



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Батищев, Возникновение вращения жидкости в пограничном слое Марангони в области локального охлаждения свободной границы,
Прикл. мех. техн. физ., 2018, том 59, выпуск 3, 26–35

<https://www.mathnet.ru/pmtf570>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.174

20 мая 2025 г., 00:34:42



УДК 532.526

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ВРАЩЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ МАРАНГОНИ В ОБЛАСТИ ЛОКАЛЬНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

В. А. Батищев

Южный федеральный университет, 344090 Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: batishev-v@mail.ru

Исследована бифуркация вращения в стационарном осесимметричном термокапиллярном течении несжимаемой жидкости, заполняющей полубесконечное пространство, ограниченное свободной поверхностью, на которой задано неравномерное распределение температуры. Течение жидкости рассчитано с использованием уравнений Навье — Стокса в предположении малости коэффициентов диффузии. Показано, что в результате бифуркации при локальном охлаждении свободной границы вблизи оси симметрии и при наличии внешнего потока нагретой жидкости возникает вращательный режим в тонком пограничном слое Марангони, причем вне этого слоя вращение отсутствует. При локальном нагреве свободной границы вращение не обнаружено.

Ключевые слова: свободная граница, пограничный слой, охлаждение, бифуркация, термокапиллярный эффект, вращение.

DOI: 10.15372/PMTF20180303

Введение. Течения в пограничных слоях, возникающих вблизи свободной границы теплопроводной жидкости, интенсивно изучались во второй половине XX в. В случае малых значений коэффициентов диффузии при неравномерном нагреве свободной границы возникает термокапиллярное течение жидкости в тонком пограничном слое вблизи этой границы. Одной из первых работ, посвященных исследованию автомодельных решений, описывающих течения жидкости в пограничных слоях Марангони, является работа [1]. Исследованию свойств термокапиллярных течений жидкости посвящен цикл работ В. В. Пухначева и его учеников, в том числе работа, в которой выполнен групповой анализ уравнений нестационарного пограничного слоя Марангони [2]. Нелинейные пограничные слои, обусловленные поверхностными касательными напряжениями, могут возникать при ветровых нагрузках. В работе [3] исследовались автомодельные решения для нелинейного пограничного слоя в случае поверхностных волн, вызванных касательными напряжениями. Неравномерное распределение примеси на свободной границе также создает касательные напряжения, которые вызывают течение жидкости в концентрационном пограничном слое. В [4] исследована задача о возникновении вращения однородной жидкости в тонком слое, ограниченном снизу твердой стенкой, а сверху неравномерно нагретой свободной границей, причем толщина этого слоя имеет порядок толщины пограничного слоя Марангони. В работе [5] данная задача изучена для тонкого слоя неоднородной жидкости

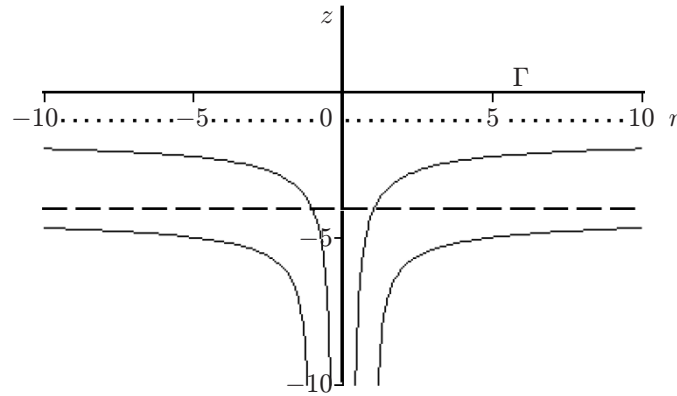


Рис. 1. Схема течения жидкости в цилиндрических координатах r, θ, z : штриховая линия — граница пограничного слоя, пунктирная — граница слоя жидкости, принадлежащего области пограничного слоя, сплошные линии — линии тока

в приближении Обербека — Буссинеска. В настоящей работе рассмотрено стационарное осесимметричное течение однородной жидкости в полуплоскости, ограниченной свободной границей с неравномерным распределением температуры. Предполагается, что вне возникающего пограничного слоя Марангони скорость жидкости имеет такой же порядок, как и в пограничном слое. Показано, что в результате бифуркации основного режима при локальном охлаждении свободной границы и различной скорости внешнего потока вращательный режим может возникать в пограничном слое, вне которого вращение отсутствует. При локальном нагреве свободной поверхности бифуркации вращения не обнаружено.

