадает со всем пространством E_n , то, как известно, она не всегда возможна. Для случая, когда граница области D принадлежит классу $C^{(l)}$, возможность такой аппроксимации для функции $f \in \tilde{W}_p^{(l)}(D)$ доказана была В. М. Бабицем ⁽²⁾ (для целого l) и Л. Н. Слободецким ⁽³⁾ (для нецелого l). При целом l для этого же класса функций Е. Гальярдо ⁽⁴⁾ получил аналогичный результат в предположении, что D — ограниченная область, граница которой принадлежит классу Lip 1. Для функций, принадлежащих $\tilde{W}_p^{(l)}(D)$, возможность указанной выше аппроксимации доказана для случая, когда D — ограниченная область, звезда относительно некоторой внутренней точки D ⁽⁵⁾.

Приводимые ниже результаты относятся к этому же кругу вопросов.

II. Пусть D — конечная или бесконечная область евклидова пространства E_n . Введем следующие определения:

1) Будем говорить, что $D \in C(H, \sigma)$, если для каждой точки $X \in D$ существует n -мерный шаровой сектор с вершиной в X радиуса H и с телесным углом σ , целиком содержащийся в D .

2) Будем говорить, что область D принадлежит классу $C(H, \sigma, K, \lambda)$ и писать $D \in C(H, \sigma, K, \lambda)$, если она удовлетворяет следующему условию: для любых двух точек X и Y из D , для которых $|X - Y| \leq H$, существуют n -мерные шаровые секторы с телесным углом σ и радиуса $\leq K|X - Y|$ с вершинами в X и Y , содержащиеся в D , причем такие, что если через G обозначить пересечение этих секторов, то справедливо неравенство:

$$mG \geq \lambda |X - Y|^n,$$

где H, σ, K, λ — положительные фиксированные для данной области числа.

Очевидно, если $D \in C(H, \sigma, K, \lambda)$, то $D \in C(H/2, \sigma)$.

3) Через D_δ будем обозначать область, состоящую из точек D , расстояния которых от границы D больше δ .

4) Будем говорить, что область D обладает свойством $A(N, \kappa)$, и писать $D \in A(N, \kappa)$, если существуют две конечные системы n -мерных областей S_1, \dots, S_N и S_1'', \dots, S_N'' , каждая из которых образует покрытие D , удовлетворяющих следующим условиям: а) $S_i \subset S_i''$ ($i = 1, \dots, N$), и если $X \in S_i, Y \notin S_i''$, то $|X - Y| \geq \kappa > 0$; б) множества $D_i = D \cdot S_i, D_i' = D \cdot (S_i'')_{\kappa/2} = D \cdot S_i', D_i'' = D \cdot S_i''$ ($i = 1, \dots, N$), а также множества $D_i' \cdot D_k'$ ($i, k = 1, \dots, N$), если они не пустые, являются конечносвязными; в) для каждого множества $D_i'' = D \cdot S_i''$ ($i = 1, \dots, N$) существует вектор Q_i такой, что трансляция D_i'' на вектор tQ_i при произвольном $t, 0 < t \leq 1$, переводит D_i'' в область Ω_{it}'' , внутреннюю относительно D , т. е. такую, что $\rho(\Omega_{it}'', E_n - D) > 0$ ($i = 1, \dots, N$).

Заметим, что если некоторая область S_i'' является строго внутренней подобластью области D , то соответствующий ей вектор Q_i можно считать нулевым.

Отметим также, что если D — ограниченная область, граница которой принадлежит классу Lip 1, то существуют такие положительные числа $H, \sigma, K, \lambda, N, \kappa$, что $D \in C(H, \sigma, K, \lambda)$ и $D \in A(N, \kappa)$.

III. Во всех приводимых ниже теоремах $\varphi_\nu(X)$ будут обозначать функции, имеющие непрерывные производные любого порядка во всем пространстве E_n .

