Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. Ю. Хохлов, Об устойчивости решений стабилизационных задач, *Дифференц. уравнения*, 1995, том 31, номер 10, 1687–1690

https://www.mathnet.ru/de8838

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.85
16 декабря 2025 г., 14:33:41

1995. Т. 31, № 10. С. 1687 — 1690

УДК 517.911

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СТАБИЛИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

А. Ю. Хохлов

В работе [1] рассматривался вопрос существования и единственности решения уравнения

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \tag{1}$$

с данными в бесконечно удаленной точке. При этом условием на бесконечности являлось условие стабилизации функции к многочлену [2].

Определение 1. Функция $x(t)$, $n-1$ раз дифференцируемая при $t \geq t_0$, называется стабилизирующейся при $t \to +\infty$ к многочлену $P_x(t) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_{x,k} t^k$, если $\lim\limits_{t\to\infty}(x(t) - P_x(t))^{(k)} = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. В этом случае будем писать

$$x \approx P_x, \quad t \to +\infty. \tag{2}$$

В настоящей работе рассматривается устойчивость решения уравнения (1) по отношению к начальным данным (2). Задачу о существовании такого решения будем именовать сокращенно СЗ (1), (2).

Пусть $x(t) : I_0 \stackrel{\text{def}}{=} [t_0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ — $n-1$ раз непрерывно дифференцируемая функция. Введем вектор $\mathbf{x} = (x, x', \ldots, x^{(n-1)})$. Через X обозначим пространство функций $x(t)$, стабилизирующихся при $t \to +\infty$ к некоторым многочленам с нормой

$$\|x\|_X \equiv \|x\| = \|\xi_x\|_{C_n(I_0)} + |\mathbf{a}_x|, \tag{3}$$

где

$$\xi_x \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x} - \mathbf{P}_x = (x - P_x, (x - P_x)', \ldots, (x - P_x)^{(n-1)}), \quad \mathbf{a}_x \stackrel{\text{def}}{=} (a_{x,0}, a_{x,1}, \ldots, a_{x,n-1}) \in \mathbb{R}^n,$$

$$|\mathbf{a}_x| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} |a_{x,k}|, \tag{4}$$

а $C_n(I_0)$ — пространство непрерывных n-мерных векторных функций с равномерной нормой. Далее будем рассматривать сужение этой нормы на полуинтервалы $[T, +\infty)$, $T \geq t_0$, вида

$$\|x\|_{X,T} \equiv \|x\|_T = \|\xi_x\|_{C_n([T,+\infty))} + |\mathbf{a}_x|. \tag{5}$$

Определим на множестве интегрируемых (в несобственном смысле) на промежутке $[t_0, +\infty)$ функций $g(t)$ оператор J_k формулой

$$(J_k g)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_t^{+\infty} dt_1 \int\limits_{t_1}^{+\infty} dt_2 \ldots \int\limits_{t_{k-1}}^{+\infty} g(t_k) dt_k, \quad t \geq t_0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть даны два решения СЗ (1), (2) $x(t)$ и $y(t)$, определенные на промежутке $I_0 = [t_0, +\infty)$, такие, что $x \approx P_x$, $t \to +\infty$ и $y \approx P_y$, $t \to +\infty$. Если функция $f(t, z) : \overset{+}{\mathbb{R}}{}^{n+1}_{t_0} = I_0 \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ непрерывна на $\overset{+}{\mathbb{R}}{}^{n+1}_{t_0}$, если существует неотрицательная функция $\varphi(t) : I_0 \mapsto [0, +\infty)$, для которой*

$$J_n(\varphi)(t_0) < +\infty, \tag{7}$$

и если для любых $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ *выполняется неравенство*

$$|f(t, \mathbf{P}_x(t) + \xi) - f(t, \mathbf{P}_y(t) + \eta)| \le \varphi(t)(|\xi - \eta| + |\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y|), \quad t \ge t_0, \tag{8}$$

то существует $T_0 = T_0(\varphi)$, *зависящее только от* $\varphi(\cdot)$, *такое, что*

$$\|x - y\|_{T_0} \le 2|\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y|. \tag{9}$$

Доказательство. В работе [1] показано, что СЗ (1),(2) эквивалентна решению интегрального уравнения

$$x(t) = P_x(t) + (-1)^n (J_n f(\cdot, \mathbf{x}(\cdot)))(t), \quad t \ge t_0. \tag{10}$$

Отсюда получаем

$$x^{(k)}(t) = P_x^{(k)}(t) + (-1)^{(n-k)}(J_{n-k} f(\cdot, \mathbf{x}(\cdot)))(t), \quad t \ge t_0, \quad k = 0, 1, ..., n-1. \tag{11}$$