1. Уравнения движения. Рассматривается осесимметричное стационарное течение однородной несжимаемой жидкости в полубесконечном пространстве, ограниченном свободной границей Γ , вдоль которой задано неравномерное распределение температуры (рис. 1). Для описания течения жидкости используются система уравнений Навье — Стокса и уравнение теплопроводности в случае малых значений диффузионных коэффициентов вязкости ν и температуропроводности χ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} &= -\rho^{-1}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{g}, \\ (\mathbf{v}, \nabla)T &= \chi\Delta T, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$ — вектор скорости; p — давление; T — температура жидкости; ρ — плотность; $\mathbf{g} = (0, 0, -g_t)$; g_t — ускорение свободного падения. Задача решается в цилиндрических координатах r, θ, z . Предполагается, что коэффициент поверхностного натяжения σ линейно зависит от температуры: $\sigma = \sigma_0 - |\sigma_T|(T - T_*)$ ($\sigma_0, |\sigma_T|, T_*$ — известные постоянные). Свободная граница Γ считается недеформируемой. На свободной поверхности выполняются динамические условия для касательных напряжений и кинематическое условие, а также задана температура T_Γ :

$$\begin{aligned} 2\nu\rho(\Pi\mathbf{n} - (\mathbf{n}\Pi\mathbf{n})\mathbf{n}) &= \nabla_\Gamma\sigma, \\ \mathbf{v}\mathbf{n} &= 0, \quad T = T_\Gamma(r, z), \quad (r, z) \in \Gamma. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к свободной границе Γ ; Π — тензор скоростей деформации; ∇_Γ — оператор градиента вдоль границы Γ . Полагается, что в окрестности оси симметрии температура свободной границы изменяется по квадратичному закону $T_\Gamma = T_\infty + 0,5\tau T_\infty(r^2/L^2 - 1)$ при $r \leq L$ и $T_\Gamma = T_\infty$ при $r \geq L$ (r — радиальная координата; T_∞ — средняя постоянная температура слоя жидкости; L — радиус окружности, внутри

которой температура меняется по квадратичному закону; параметр τ характеризует изменение температуры свободной границы вблизи оси симметрии, т. е. амплитуду отклонения температуры T_Γ на границе от среднего значения T_∞). При $\tau > 0$ свободная поверхность неравномерно охлаждается вблизи оси симметрии. Температура границы увеличивается при увеличении расстояния от оси симметрии при $r \leq L$. При $\tau < 0$ свободная граница неравномерно нагрета при $r \leq L$.

Температура жидкости стремится к постоянному значению T_∞ , а поле скоростей ограничено при увеличении расстояния от свободной границы в случае $z \rightarrow -\infty$.

Уравнения движения и краевые условия записываются в безразмерных переменных, в качестве масштабов длины, скорости, давления и температуры выбираются параметры L , u , ρu^2 , T_∞ , причем масштаб скорости определяется по формуле

$$u = (|\sigma_T|^2 T_\infty^2 L^{-1} \nu^{-1} \rho^{-2})^{1/3}.$$

Далее вводится параметр ε по формуле

$$\varepsilon = (\rho \nu^2 L^{-1} T_\infty^{-1} |\sigma_T|^{-1})^{1/3}.$$

Заметим, что масштаб скорости u и параметр ε находятся в результате сравнения порядков величин в уравнениях Навье — Стокса и в краевых условиях при $\varepsilon \rightarrow 0$.

При малых значениях параметра ε вблизи свободной границы формируется пограничный слой Марангони, обусловленный поверхностными касательными напряжениями. Толщина этого слоя имеет порядок $O(\varepsilon)$. Вне слоя в первом приближении течение жидкости является невязким и описывается уравнениями Эйлера. Рассматривается случай, когда скорость жидкости в пограничном слое и скорость внешнего невязкого течения $\mathbf{v}_0 = (v_{r0}, v_{\theta0}, v_{z0})$ имеют одинаковый порядок u . Невязкое течение полагается незакрученным, т. е. $v_{\theta0} = 0$.

Ниже показано, что вблизи оси симметрии при локальном охлаждении свободной границы возникает вращательное движение жидкости внутри пограничного слоя, причем вне этого слоя вращение отсутствует.

2. Асимптотические приближения. Задача решается с использованием метода пограничного слоя при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поместим начало системы координат на свободную поверхность на оси симметрии (см. рис. 1). Введем растянутую переменную s по формуле $s = z/\varepsilon$. Построим асимптотические разложения решения задачи в виде рядов по степеням малого параметра:

$$\begin{aligned} v_r &= v_{r0} + h_{r0} + \varepsilon(h_{r1} + v_{r1}) + \dots, & v_z &= v_{z0} + \varepsilon(h_{z1} + v_{z1}) + \dots, \\ v_\theta &= h_{\theta0} + \varepsilon h_{\theta1} + \dots, & T &= 1 + \theta_0 + \varepsilon(T_1 + \theta_1) + \dots \end{aligned}$$

Аналогичный ряд строится для давления. Функции h_{r0} , h_{r1} , h_{z1} , $h_{\theta0}$, $h_{\theta1}$, θ_0 , θ_1 зависят от переменных s , r , локализованы в области пограничного слоя D_Γ и исчезают при выходе из него ($s \rightarrow -\infty$). Функции v_{r0} , v_{z0} , v_{r1} , v_{z1} , T_1 (“внешнее” решение) описывают течение жидкости вне области пограничного слоя. Функции v_{r0} , v_{z0} определяются из уравнений Эйлера и описывают незакрученное течение идеальной жидкости. Из условия $h_{\theta0} \rightarrow 0$ ($s \rightarrow -\infty$) следует, что при выходе из области пограничного слоя D_Γ вращение пограничного слоя не вызывает вращения жидкости вне D_Γ .

