С.А.Евдокимов

ДЕЙСТВИЕ НЕРЕГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА ГЕККЕ С НОМЕРОМ p НА ТЭТА-РЯД КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

Пусть $F = F^{(m)}$ - положительно определенная симметрическая целая четная (то есть с четными коэффициентами на главной диагонали) матрица четного порядка $m = 2k$. Для каждого натурального n определим тэта-ряд рода n матрицы F, полагая

$$\theta^n(Z, F) = \sum_{M \in M_{m,n}(\mathbb{Z})} exp\left(\pi i \sigma\left(Z F[M]\right)\right),$$

где Z - точка верхней полуплоскости Зигеля рода n, M пробегает множество всех целых матриц размеров $m \times n$, $F[M] = {}^tMFM$, где ${}^tM$ - транспонированная матрица, и σ - след. Известно (см. [I]), что $\theta^n(Z,F)$ является модулярной формой Зигеля рода n, веса k, ступени q_F и характера χ_F, где q_F - ступень матрицы F (то есть наименьшее натуральное Q, для которого матрица QF^{-1} целая и четная) и χ_F - вещественный характер Дирихле по модулю q_F, задаваемый по правилу:

$$\chi_F(d) = \left(\frac{(-1)^k \det F}{d}\right),$$

где $(-)$ - символ Кронекера (см. [2, глава I4]).

Для произвольного простого числа p положим

$$\theta^n(Z,F)\,|\,\Pi(p) = p^{-\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{\substack{{}^tS=S \in M_n(\mathbb{Z}) \\ S \bmod p}} \theta^n\left(p^{-1}(Z+S), F\right), \qquad (I)$$

где S пробегает полную систему представителей из классов по модулю p целых симметрических матриц порядка n. Если $n=1$, то действие оператора $\Pi(p)$ совпадает с действием нерегулярного оператора Гекке с номером p (см. [3]). Поскольку тэта-ряды эквивалентных матриц совпадают, то, не умаляя общности, можно считать, что

$$F \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F_0 \end{pmatrix} (\mathrm{mod}\ p) \tag{2}$$

где $F_0 = F_0^{(r)}$ – положительно определенная симметрическая целая четная матрица порядка $r\ (0 \leqslant r \leqslant m)$, невырожденная по модулю p ; последнее равносильно тому, что p не делит $\det F_0$, если p нечетно или $p=2$ и r четно, и 4 не делит $\det F_0$, если $p=2$ и r нечетно (во втором случае $\det F_0$ всегда четен). Сравнение $F \equiv F'(\mathrm{mod}\ p)$ здесь и ниже обозначает, что матрица $p^{-1}(F-F')$ целая и четная.

ТЕОРЕМА I. Во введенных выше обозначениях и предположениях имеет место формула

$$\theta^n(Z, F)\,|\,\Pi(p) =$$

$$= \sum_{i=0}^{a} (-1)^i p^{i(i-\varepsilon)} \sum_{j=1}^{h(i)} \frac{r(F, pF_{ij}, G_r \mathcal{D}_{r-a+i} G)}{e(F_{ij})} \theta^n(Z, F_{ij}), \tag{3}$$

где $\varepsilon = \chi_{F_0}(p) = \pm 1$, если r четно, ($\varepsilon = 1$, если $r = 0$) и $\varepsilon = 0$, если r нечетно, $a = (r-1+\varepsilon)/2$, $\{F_{ij}\}_{j=1}^{h(i)}$ – полная система представителей из классов положительно определенных симметрических целых четных матриц порядка m с определителем $p^{2(r-a+i-k)} \det F$, $G = GL_m(\mathbb{Z})$,
$G_r = \left\{ g \in G\ ;\ g = \begin{pmatrix} E_{m-r} & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}$, $\mathcal{D}_\ell = \begin{pmatrix} E_{m-\ell} & 0 \\ 0 & pE_\ell \end{pmatrix}$,
$r(F, pF_{ij}, G_r \mathcal{D}_{r-a+i} G)$ – число решений в матрицах $X \in G_r \mathcal{D}_{r-a+i} G$ уравнения $F[X] = pF_{ij}$ и $e(F_{ij}) = r(F_{ij}, F_{ij}, G)$ – число единиц матрицы F_{ij} .