Тогда для любого $T \ge t_0$ имеем

$$\|\xi_x - \xi_y\|_{C_n([T,+\infty))} = \sum_{k=0}^{n-1} \|(x - P_x)^{(k)} - (y - P_y)^{(k)}\|_{([T,+\infty))} \overset{(11)}{=}$$

$$\overset{(11)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \max_{s \in [T,+\infty)} |(J_{n-k}(f(\cdot, \mathbf{x}(\cdot)) - f(\cdot, \mathbf{y}(\cdot))))(s)| \overset{(8)}{\le} \sum_{k=1}^{n} \max_{s \in [T,+\infty)} (J_k(\varphi(\cdot)(|\xi_x(\cdot) - \xi_y(\cdot)| + |\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y|)))(s) \le$$

$$\le (\|\xi_x - \xi_y\|_{C_n([T,+\infty))} + |\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y|) \sum_{k=1}^{n} (J_k \varphi)(T) \overset{(5)}{=} \|x - y\|_T (J\varphi)(T), \tag{12}$$

где $(J\varphi)(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} (J_k \varphi)(T)$. Из (7) следует, что существует такое $T_0 = T_0(\varphi)$, зависящее исключительно от $\varphi(\cdot)$, что $(J\varphi)(T_0) \le 1/2$. Из (12) получаем, что

$$\|\xi_x - \xi_y\|_{C_n([T_0,+\infty))} \le 0,5 \|x - y\|_{T_0} \tag{13}$$

и, значит, $\|x - y\|_{T_0} \overset{(5)}{=} \|\xi_x - \xi_y\|_{C_n([T_0,+\infty))} + |\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y| \overset{(13)}{\le} 0,5\|x - y\|_{T_0} + |\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y|$, откуда следует справедливость оценки (9). Теорема доказана.

Для $n = 1$ эта теорема была доказана в [1]. При $\mathbf{a}_x \ne \mathbf{a}_y$ из теоремы 1 следует существование константы $C = C(t_0, \varphi, x, y) > 0$, зависящей от фиксированной точки t_0, функции $\varphi(\cdot)$ (см. (8)) и заданных решений СЗ (1),(2) $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$, такой, что

$$\|x - y\| \le C|\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y|. \tag{14}$$

Действительно, по теореме 1 существует $T_0 = T_0(\varphi) \ge t_0$, зависящее только от $\varphi(\cdot)$, для которого выполняется неравенство (9), а на отрезке $[t_0, T_0]$ имеет место равенство

$$\|\xi_x - \xi_y\|_{C_n([t_0,T_0])} = C_0(t_0, \varphi, x, y)|\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y|, \tag{15}$$

где $C_0 = C_0(t_0, \varphi, x, y) = \|\xi_x - \xi_y\|_{C_n([t_0,T_0])}/|\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y|$. Из (15) вытекает, что $\|x - y\| \le$ $\le \max\{\|\xi_x - \xi_y\|_{C_n([t_0,T_0])} + |\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y|, \|x - y\|_{T_0}\} \le (C_0 + 3)|\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y| = C(t_0, \varphi, x, y)|\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y|$, где $C = C(t_0, \varphi, x, y) = C_0(t_0, \varphi, x, y) + 3$.

Далее докажем, что на самом деле константа C в неравенстве (14) зависит только от t_0 и $\varphi(\cdot)$, а от решений $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ не зависит.

Доказательству этого факта предпошлем простую лемму.

Лемма 1. *Для многочлена* $P(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k t^k$ *выполняется неравенство*

$$|\mathbf{P}(t)| = \sum_{k=0}^{n-1} |P^{(k)}(t)| \le n! n^2 (|t|^{n-1} + 1)|\mathbf{a}|. \tag{16}$$

Доказательство. Неравенство $|P^{(k)}(t)| \le n! \sum\limits_{p=k}^{n} |a_p|\,|t|^{p-k}$ очевидно. Из него для $|t| \le 1$ имеем $|P^{(k)}(t)| \le n!n|\mathbf{a}|$, а для $|t| \ge 1$ $|P^{(k)}(t)| \le n!n|\mathbf{a}|\,|t|^{n-1}$, откуда и получаем доказываемое утверждение $|\mathbf{P}(t)| = \sum\limits_{k=0}^{n-1} |P^{(k)}(t)| \le n!n^2|\mathbf{a}| + n!n^2|\mathbf{a}|\,|t|^{n-1} = n!n^2|\mathbf{a}|(1+|t|^{n-1})$.