Подставляя асимптотические разложения в систему Навье — Стокса и приравнивая к нулю суммы коэффициентов порядка $O(1)$, получаем уравнения пограничного слоя в главном приближении

$$\begin{aligned} h_{r0} \frac{\partial h_{r0}}{\partial r} + h_{z1} \frac{\partial h_{r0}}{\partial s} - \frac{h_{\theta0}^2}{r} + \frac{\partial}{\partial r} (a h_{r0}) + (b + cs) \frac{\partial h_{r0}}{\partial s} &= \frac{\partial^2 h_{r0}}{\partial s^2}, \\ h_{r0} \frac{\partial h_{\theta0}}{\partial r} + h_{z1} \frac{\partial h_{\theta0}}{\partial s} + \frac{h_{r0} h_{\theta0}}{r} + \frac{a}{r} \frac{\partial (r h_{\theta0})}{\partial r} + (b + cs) \frac{\partial h_{\theta0}}{\partial s} &= \frac{\partial^2 h_{\theta0}}{\partial s^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{r0}}{\partial r} + \frac{h_{r0}}{r} + \frac{\partial h_{z1}}{\partial s} &= 0, \\ h_{r0} \frac{\partial \theta_0}{\partial r} + h_{z1} \frac{\partial \theta_0}{\partial s} + a \frac{\partial \theta_0}{\partial r} + (b + cs) \frac{\partial \theta_0}{\partial s} &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial s^2} \end{aligned} \quad (1)$$

(Pr — число Прандтля). Коэффициенты a , b , c определяются значением поля скорости внешнего течения жидкости на свободной границе:

$$a = v_{r0}|_{\Gamma}, \quad b = v_{z1}|_{\Gamma}, \quad c = \frac{\partial v_{z0}}{\partial z}|_{\Gamma}.$$

Для системы (1) приведем краевые условия

$$\begin{aligned} s = 0: \quad \frac{\partial h_{r0}}{\partial s} &= -\frac{\partial T_{\Gamma}}{\partial r}, \quad h_{z1} + b = 0, \quad \frac{\partial h_{\theta 0}}{\partial s} = 0, \quad \theta_0 = T_{\Gamma} - 1, \\ s \rightarrow -\infty: \quad h_{r0} &\rightarrow 0, \quad h_{z1} \rightarrow 0, \quad h_{\theta 0} \rightarrow 0, \quad \theta_0 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В предположении, что вне области пограничного слоя заданы компоненты v_{r0} , v_{z0} поля скоростей внешнего невязкого незакрученного течения, коэффициенты $a(r)$, $c(r)$ в уравнениях (1) однозначно определены. Например, если течение идеальной жидкости вблизи границы Γ задано полем скоростей $v_{r0} = Ur$, $v_{z0} = -2Uz$, $v_{\theta 0} = 0$, то $a = Ur$, $c = -2U$. При решении краевой задачи (1), (2) неизвестный коэффициент $b(r)$ исключается путем введения новой функции $H_z = h_{z1} + b + cs$, при этом также исключается функция h_{z1} . После решения полученной задачи коэффициент $b(r)$ определяется однозначно по формуле $b(r) = \lim_{s \rightarrow -\infty} (H_z - cs)$. Заметим, что коэффициент $b(r)$ задает кинематическое краевое условие на свободной границе в задаче о расчете в первом приближении v_{r1} , v_{z1} внешнего течения.

В пограничном слое введем радиальную компоненту H_r вектора скорости в главном приближении по формуле $H_r = h_{r0} + a$. Функции H_r , H_z и компонента $h_{\theta 0}$ удовлетворяют системе уравнений пограничного слоя Прандтля с краевыми условиями на свободной границе ($s = 0$) для касательных напряжений $\partial H_r / \partial s = -\partial T_{\Gamma} / \partial r$, $\partial h_{\theta 0} / \partial s = 0$ и условием непротекания $H_z = 0$.

С учетом квадратичного закона распределения температуры на свободной границе, который в безразмерных переменных принимает вид $T = 1 + 0,5\tau(r^2 - 1)$ при $r < 1$, построим решение задачи (1), (2) вблизи оси симметрии. Предположим, что радиальная компонента скорости идеальной жидкости на свободной границе вблизи оси симметрии линейно зависит от радиальной координаты: $v_{r0}|_{\Gamma} = Ur$ ($U \geq 0$). Заметим, что такому значению скорости на недеформируемой границе Γ соответствует поле скоростей невязкой жидкости в окрестности этой границы: $v_{r0} = Ur$, $v_{z0} = -2Uz$, $v_{\theta 0} = 0$.