Теорема 1*. Если $f \in W_p^{(l)}(D)$, $p \geq 1$, l — целое, $D \in A(N, \kappa)$, то существует последовательность функций $\varphi_\nu(X)$ ($\nu = 1, \dots$) такая, что

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|f - \varphi_\nu\|_{W_p^{(l)}(D)} = 0.$$

Лемма. Пусть $f(X) \in \widetilde{W}_p^{(l)}(D)$ и имеет непрерывные производные до порядка $\bar{l} = [l]$ в D , $D \in C(H, \sigma)$. Тогда для любого целого s , $0 \leq s \leq \bar{l}$, справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_p^{(s)}(D)} \leq C_1 \|f\|_{L_p^{(l)}(D)}^{1-s/l} \|f\|_{\widetilde{W}_p^{(l)}(D)}^{s/l}.$$

Если l — нецелое, $D \in C(H, \sigma, K, \lambda)$, то справедливо также неравенство

$$\|f\|_{L_p^{(s+l-\bar{l})}(D)} \leq C_2 \|f\|_{L_p^{(l)}(D)}^{\frac{\bar{l}-s}{l}} \|f\|_{\widetilde{W}_p^{(l)}(D)}^{1-\frac{\bar{l}-s}{l}}.$$

Постоянные C_1 и C_2 не зависят от f .

С помощью этой леммы доказываются следующие теоремы.

Теорема 2. Если $f \in \widetilde{W}_p^{(l)}(D)$, $p \geq 1$, l — целое, $D \in A(N, \kappa)$ и $D \in C(H, \sigma)$, то:

- 1) $f \in W_p^{(l)}(D)$;
- 2) существует последовательность функций $\varphi_\nu(X)$ ($\nu = 1, \dots$) такая, что

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|f - \varphi_\nu\|_{W_p^{(l)}(D)} = 0.$$

Теорема 3. Если $f \in \widetilde{W}_p^{(l)}(D)$, $p \geq 1$, l — нецелое, $D \in A(N, \kappa)$, $D \in C(H, \sigma, K, \lambda)$, то:

- 1) $f \in W_p^{(l)}(D)$;
- 2) существует последовательность функций $\varphi_\nu(X)$ ($\nu = 1, \dots$) такая, что

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|f - \varphi_\nu\|_{W_p^{(l)}(D)} = 0.$$

З а м е ч а н и е. Пусть $f(X)$ и область D удовлетворяют условиям теоремы 2, если l — целое, или условиям теоремы 3, если l — нецелое. Предположим, кроме того, что для любого целого m , $0 \leq m \leq n$, и всех производных порядка $\bar{l} = [l]$ справедливы неравенства

$$\sup_{D_m} \left[\int \dots \int_{(D_m)_{n-m}^d} |D^{\bar{l}} f(X)|^p dX \right]^{1/p} \leq M d^{\alpha_m}, \quad (1)$$

если l — целое, или

$$\sup_{D_m} \left[\int \dots \int_{(D_m)_{n-m}^d} \left(\int_{(D)} \frac{|D^{\bar{l}} f(X) - D^{\bar{l}} f(Y)|^p}{|X - Y|^{n+(l-\bar{l})p}} dY \right) dX \right]^{1/p} \leq M d^{\alpha_m}, \quad (2)$$

если l — нецелое, где $M > 0$, α_m ($m = 0, 1, \dots, n$) — постоянные числа, причем $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n = 0$, $\alpha_m \leq \frac{n-m}{p}$, а $[D_m]_{n-m}^d$ — множество точек области D , отстоящих от некоторого сечения D_m области D гиперплоскостью $x_{m+1} = \text{const}, \dots, x_n = \text{const}$ на расстояние не больше d .

* Если D — ограниченная область, то теорема 1 неявно содержится в результатах Е. Гальярдо (4).

Можно показать, что неравенства (1) и (2) будут иметь место также для функций $\varphi(X)$, построенных соответственно в теоремах 2 и 3.

Это замечание позволяет распространить результаты работ (6, 7) также на функции $f(X) \in \tilde{W}_p^{(l)}(D)$, если D удовлетворяет условиям теоремы 2 или 3.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
17 XII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. ² В. М. Бабич, УМН, 8, в. 2 (54) (1953). ³ Л. Н. Слободецкий, Уч. зап. Ленинградск. гос. пед. инст. им. А. И. Герцена, 197, 54 (1958). ⁴ E. Gagliardo, Ricerche di Matematica, 8, Fas. 1 (1958). ⁵ В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 5, 1959. ⁶ В. П. Ильин, Тр. Матем. инст. им. В. И. Стеклова АН СССР, 53, 64 (1959). ⁷ В. П. Ильин, ДАН, 135, № 4 (1960).