ТЕОРЕМА 2. Рассмотрим формулу (3). Тогда, если $r(F, pF_{ij}, G_r \mathcal{D}_{r-a+i} G) \neq 0$, то $q_{F_{ij}}$ делит наименьшее общее кратное чисел p и q_F. Иными словами, каждое пространство

$$\Theta_m^n(q,\chi) =$$

$$=\left\{\sum_{\ell=1}^{h} c_\ell \theta^n(Z,F_\ell^{(m)}); q_{F_\ell} \text{ делит } q, \chi_{F_\ell} \text{ продолжает } \chi, c_\ell\in\mathbb{C}\right\},$$

где q - натуральное число, делящееся на p, и χ - вещественный характер Дирихле по модулю q такой, что $\chi(-1)=(-1)^{m/2}$, инвариантно относительно оператора $\Pi(p)$.

Поскольку доказательство теоремы I проводится по схеме, изложенной в работе [4], мы отметим лишь его основные этапы.

По определению оператора $\Pi(p)$ (см. (I)) имеем

$$\theta^n(Z,F)\,\big|\,\Pi(p)=\sum_{\substack{Y\in M_{m,n}(\mathbb{Z})\\ F[Y]\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)}} \exp\left(\frac{\pi i}{p}\,\sigma\left(ZF[Y]\right)\right)$$

С другой стороны, используя вид F (см. (2)) и действуя аналогично [4, предложение 2], для фиксированного i сумму по j в правой части (3) запишем в виде

$$\sum_{\substack{Y\in M_{m,n}(\mathbb{Z})\\ F_0[Y_0]\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)}} P_i(Y)\exp\left(\frac{\pi i}{p}\,\sigma\left(ZF[Y]\right)\right),$$

где Y_0 - матрица, образованная последними r строками матрицы Y, и

$$P_i(Y)=P_i(Y_0)=\begin{cases}\dfrac{\varphi_{a-s}(p)}{\varphi_i(p)\varphi_{a-i-s}(p)}\displaystyle\prod_{j=1}^{a-i-s}\left(1+p^{i+j-\varepsilon}\right), & \text{если } s\leqslant a-i,\\[2ex] 0, & \text{если } s>a-i,\end{cases}$$

где s – ранг матрицы Y_0 над полем из p элементов, $\varphi_0(p)=1$, $\varphi_\ell(p)=(p^\ell-1)\varphi_{\ell-1}(p)$ для $\ell>0$ и произведение по j равно 1, если $a-i-s=0$. (В [4] формула для $P_i(Y)$ была установлена в случае $r=m$, $i=0$ и $\varepsilon=1$; в общем случае доказательство аналогично.) Таким образом, для доказательства формулы (3) достаточно проверить, что для каждого $s\leqslant a$

$$\sum_{i=0}^{a-s}(-1)^i p^{i(i-\varepsilon)}\frac{\varphi_{a-s}(p)}{\varphi_i(p)\varphi_{a-i-s}(p)}\prod_{j=1}^{a-i-s}(1+p^{i+j-\varepsilon})=1.$$

Эта формула является специализацией для $b=a-s$ и $z=p^{-\varepsilon}$ следующей леммы, доказываемой индукцией по b.

ЛЕММА. Для каждого целого $b\geqslant 0$ имеет место формула

$$\sum_{i=0}^{b}(-1)^i p^{i^2}\frac{\varphi_b(p)}{\varphi_i(p)\varphi_{b-i}(p)}z^i\prod_{j=1}^{b-i}(1+p^{i+j}z)=1,$$

где z – независимая переменная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Достаточно рассмотреть случай p, делящего q_F, и установить, что для каждого $\ell=0,1,\ldots,r$ матрица $F'=pq_F\mathcal{D}_\ell^{-1}F\mathcal{D}_\ell^{-1}$ целая и четная. Но это легко следует из теоремы о каноническом виде для целых p-адических квадратичных форм (см. [2, глава 8]).

Литература

1. А н д р и а н о в А.Н., М а л о л е т к и н Г.Н. Поведение тэта-рядов рода n при модулярных подстановках. – Изв. АН СССР, сер. мат., 1975, т.39, № 2, с.243-258.
2. К а с с е л с Дж. Рациональные квадратичные формы. М., 1982, 438 с.
3. O g g A. Modular forms and Dirichlet series. N.Y., 1969.
4. A n d r i a n o v A.N. Action of Hecke operator on theta-series. – Math.Ann., 1981, Bd.247, N 3, S.247-254.