алгебры и группы Фреше–Ли (см., например, [14]). Другой подход намечен в [15]: вкладывать их в алгебры и группы Ли над неархимедовыми полями. В этой связи отметим, что для любой банаховой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ее "алгебра формальных токов" $\mathfrak{g}((t))$ является подалгеброй (над полем $\mathbf{R}((t))$) алгебры Ли ${}^{\rho}\mathfrak{g}$ (следует из 2.6), а для любой ассоциативной банаховой алгебры с единицей A соответствующая "группа формальных токов" $A((t))^{\times}$ является подгруппой Ли группы Ли, полученной из ${}^{\rho}(A^{\times})$ сужением поля скаляров до $\mathbf{R}((t))$ (следует из 3.5).

Автор признателен своему отцу Г.Г. Пестову, в частности, привлекшему его внимание еще 11 лет назад к статье [1], и проф. С.С. Кутателадзе за внимание к настоящей работе.

Томский государственный университет
им. В.В. Куйбышева

Поступило
16 V 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Robinson A.* – Amer. Math. Monthly, 1973, vol. 80, p. 87–109. 2. *Lightstone A.H., Robinson A.* Nonarchimedean fields and asymptotic expansions. Amsterdam: North-Holland, 1975. 3. *Luxemburg W.A.J.* – Israel J. Math., 1976, vol. 25, p. 189–201. 4. *Девис М.* Прикладной нестандартный анализ. М.: Мир, 1980. 5. *Кутателадзе С.С.* – Сиб. матем. журн., 1986, т. 27, № 1, с. 100–110. 6. *Hahn H.-S.* – Ber. König. Akad. Wiss. Vienna, 1907, Bd. 116, S. 601–653. 7. *Фукс Л.* Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Мир, 1965. 8. *Kaplansky I.* – Duke Math. J., 1942, vol. 9, p. 303–321. 9. *Diarra B.* – Ann. Sci. Univ. Clermont II. Sér. Math., 1984, Fasc. 22, p. 1–37. 10. *Alling N.L.* – Proc. Amer. Math. Soc., 1962, vol. 13, № 5, p. 706–711. 11. *Schmerl J.H.* – Israel J. Math., 1985, vol. 50, № 1/2, p. 145–159. 12. *Henson C.W., Moore L.C.* – Lect. Notes Math., 1983, vol. 983, p. 27–112. 13. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1976, гл. I–III. 14. *Adams M., Ratin T., Schmid R.* In: Infinite-dimensional groups with appl. N.Y., 1985, p. 1–69. 15. *Van Eck H.N.* – Lett. Math. Phys., 1986, vol. 12, № 3, p. 231–239.

УДК 519.2 МАТЕМАТИКА

© **Г.М. ФЕЛЬДМАН**

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОШИ НА АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ И ЕГО ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ

(Представлено академиком Ю.В. Прохоровым 18 V 1988)

Задачам характеризации гауссовского распределения, распределения Коши и других типов устойчивых распределений на вещественной прямой одинаковой распределенностью линейных статистик посвящен ряд исследований (см. [1]). В списке нерешенных задач в [1] сформулирована задача построения теории равнораспределенности форм на алгебраических структурах. В настоящей работе мы определяем распределение Коши на локально-компактной абелевой группе и рассматриваем для него некоторые характеризационные задачи.

Пусть X – локально-компактная абелева сепарабельная метрическая группа (в дальнейшем просто группа), $Y = X^*$ – ее группа характеров, (x, y) – значение характера $y \in Y$ на элементе $x \in X$. Компоненту нуля группы X обозначим C_X. Если X – связная группа, то через $\dim X$ обозначим ее размерность. Через R и T будем обозначать соответственно группу вещественных чисел и группу вращений окружности.

Рассмотрим гомоморфизм f_n: $X \to X$, определяемый формулой $f_n(x) = nx$. Положим $X^{(n)} = f_n(X)$.