Решение уравнений пограничного слоя вблизи оси симметрии будем строить в виде

$$h_{r0} = rH'(\eta), \quad h_{z1} = 2H(\eta) - b, \quad h_{\theta 0} = rG(\eta),$$

где $\eta = -s$. Данное решение описывает течение жидкости в пограничном слое только при малых значениях радиальной координаты и несправедливо при $r > 1$. Функции H , G зависят от параметров U , τ . Для функций $H(\eta)$, $G(\eta)$ из (1), (2) выводим краевую задачу

$$\begin{aligned} H''' &= H'^2 + 2UH' - 2H''(H + \eta U) - G^2, \quad G'' = 2(H' + U)G - 2(H + \eta U)G', \\ H(0) &= 0, \quad H''(0) = \tau, \quad G'(0) = 0, \quad H'(+\infty) = 0, \quad G(+\infty) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

После решения задачи (3) функция $v_{z1}|_{\Gamma}$ находится по формуле $v_{z1}|_{\Gamma} = 2H(+\infty)$.

Главное приближение температуры жидкости в области пограничного слоя определяется формулой $T = 1 + \theta_0 + O(\varepsilon)$. Функцию θ_0 представим в виде суммы $\theta_0 = r^2\theta_{00}(\eta) + \theta_{01}(\eta)$. Функции θ_{00} , θ_{01} определяются путем решения краевых задач

$$\begin{aligned} \theta_{00}'' &= 2\text{Pr}((H' + U)\theta_{00} - (H + \eta U)\theta_{00}'), \quad \theta_{01}'' = -2\text{Pr}(H + \eta U)\theta_{01}', \\ \theta_{00}(0) &= \tau/2, \quad \theta_{01}(0) = -\tau/2, \quad \theta_{00}(+\infty) = \theta_{01}(+\infty) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

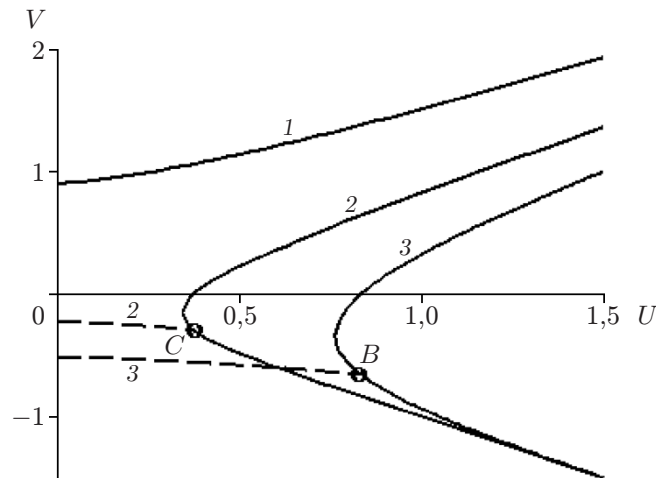


Рис. 2. Зависимость $V(U)$ на свободной границе при различных значениях параметра τ :

сплошные кривые — режимы течения первого типа (без вращения), штриховые — режимы течения второго типа, различающиеся направлением вращения; 1 — $\tau = -1,0$, 2 — $\tau = 0,3$, 3 — $\tau = 1,0$

3. Результаты численных расчетов. Краевые задачи (3), (4) решались численно с использованием метода пристрелки и пакета Matlab при $Pr = 7$. Заметим, что решение задачи (3) для различных положительных значений параметра τ можно получить, решив эту задачу при $\tau = 1$, а затем выполнив перерасчет полученного решения по формулам

$$H(\eta) = \tau^{1/3}H_1(\xi), \quad G(\eta) = \tau^{2/3}G_1(\xi), \quad U = \tau^{2/3}U_1, \quad \xi = \tau^{1/3}\eta, \quad (5)$$

где функции H_1 , G_1 и параметр U_1 соответствуют решению задачи (3) при $\tau = 1$.