Следствие. *Пусть фиксирован некоторый отрезок $[t_0, t_1]$, тогда существует константа $L = L(t_0, t_1)$ такая, что для любого многочлена $P(t)$ имеет место*

$$\|\mathbf{P}\|_{C_n([t_0,t_1])} \le L|\mathbf{a}|, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{17}$$

Действительно, $n!n^2(|t|^{n-1}+1)$ достигает как непрерывная функция на отрезке $[t_0, t_1]$ своей верхней грани, т. е. существует $L = L(t_0, t_1)$, для которой $n!n^2(|t|^{n-1}+1) \le L$ при $t \in [t_0, t_1]$, что и доказывает следствие из леммы 1.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 имеет место неравенство $\|x - y\| \le C|\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y|$, где $C = C(t_0, \varphi) \ge 0$ — константа, зависящая только от фиксированного конца t_0 и функции $\varphi(\cdot)$.*

Доказательство. Из теоремы 1 и леммы 1 следует, что существуют $T_0 = T_0(\varphi)$, зависящая только от $\varphi(\cdot)$, и $L = L(t_0, \varphi)$, зависящая от $\varphi(\cdot)$ и фиксированной точки t_0 (везде в дальнейшем зависимость от t_0 будем опускать, так как эта точка фиксирована), такие, что

$$\|x - y\|_{T_0} \overset{(9)}{\le} 2|\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y|, \quad \|\mathbf{P}_x - \mathbf{P}_y\|_{C_n([t_0,T_0])} \overset{(17)}{\le} L|\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y|. \tag{18}$$

Отсюда $|(\mathbf{x}-\mathbf{y})(T_0)| \le \sum\limits_{k=0}^{n-1} |(x - P_x)^{(k)}(T_0) - (y - P_y)^{(k)}(T_0)| + \sum\limits_{k=0}^{n-1} |(P_x - P_y)^{(k)}(T_0)| \overset{(4),(13)}{\le}$ $\overset{(4),(13)}{\le} 0,5\|x - y\|_{T_0} + \|\mathbf{P}_x - \mathbf{P}_y\|_{C_n([t_0,T_0])} \overset{(18)}{\le} (L+1)|\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y|$, т. е. имеет место неравенство

$$|(\mathbf{x}-\mathbf{y})(T_0)| \le \Phi|\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y|, \tag{19}$$

где $\Phi = \Phi(\varphi) = L(\varphi) + 1$.

При $t \in [t_0, T_0]$ имеем

$$|(\mathbf{x}-\mathbf{y})(t)| \le |(\mathbf{x}-\mathbf{y})(T_0)| + \int\limits_t^{T_0} \sum_{k=1}^{n} |(x-y)^{(k)}(s)|ds \overset{(1)}{\le} |(\mathbf{x}-\mathbf{y})(T_0)| + \int\limits_t^{T_0} |(\mathbf{x}-\mathbf{y})(s)|ds +$$

$$+ \int\limits_t^{T_0} |f(s,\mathbf{x}(s)) - f(s,\mathbf{y}(s))|ds \overset{(8)}{\le} |(\mathbf{x}-\mathbf{y})(T_0)| + \int\limits_t^{T_0} |(\mathbf{x}-\mathbf{y})(s)|ds + \int\limits_t^{T_0} \varphi(s)(|(\xi_x - \xi_y)(s)| + |\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y|)ds \le$$

$$\le |(\mathbf{x}-\mathbf{y})(T_0)| + \int\limits_t^{T_0} \varphi(s)(|(\mathbf{P}_x - \mathbf{P}_y)(s)| + |\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y|)ds + \int\limits_t^{T_0} (\varphi(s)+1)|(\mathbf{x}-\mathbf{y})(s)|ds \overset{(18),(19)}{\le} \Phi|\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y| +$$

$$+ (L+1)|\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y| \int\limits_{t_0}^{T_0} \varphi(s)ds + \int\limits_t^{T_0} (\varphi(s)+1)|(\mathbf{x}-\mathbf{y})(s)|ds = C_1|\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y| + \int\limits_t^{T_0} (\varphi(s)+1)|(\mathbf{x}-\mathbf{y})(s)|ds, \tag{20}$$

где $C_1 = C_1(t_0, \varphi) = \Phi + (L+1)\int\limits_{t_0}^{T_0} \varphi(s)ds$. Из (20) в силу леммы Гронуолла получаем $|(\mathbf{x}-\mathbf{y})(t)| \le |\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y| C_1 \exp\Big\{\int\limits_{t_0}^{T_0} (\varphi(s)+1)ds\Big\} = C_2|(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y|$, $t \in [t_0, T_0]$, где $C_2 = C_2(t_0, \varphi) =$ $= C_1 \exp\Big\{\int\limits_{t_0}^{T_0} (\varphi(s)+1)ds\Big\}$. Далее имеем $\sum\limits_{k=0}^{m-1} |\xi_{x,k}(t) - \xi_{y,k}(t)| \le |(\mathbf{x}-\mathbf{y})(t)| + \sum\limits_{k=0}^{n-1} |P_x^{(k)}(t) - P_y^{(k)}(t)| \le$ $\le C_3|\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y|$, $t \in [t_0, T_0]$, где $C_3 = C_3(t_0, \varphi) = C_2 + L$. Таким образом, $\|\xi_x - \xi_y\|_{C_n([t_0,T_0])} \le$ $\le C_3|\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y|$, откуда $\|\xi_x - \xi_y\|_{C_n([t_0,+\infty))} \overset{(9)}{\le} (C_3+1)|\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y|$, т. е. $\|x - y\| \le (C_3+2)|\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y| =$ $= C|\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y|$, где $C = C(t_0, \varphi) = C_3 + 2$. Утверждение теоремы доказано.