Пусть μ – распределение на группе X. Характеристическая функция $\hat{\mu}(y)$ распределения μ определяется обычным образом:

$$\hat{\mu}(y) = \int_X (x, y)\, d\mu(x).$$

Обозначим: E_x – вырожденное распределение, сосредоточенное в точке $x \in X$, а $D(X)$ – множество всех вырожденных распределений на X. Множество всех сдвигов распределений Хаара m_K компактных подгрупп K группы X обозначим $I(X)$, носитель распределения μ обозначим $\sigma(\mu)$.

Определение 1. Распределение μ на группе X называется распределением Коши, если его характеристическая функция $\hat{\mu}(y)$ представима в виде

$$(1) \qquad \hat{\mu}(y) = (x, y) \exp\{-\sqrt{\varphi(y)}\},$$

где $x \in X$, а $\varphi(y)$ – непрерывная неотрицательная функция на Y, удовлетворяющая уравнению

$$\varphi(y_1 + y_2) + \varphi(y_1 - y_2) = 2[\varphi(y_1) + \varphi(y_2)]$$

для любых $y_1, y_2 \in Y$.

Обозначим множество распределений Коши на группе X через $K(X)$. Обозначим через $K^s(X)$ множество симметричных распределений Коши, т.е. таких распределений Коши, для которых в (1) $x = 0$.

Напомним, что характеристическая функция гауссовского распределения γ на группе X представима в виде $\hat{\gamma}(y) = (x, y) \cdot \exp\{-\varphi(y)\}$, где $x \in X$, а функция $\varphi(y)$ такая, как в (1) (см. [2]). Нетрудно проверить, что если $\mu \in K^s(X)$, то $\sigma(\mu)$ – некоторая связная подгруппа группы X. Отметим также, что функция $\hat{\mu}(y)$, определяемая равенством (1), всегда является характеристической.

Очевидно, что данное определение распределения Коши на группе $X = R$ совпадает с классическим. Если же $\mu \in K^s(T)$, то μ имеет плотность (относительно m_T), равную $(1 - r^2)/(1 - 2r\cos t + r^2)$, $0 < r < 1$.

Распределение $\mu \in K(X)$ обладает основным свойством, характеризующим распределением Коши на вещественной прямой: если $\xi_1, \ldots, \xi_n, n \geqslant 2$, – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределение μ, то линейные формы $n\xi_1$ и $\xi_1 + \ldots + \xi_n$ одинаково распределены.

Обозначим через $K_n(X)$ множество распределений μ на группе X, обладающих следующим свойством: если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределение μ, то линейные формы $n\xi_1$ и $\xi_1 + \ldots + \xi_n$ одинаково распределены. Положим $K_\infty(X) = \bigcap_n K_n(X)$. Ясно, что $K(X) \subset K_\infty(X)$. На группе $X = R$ имеет место равенство $K(R) = K_\infty(R)$. В следующей теореме мы выясним, в какой мере эта характеризация распределения Коши может быть перенесена на группы.

Рассмотрим компоненту нуля C_X группы X и заметим, что поскольку группа C_X связна, то она топологически изоморфна группе $R^m + K$, где K – связная компактная группа. Поэтому если $\dim C_X \leqslant 1$, то либо группа C_X компактна, либо $C_X \approx R$.

Теорема 1. *Пусть группа X такова, что $\dim C_X \leqslant 1$ и $\mu \in K_\infty(X)$. Тогда если C_X – компактная группа, то либо $\mu \in K(X)$, либо $\mu = m_{C_X} * E_x$, $x \in X$. Если же $C_X \approx R$, то $\mu \in K(X)$.*

Пусть группа X такова, что $\dim C_X > 1$. Тогда существует такое распределение $\mu_0 \in K_\infty(X)$, что $\hat{\mu}_0(y) > 0$ при всех $y \in Y$ и $\mu_0 \notin K(X)$.