Введем параметр $V = H'(0) + U$, пропорциональный радиальной компоненте вектора скорости вязкой жидкости на свободной границе в главном приближении. На рис. 2 приведена зависимость параметра V от параметра U , пропорционального скорости идеальной жидкости на свободной границе, при различных значениях параметра τ . Режимы течений жидкости делятся на два типа: к первому типу относятся режимы течений в отсутствие вращения ($v_\theta = 0$), ко второму типу — течения жидкости с вращением (вторичные режимы). Кривая 1 на рис. 2 рассчитана для случая нагрева свободной границы при $\tau = -1$. Видно, что скорость вязкой жидкости на свободной границе монотонно увеличивается при увеличении параметра U . Кривые 2, 3 рассчитаны для случая охлаждения свободной границы при $\tau = 0,3$, $\tau = 1,0$. При $\tau > 0$ режимы в отсутствие вращения существуют только в случае $U \geq U_m$. С учетом (5) получаем $U_m \approx 0,7651\tau^{2/3}$. При $\tau = 0,3; 1,0$ данные значения U_m соответствуют “вершинам” кривых 2, 3. Для каждого значения U при $U > U_m$ найдено по два решения первого типа, которые различаются формой профиля скорости. При $U = U_m$ эти решения совпадают, а при $U < U_m$ — исчезают. При $U_m < U < U_0$ профили скоростей каждого из двух решений имеют зоны противотока ($U_0 \approx 0,8344\tau^{2/3}$ — значение параметра U , при котором $V = 0$). В течениях первого типа при $V > 0$ зона противотока отсутствует, при $V < 0$ присутствует зона противотока, примыкающая к свободной границе. В зоне противотока радиальная компонента скорости направлена к оси симметрии.

На рис. 3 показана зависимость функции $V_r = H_r/r$, пропорциональной радиальной компоненте скорости в главном приближении, от поперечной координаты в пограничном слое при $U = 0,8$, $U = 0$. Кривые 1–3 соответствуют решениям первого типа. Кривая 1

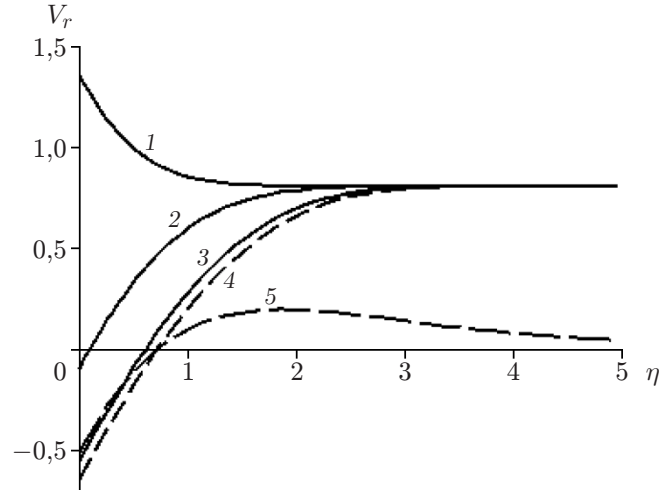


Рис. 3. Зависимость $V_r(\eta)$ в пограничном слое при различных значениях U , τ : сплошные кривые — режимы течения первого типа (1 — $\tau = -1$, $U = 0,8$; 2, 3 — решения нелинейной задачи при $\tau = 1$, $U = 0,8$), штриховые кривые — режимы течения второго типа (4 — $\tau = 1$, $U = 0,8$, 5 — $\tau = 1$, $U = 0$)

соответствует нагреву свободной границы при $\tau = -1$, $U = 0,8$. Кривые 2, 3 — профили скоростей для двух различных решений, полученных при $U = 0,8$, $\tau = 1$ в случае локального охлаждения границы. Оба решения имеют зону противотока вблизи свободной границы. Заметим, что у перечисленных выше решений при $U = 0,8$ радиальная компонента скорости либо монотонно уменьшается при $\tau = -1$, либо монотонно увеличивается при $\tau = 1$ при увеличении расстояния от свободной границы и стремится к предельному значению $V_r = 0,8$ при $\eta \rightarrow \infty$. Кривые 4, 5 описывают режимы течений жидкости с вращением при $U = 0,8$, $U = 0$, $\tau = 1$ в случае локального охлаждения границы. Видно, что имеются зоны противотока и профиль скорости при $U = 0$ является немонотонным. Отсутствие монотонности радиальной компоненты скорости в сечении пограничного слоя проявляется в случае малых значений параметра U при $\tau > 0$.

4. Бифуркация решений. Вторичные режимы. Решения первого типа при $\tau > 0$ отсутствуют при скоростях внешнего потока, удовлетворяющих неравенству $U < U_m$. При таких значениях параметра U существуют решения, описывающие течение жидкости с вращением в пограничном слое. Решения, описывающие режимы с вращением, отвечают от решений, описывающих режимы первого типа, в точках бифуркации. Точки ветвления находятся при численном решении задачи на собственные значения, которая получается путем линеаризации задачи (3), (4) вблизи решения, описывающего режимы первого типа H , θ_{00} , θ_{01} , и принимает вид

$$f_0^{(3)} = 2(H' + U)f_0' - 2H''f_0 - 2(H + \eta U)f_0''; \quad (6)$$

$$g_0'' = 2(H' + U)g_0 - 2(H + \eta U)g_0'; \quad (7)$$

$$\theta_{b0}'' = 2\text{Pr}(f_0'\theta_{00} - f_0\theta_{00}' + (H' + U)\theta_{b0} - (H + \eta U)\theta_{b0}'); \quad (8)$$

$$\theta_{b1}'' = -2\text{Pr}(f_0\theta_{01}' + (H + \eta U)\theta_{b1}'); \quad (9)$$

$$f_0(0) = f_0''(0) = \theta_{b0}(0) = \theta_{b1}(0) = g_0'(0) = 0, \quad (10)$$

$$f_0'(+\infty) = \theta_{b0}(+\infty) = \theta_{b1}(+\infty) = g_0(+\infty) = 0.$$