Аналогично стабилизации к алгебраическим полиномам определяется понятие стабилизации функций к тригонометрическим полиномам.

Определение 2. Функция $f(x)$, имеющая непрерывные производные до порядка $2n+1$ включительно, называется стабилизирующейся при $t \to +\infty$ к тригонометрическому полиному $T_n(t) = a_0/2 + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k \sin kt + b_k \cos kt)$ порядка n с действительными коэффициентами $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, если $\lim\limits_{t\to+\infty}(f(t) - T_n(t))^{(k)} = 0$, $k = 0, 1, \ldots, 2n+1$.

Пусть $\tilde{T}$ — класс функций, стабилизирующихся при $t \to +\infty$ к какому-либо тригонометрическому полиному. Далее в работе изучается связь класса $\tilde{T}$ с классом равномерных почти периодических (п. п.) функций AP. Начнем с определения п. п. функций [3].

Определение 3. Число τ называется ε-почти периодом для функции $f(t)$, если для любого $t \in \mathbb{R}$: $|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon$.

Определение 4. Множество $E \subseteq \mathbb{R}$ называется относительно плотным в $\mathbb{R}$, если существует число $\Delta > 0$ такое, что для любого $t \in \mathbb{R}$ $[t, t+\Delta] \cap E \neq \emptyset$.

Определение 5. Непрерывная функция $f(t)$ называется равномерной п. п. функцией, если для любого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное в R множество ε-почти периодов.

Для функций из $\tilde{T}$ справедлива

Теорема 3. *Если функция $f(t)$ принадлежит одновременно классу равномерных п. п. функций AP и классу $\tilde{T}: f \in AP \cap \tilde{T}$, то $f(t)$ есть тригонометрический полином.*

Доказательство. Пусть $\{T_n\}$ — множество тригонометрических полиномов порядка n с действительными коэффициентами. Включение $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}\{T_n\} \subseteq AP \bigcap \tilde{T}$ очевидно. Покажем, что $AP \bigcap \tilde{T} \subseteq \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}\{T_n\}$. Пусть $f \in AP \bigcap \tilde{T}$. Из $f \in \tilde{T}$ следует, что $\lim\limits_{t\to+\infty}(f(t) - T(t)) = 0$, где $T \in \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}\{T_n\}$ — некоторый тригонометрический полином. Если

$$g(t) = f(t) - T(t), \tag{21}$$

то

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0. \tag{22}$$

Кроме того, $g \in AP$ (т. е. является равномерной п. п. функцией) как сумма двух равномерных п. п. функций [3], поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\varepsilon/2$-почти периодов функции $g(t)$, которую обозначим $\{\tau_k\}_{k=1}^{+\infty}$, таких, что $\lim\limits_{k\to+\infty}\tau_k = +\infty$. Из (22) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $t_1 \in \mathbb{R}$ такое, что $|g(t)| < \varepsilon/2$, $t \in [t_1, +\infty)$.

Выберем произвольно числа $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\tau_{k_0} > t_1 - t_0$ $(\tau_{k_0} \in \{\tau_k\}_{k=1}^{+\infty})$, тогда $|g(t)| = |g(t) + g(t+\tau_{k_0}) - g(t+\tau_{k_0})| \leq |g(t) - g(t+\tau_{k_0})| + |g(t+\tau_{k_0})| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, $t \in [t_0, +\infty)$. Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $g(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$. В силу произвольности $t_0 \in \mathbb{R}$ заключаем, что $g(t) \equiv 0$, $t \in R$, т. е. $f(t) \overset{(21)}{\equiv} T(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, включение $AP \bigcap \tilde{T} \subseteq \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}\{T_n\}$ доказано. Итак, $AP \bigcap \tilde{T} \equiv \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}\{T_n\}$.

Литература

1. *Кудрявцев Л. Д.* // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320, № 4. С. 792 — 798.
2. *Кудрявцев Л. Д.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 9. С. 1486 — 1503.
3. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. М., 1953.

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию 30 июня 1994 г.