Доказательство этой теоремы опирается на следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть $X \not\approx T$ – компактная связная группа,* $\dim X = 1$. *Тогда существует непрерывный мономорфизм p: $R \to X$, обладающий следующим свойством: для любого распределения $\mu \in K^s(X)$ существует такое распределение $M \in \in K(R)$, что $\mu = p(M)$.*

Лемма 2. *Пусть X – произвольная группа, $\mu \in K_\infty(X)$. Тогда существует такой элемент $x \in X$, что $\sigma(\mu * E_x) \subset C_X$.*

Известно, что на вещественной прямой справедлива следующая характеризация распределения Коши (см. [3, 4]). Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_s$, $s \geqslant 2$, – независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение μ. Если линейные формы ξ_1 и $a_1\xi_1 + \ldots + a_s\xi_s$ одинаково распределены, где $|a_1| + \ldots + |a_s| = 1$, и по крайней мере одна пара чисел $-\ln|a_1|, \ldots, -\ln|a_s|$ несоизмерима, то μ – распределение Коши.

Ниже мы дадим полное описание групп X, на которых возможна аналогичная характеризация.

Пусть $A = \{a_j\}_{j=0}^s$, $s \geqslant 2$, – произвольное множество целых чисел. Обозначим через $\Gamma_A(X)$ класс распределений μ на группе X, обладающих следующим свойством: если ξ_j – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в группе X, имеющие распределение μ, то линейные формы $a_0\xi_1$ и $a_1\xi_1 + \ldots + a_s\xi_s$ одинаково распределены. Легко видеть, что $\mu \in \Gamma_A(X)$ тогда и только тогда, когда характеристическая функция $\hat{\mu}(y)$ удовлетворяет уравнению

$$(2) \qquad \hat{\mu}(a_0 y) = \hat{\mu}(a_1 y) \ldots \hat{\mu}(a_s y), \quad y \in Y.$$

Положим $I_A(X) = I(X) \cap \Gamma_A(X)$. Множество $I_A(X)$ может быть легко описано. Пусть K – компактная подгруппа группы X, $A = \{a_j\}_{j=0}^s$, $s \geqslant 2$, – множество целых чисел и числа $\{a_1, \ldots, a_s\}$ взаимно просты. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(i) $m_K \in \Gamma_A(x)$;

(ii) $K^{(a_0)} = K$.

Множество $A = \{a_j\}_{j=1}^s$ целых чисел называется допустимым для группы X, если $X^{(a_j)} \neq \{0\}$ при всех $j = 1, \ldots, s$. Условие допустимости множества A при рассмотрении линейной формы $a_1\xi_1 + \ldots + a_s\xi_s$, где ξ_1 – случайные величины со значениями в группе X, является групповым аналогом условия $a_j \neq 0$ при всех $j = 1, \ldots, s$ в случае, когда $X = R$.

Обозначим через $\mathfrak{R}(X)$ совокупность допустимых для группы X множеств $A = \{a_j\}_{j=0}^s$, $s \geqslant 2$, взаимно простых целых чисел, удовлетворяющих условиям: (α) $a_0 = |a_1| + \ldots + |a_s|$; ($\beta$) по крайней мере одна пара чисел $-\ln|a_1/a_0|, \ldots, -\ln|a_s/a_0|$ несоизмерима.

Пусть $A \in \mathfrak{R}(X)$. Заметим, что из (1), (2) и (α) вытекает включение $K^s(X) \subset \subset \Gamma_A(X)$, а поскольку множество $\Gamma_A(X)$ является полугруппой относительно свертки, то $I_A(X) * K^s(X) \subset \Gamma_A(X)$ при любом $A \in \mathfrak{R}(X)$.