Краевая задача (6)–(10), а также вторичные режимы рассчитывались численно методом пристрелки с использованием пакета Matlab. Рассмотрим случай $\tau > 0$. При решении

краевой задачи (6)–(10) сначала путем решения однородной краевой задачи, состоящей из уравнения (7) и краевых условий (10) для функции g_0 , находится собственная функция g_0 и собственное число U_* . Собственную функцию представим в виде $g_0 = c_0 g_*(\eta)$ (c_0 — произвольная постоянная, не равная нулю). Принимая для функции g_* условие нормировки $g_*(0) = 1$, получаем $U_* \approx 0,8355\tau^{2/3}$. Численные расчеты показывают, что функция $g_*(\eta)$ на интервале $[0, +\infty)$ монотонно убывает при увеличении переменной η и стремится к нулю при $\eta \rightarrow +\infty$. Далее, при $U = U_*$ определяется функция f_0 из краевой задачи, включающей уравнение (6) и краевые условия для f_0 (10). Численные расчеты показывают, что $f_0 = 0$ при $U = U_*$. По аналогии получаем $\theta_{b0} = 0$, $\theta_{b1} = 0$ при $U = U_*$. При $\tau < 0$ собственных значений параметра U не найдено.

Результаты расчетов режимов второго типа (с вращением жидкости) показаны на рис. 2, 3 штриховыми линиями. При каждом положительном значении параметра τ и $U < U_*$ найдено по два таких режима, которые различаются только направлением вращения. На рис. 2 точки B и C являются точками ветвления соответственно для $\tau = 1$, $\tau = 0,3$. Окружная компонента скорости в главном приближении $h_{\theta 0}$ монотонно уменьшается и стремится к нулю при увеличении расстояния от свободной границы. Максимальное значение этой компоненты достигается на свободной границе и с увеличением параметра τ увеличивается по степенному закону. При $\tau > 0$ краевая задача (3), (4) при $U \geq U_*$ имеет два решения первого типа, при $U_m < U < U_*$ — четыре решения, два из которых являются решениями первого типа, два — решениями второго типа. При $0 \leq U < U_m$ найдены только два режима с вращением. При $U = U_m$ рассчитаны три режима, два из которых являются режимами второго типа.

Величина теплового потока на свободной границе Γ определяется по формуле $q = -\lambda \partial T / \partial z|_{\Gamma}$, которую преобразуем к виду $q = q_* Q(r, U, \tau)$ (λ — теплопроводность). Размерный параметр q_* определим по формуле $q_* = \lambda T_*/(\varepsilon L)$, безразмерную функцию $Q(r, U, \tau)$ представим в виде $Q = r^2 \theta'_{00}(0) + \theta'_{01}(0)$. При расчете величины теплового потока на свободной границе сначала численно решается краевая задача (3), затем краевая задача (4) для определения поля температур в пограничном слое. В результате находятся значения производных $\theta'_{00}(0)$, $\theta'_{01}(0)$ на свободной границе и далее вычисляется функция Q , определяющая величину теплового потока на поверхности Γ . На рис. 4 приведена зависимость функции Q от параметра U при $\tau = 1$, $r = 0,3$. Точкой B обозначена точка бифуркации. Видно, что при уменьшении параметра U от значения U_* до нуля величина теплового потока в случае вторичного режима незначительно уменьшается и при $U = 0$ достигает минимума. При $U < 0$ вторичные режимы не рассчитывались.

Обозначим через W параметр, пропорциональный окружной компоненте скорости на свободной границе в главном приближении $W = h_{\theta 0}/r|_{\Gamma}$. На рис. 5 приведена зависимость параметра W от параметра U для вторичных режимов. Каждому значению параметра U при $U < U_*$ соответствуют два симметричных вторичных режима со значениями $\pm|W|$. Точками B , C обозначены точки бифуркации. Видно, что при увеличении параметра U от нуля до значения U_* модуль окружной компоненты скорости точек свободной границы монотонно уменьшается до нуля. Заметим, что в отсутствие внешнего потока $|W|$ вычисляется по формуле $|W||_{U=0} \approx 1,0659\tau^{2/3}$.