Будем говорить, что на группе X возможна характеризация распределения Коши равнораспределенностью линейных статистик, если при некотором $A \in \mathfrak{R}(X)$ справедливо равенство

$$(3) \qquad I_A(X) * K^s(X) = \Gamma_A(X).$$

Отметим, что выполнение равенства (3) означает, что любое распределение $\mu \in \Gamma_A(X)$ инвариантно относительно некоторой компактной подгруппы $K \subset X$, а на фактор-группе X/K μ индуцирует распределение Коши.

Теорема 2. *Для того чтобы на группе X при некотором $A \in \mathfrak{R}(X)$ имело место равенство* (3), *необходимо и достаточно, чтобы группа X удовлетворяла ус-*

ловиям: 1) $\dim C_X \leqslant 1$ *и* 2) *при некотором простом p группа* C_X *не содержит элементов порядка p.*

Доказательство теоремы 2 опирается на следующие леммы.

Л е м м а 3. *Пусть группа X такова, что Y – связная компактная группа,* $A \in \in \mathfrak{N}(X)$. *Тогда* $\Gamma_A(X) \subset D(X)$.

Пусть p – простое число. Если $p \neq 2$, то положим

$$a_0 = p^2,\ a_1 = \ldots = a_{n_1} = 1,\quad a_{n_1+1} = \ldots = a_{n_1+n_2} = 2,\quad n = p^2,$$

$$n_1 = n - 2[n/3],\ n_2 = [n/3],\ s = n_1 + n_2,\quad A_p = \{a_j\}_{j=0}^{s}.$$

Если же $p = 2$, то положим

$$a_0 = 16,\ a_1 = \ldots = a_{10} = 1,\ a_{11} = a_{12} = 3,\quad A_2 = \{a_j\}_{j=0}^{12}.$$

Л е м м а 4. *Пусть X – произвольная группа,* $\mu \in \Gamma_{A_p}(X)$. *Тогда существует такой элемент* $x \in X$, *что* $\sigma(\mu * E_x) \subset G$, *где* $G \approx R^m + K$, *группа K компактна и* $K^{(p)} = K$.

Л е м м а 5. *Пусть p – простое число, группа X такова, что* $X^{(p)} = X$, $Y^{(p)} = Y$ *и* $\mu \in \Gamma_{A_p}(X)$. *Тогда множество* $E = \{y \in Y\colon \hat{\mu}(y) \neq 0\}$ – *открытая подгруппа в Y.*

Л е м м а 6. *Пусть p – простое число, а группа X такова, что* $X^{(p)} = X$, $Y^{(p)} = Y$ *и* $\dim C_X \leqslant 1$. *Тогда если* $\mu \in \Gamma_{A_p}(X)$ *и* $\hat{\mu}(y) \neq 0$ *при любом* $y \in Y$, *то* $\mu \in K(X)$.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
14 VI 1988

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каган А.М., Линник Ю.В., Рао С.Р.* Характеризационные задачи математической статистики. М.: Наука, 1972. 656 с. 2. *Партасарати К.Р., Ранга Рао Р., Варадхан С.Р.С.* Сб. пер.: Математика, 1965, т. 9, № 2, с. 115–146. 3. *Shimizu R.* – Ann. Inst. Stat. Math., 1968, vol. 20, p. 187–209. 4. *Ramachandran B., Rao C.R.* – Sankhya. Ser. A, 1969, vol. 31.

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

© В.П. ХАХЛЮТИН

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ ИНТЕГРАЛАМ ВДОЛЬ СЕМЕЙСТВА ЛУЧЕЙ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ОДНОМЕРНЫМ МНОГООБРАЗИЕМ В R^n

(Представлено академиком М.М. Лаврентьевым 30 V 1988)

Большую роль в современной технологии, медицине и физических исследованиях играют методы неразрушающего контроля и диагностики. Если ранее вполне удовлетворительными считались методы классической рентгеноскопии, то в настоящее время на практике приходят к необходимости получения более полной информации о пространственной структуре исследуемых объектов. Наиболее перспективными в этом отношении оказались методы, используемые в томографии. Как и