5. Асимптотика вторичных режимов вблизи точки бифуркации. Обозначим через H_* , θ_0^* , θ_1^* , U_* значения в точке бифуркации функций H , θ_{00} , θ_{01} и параметра U , описывающих решения первого типа. В малой окрестности точки бифуркации введем параметр $\varepsilon_1 = G(0)$, где $G(0)$ — функция параметров τ и U , которая обращается в нуль в точке бифуркации при $U = U_*$. Величина $G(0)$ пропорциональна амплитуде окружной компоненты скорости в случае вторичного режима на свободной границе. Очевидно, что при $U \rightarrow U_*$ параметр ε_1 является малым. Введем параметр $\delta = U_* - U$, который вблизи

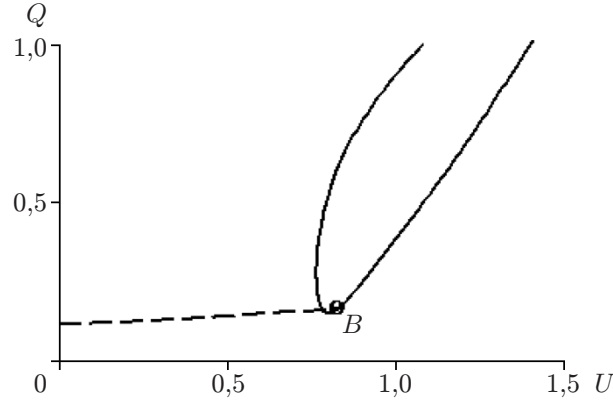


Рис. 4. Зависимость $Q(U)$ на свободной границе при $\tau = 1$, $r = 0,3$: сплошная кривая — режим течения первого типа, штриховая — режим течения второго типа

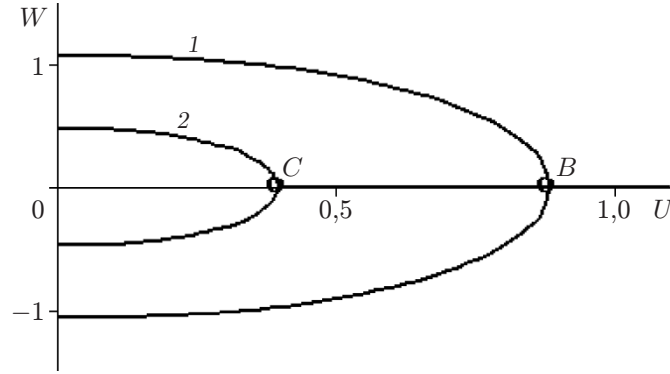


Рис. 5. Зависимость $W(U)$ на свободной границе для режимов второго типа при различных значениях τ :
1 — $\tau = 1,0$, 2 — $\tau = 0,3$

точки бифуркации также является малым. Решение краевой задачи (3), (4) находим по формулам

$$H = H_* + f, \quad G = \varepsilon_1 g, \quad \theta_{00} = \theta_0^* + \theta_0^0, \quad \theta_{01} = \theta_1^* + \theta_0^1.$$

Используя соотношение $\varepsilon_1 = G(0)$, получаем краевое условие для функции $g(\eta)$ на свободной границе $g(0) = 1$.

Введем операторы

$$L = D^3 - 2(H_*' + U_*)D + 2(H_* + \eta U_*)D^2 + 2H_*''E, \\ K = D^2 - 2(H_*' + U_*)E + 2(H_* + \eta U_*)D$$

($D = d/d\eta$ — оператор дифференцирования; E — единичный оператор).

Приведем краевую задачу для определения функций f и g :

$$Lf = 2\delta(-f' + \eta f'' - H_*' + \eta H_*'') + f'^2 - 2ff'' - \varepsilon_1^2 g^2, \\ Kg = 2\delta(\eta g' - g) + 2f'g - 2g'f, \quad (11)$$

$$f(0) = 0, \quad f''(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \quad f'(+\infty) = 0, \quad g(+\infty) = 0.$$

Дополнительное условие $g(0) = 1$ связывает малые параметры ε_1^2 и δ . В задачу (11) параметр ε_1 входит в виде квадратичной функции ε_1^2 . Предположим, что функцию ε_1^2 можно представить в виде асимптотического ряда по степеням δ :

$$\varepsilon_1^2 = \delta V_1 + \delta^2 V_2 + \dots, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (12)$$

Решения краевой задачи (11) построим в виде асимптотических рядов по степеням параметра δ

$$f = \delta f_1 + \delta^2 f_2 + \dots, \quad g = g_* + \delta g_1 + \delta^2 g_2 + \dots, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (13)$$

Для функций g_k определим начальные условия $g_k(0) = 0$ ($k \geq 1$). Функция g_* представляет собой нормированную собственную функцию краевой задачи (6)–(10), удовлетворяющую условию $g_*(0) = 1$. Для определения функции f_1 приведем краевую задачу

$$L f_1 = F_1, \quad f_1(0) = 0, \quad f_1''(0) = 0, \quad f_1'(+\infty) = 0. \quad (14)$$

Правая часть уравнения в (14) задается формулой

$$F_1 = 2\eta H_*'' - 2H_*' - V_1 g_*^2.$$

Функция g_1 в (13) находится после определения функции f_1 и удовлетворяет краевой задаче

$$K g_1 = 2(\eta g_*' - g_* + f_1' g_* - f_1 g_*'), \quad g_1'(0) = 0, \quad g_1(+\infty) = 0. \quad (15)$$

Дополнительное условие $g_1(0) = 0$ служит для нахождения параметра V_1 .

При численном интегрировании задач (14), (15) функцию f_1 , зависящую от неизвестного параметра V_1 , следует представить в виде суммы $f_1 = f_{11}(\eta) + V_1 f_{12}(\eta)$. Функции f_{11} , f_{12} не зависят от параметра V_1 и определяются из краевой задачи (14), в которой следует положить соответственно $F_1 = 2\eta H_*'' - 2H_*'$ в случае $f_1 = f_{11}$ и $F_1 = -g_*^2$ при $f_1 = f_{12}$. Путем численного расчета при $\tau = 1$ получаем значения производных $f_{11}'(0) \approx 3,3031$, $f_{12}'(0) \approx -0,7108$. Функция $f_{11}(\eta)$ монотонно возрастает при увеличении расстояния от свободной границы и при выходе из области пограничного слоя стремится к конечному предельному значению. Функция $f_{12}(\eta)$ монотонно уменьшается при увеличении η и при $\eta \rightarrow \infty$ стремится к конечному предельному значению. Выполняя условие разрешимости [6] краевой задачи (15), получаем выражение для параметра V_1

$$V_1 = -I_1/I_0, \quad (16)$$

где

$$I_0 = \int_0^\infty (f_{12}' g_* - f_{12} g_*') \varphi(\eta) d\eta, \quad I_1 = \int_0^\infty (g_*'(\eta - f_{11}) + g_*(f_{11}' - 1)) \varphi(\eta) d\eta,$$

функция $\varphi(\eta)$ определяется из краевой задачи $K_* \varphi = 0$, $\varphi'(0) = \varphi(+\infty) = 0$; $K_* = D^2 - 4(H_*' + U_*)E - 2(H_* + \eta U_*)D$. Используя результаты численных расчетов по формуле (16), для параметра V_1 получаем формулу $V_1 \approx 2,8759\tau^{2/3}$. При определении параметра V_1 по формуле (16) не требуется решать краевую задачу (15). Значения V_1 , полученные при численном решении задачи (15) методом пристрелки, и значения V_1 , полученные по формуле (16), совпадают.

Результаты расчетов показывают, что функция $f_1(\eta)$ является положительной, имеет один экстремум (максимум) на интервале $[0, +\infty)$ и стремится к конечному пределу на бесконечности. Функция $g_1(\eta)$ также является положительной, имеет один экстремум (максимум) на полуоси $\eta > 0$ и стремится к нулю при $\eta \rightarrow +\infty$.

Используя формулу (12), получаем соотношение для параметров ε_1 , δ в главном приближении

$$\varepsilon_1 = \pm \sqrt{\delta V_1} + O(\delta), \quad \delta \rightarrow 0,$$

откуда следует, что в точке бифуркации от решения первого типа ответвляются два решения, описывающие вторичные режимы, которые различаются направлением вращения. Вторичные режимы существуют только при $U < U_*$.

Заключение. В работе показано, что при локальном охлаждении свободной границы нагретой жидкости возникает вращение жидкости в пограничном слое Марангони, причем вне этого слоя вращение отсутствует. Вращательный эффект возникает в результате бифуркации основного стационарного осесимметричного режима при наличии внешнего потока жидкости. Вторичные режимы появляются, когда скорость внешнего потока не превышает бифуркационного значения, в том числе в случае отсутствия внешнего потока жидкости. Вращательные режимы вблизи свободной границы имеют зону противотока, в которой жидкость движется в направлении оси симметрии. При локальном нагреве свободной границы вращательный эффект не обнаружен.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Napolitano L. G.** Marangoni boundary layers // Proc. of the 3rd Europ. symp. on material science in space, Grenoble, 24–27 Apr. 1979. Paris: Europ. Space Agency, 1979. P. 313–315.
2. **Пухначев В. В.** Групповой анализ уравнений нестационарного пограничного слоя Марангони // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279, № 5. С. 1061–1064.
3. **Шкадов В. Я.** К образованию волн на поверхности вязкой тяжелой жидкости под действием касательного напряжения // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1970. № 3. С. 133–137.
4. **Батищев В. А.** Ветвление автомодельных решений, описывающих термокапиллярное течение жидкости в тонком слое // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 3. С. 137–142.
5. **Батищев В. А., Хорощунова Е. В.** Возникновение вращательных режимов при термокапиллярном течении неоднородной жидкости в слое // Прикл. математика и механика. 2000. Т. 64, вып. 4. С. 560–568.
6. **Bifurcation** theory and nonlinear eigenvalue problems / Ed. by J. B. Keller, S. Antman. N. Y.: W. A. Benjamin, 1969.

*Поступила в редакцию 1/II 2017 г.,
в окончательном варианте — 11/VII 2017 г.*
