А. Заславский, Еще раз о пространствах L_p и замечательных точках треугольника, *Квант*, 2013, номер 5, 45–47

Еще раз о пространствах L_p и замечательных точках треугольника

А.ЗАСЛАВСКИЙ

Что такое единица?
Школьник: единица это $\sin^2 x + \cos^2 x$
Студент 2 курса: единица это p + q (теория вероятностей)
Студент 4 курса: единица это $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ *(теория функций)*

Фольклор

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ БУДЕМ ИССЛЕДОВАТЬ ДВЕ ЗАДАЧИ, поставленные в статье В.Протасова и В.Тихомирова «Пространства L_p и замечательные точки треугольника» («Квант» №2 за 2012 г.). Будет установлена любопытная связь между рассматриваемым в теории функций сопряжением нормированных пространств и известным из геометрии треугольника изогональным сопряжением. Для начала напомним некоторые определения.

Определение 1. Пусть даны набор чисел $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и число $p \geq 1$. L_p-нормой набора $\vec{a}$ называется величина $\|\vec{a}\|_p = \left(|a_1|^p + \ldots + |a_n|^p\right)^{1/p}$. L_∞-нормой называется величина $\|\vec{a}\|_\infty = \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}$.[1]

Определение 2. Рассмотрим множество всевозможных наборов из n чисел. Расстоянием между наборами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ назовем L_p-норму набора $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, \ldots, a_n - b_n)$. Можно доказать, что при $p \geq 1$ эта величина удовлетворяет неравенству треугольника, т.е. ее действительно можно считать расстоянием. Множество наборов чисел с таким расстоянием называется *пространством* L_p. Частным случаем пространства L_p, возникающим при $p = 2$, является стандартное геометрическое пространство. Иногда, однако, имеет смысл использовать и нормы, соответствующие другим значениям p. Например, в городе, поделенном на кварталы, естественно рассматривать расстояние, соответствующее значению $p = 1$.

В теории функций большое значение имеет так называемое сопряженное пространство. Пространства (а также соответствующие нормы) L_p и L_q называются *сопряженными* или *двойственными*, если $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Например, обычное евклидово пространство L_2 сопряжено самому себе, поскольку $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, пространство L_3 сопряжено пространству $L_{3/2}$, а пространство L_1 – пространству L_∞, поскольку $\frac{1}{\infty}+\frac{1}{1}=0+1=1$.

Постановка задач и обзор известных результатов

В статье Протасова и Тихомирова были поставлены следующие две задачи.

Задача 1. Дан треугольник ABC и число $p \geq 1$. Найти на плоскости точку X, для которой величина $\left(|XA|^p + |XB|^p + |XC|^p\right)^{1/p}$ минимальна.

Задача 2. Дан треугольник ABC и число $q \geq 1$. На сторонах BC, CA, AB найти точки A', B', C', для которых величина $\left(|A'B'|^q + |B'C'|^q + |C'A'|^q\right)^{1/q}$ минимальна.

Другими словами, в задаче 1 ищется точка, набор расстояний от которой до вершин треугольника имеет минимальную L_p-норму, а в задаче 2 ищется треугольник, вписанный в данный, набор длин сторон которого имеет минимальную L_q-норму. Например, при $p = 1$ задача 1 состоит в определении точки, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна, а задача 2 (при $q = 1$) – в том, чтобы вписать треугольник минимального периметра в данный треугольник.

Напомним результаты, полученные Протасовым и Тихомировым. Рекомендуем читателям попытаться самостоятельно их доказать. Сразу оговоримся, что авторы рассматривали лишь остроугольные треугольники. О причинах этого и о том, как решать задачи 1, 2 в общем случае, мы поговорим позже.

Итак, для задачи 1 доказаны следующие утверждения.

1. При $p = 1$ решением, т.е. точкой с минимальной суммой расстояний до вершин треугольника, является *точка Торричелли*, из которой все стороны треугольника видны под углами, равными $120°$.

2. При $p = 2$ решением, т.е. точкой, для которой сумма квадратов расстояний до вершин треугольника минимальна, является центр тяжести треугольника.

3. При $p = \infty$ решением, т.е. точкой, для которой максимальное из трех расстояний до вершин треугольника минимально, является центр описанной около треугольника окружности.

Перейдем к задаче 2. Прежде всего укажем, что при любом q ее решением является *педальный треугольник* некоторой точки Y, т.е. точки A', B', C' являются проекциями Y на стороны треугольника. Кроме того:

1. При $q = 1$ решением, т.е. треугольником наименьшего периметра, вписанным в данный, является ортотреугольник. Как мы знаем, он совпадает с педальным треугольником точки пересечения высот.

2. При $q = 2$ решением является педальный треугольник *точки Лемуана*, т.е. точки пересечения *симедиан*[2] треугольника.

3. При $q = \infty$ решением, т.е. вписанным треугольником, наибольшая сторона которого имеет минимальную длину, является педальный треугольник *точки Аполлония T*. Эта точка определяется условиями $|TA|\cdot|BC| = |TB|\cdot|AC| = |TC|\cdot|AB|$, а ее педальный треугольник является правильным.[3]

---

[1] Можно доказать, что $\|\vec{a}\|_p \to \|\vec{a}\|_\infty$ при $p \to \infty$.

[2] Напомним, что симедианами треугольника называются прямые, симметричные его медианам относительно соответствующих биссектрис.

[3] Этим условиям удовлетворяют две точки, для остроугольного треугольника одна из них лежит внутри него, а другая – вне. Разумеется, решением нашей задачи будет внутренняя точка.

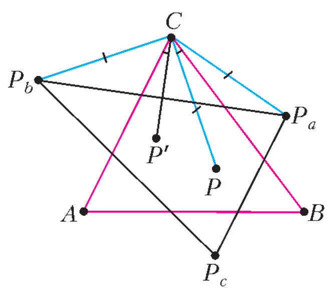
Для остальных случаев, т.е. когда p, q отличны от 1, 2 или ∞, решения, по-видимому, неизвестны. Исследование задачи 1 для произвольных p провел И.Акулич. Однако, и ему удалось найти только приближенные решения. Об этом можно прочитать в его заметке в «Кванте» №1 за 2013 год. Мы тоже не дадим решения для других значений p и q, однако опишем связь, существующую между решениями задач 1 и 2. Но для этого нам сначала придется вспомнить кое-что из геометрии треугольника.

Изогональное сопряжение и формулировка основной теоремы

Рассмотрим свойства изогонального сопряжения относительно треугольника ABC. Поскольку доказательства этих свойств достаточно просты, сформулируем их в виде упражнений.

Упражнение 1. Докажите, что для любой точки P прямые, симметричные прямым AP, BP, CP относительно биссектрис углов A, B, C соответственно, пересекаются в одной точке. Эта точка P' называется *изогонально сопряженной* точке P.

Указание. Пусть P_a, P_b, P_c – точки, симметричные P относительно BC, CA, AB. Тогда P' – центр описанной окружности треугольника $P_aP_bP_c$ (см. рисунок).



Упражнение 2. Докажите, что точка Торричелли изогонально сопряжена точке Аполлония.

Упражнение 3. Докажите, что центр тяжести изогонально сопряжен точке Лемуана.

Упражнение 4. Докажите, что центр описанной окружности изогонально сопряжен ортоцентру.

Сопоставляя результаты упражнений 2 – 4 с приведенными выше результатами Протасова и Тихомирова, можно сделать такое наблюдение. Точки, являющиеся решением задачи 1 при p, равном 1, 2 или ∞, изогонально сопряжены точкам, педальные треугольники которых являются решениями задачи 2 при q, равном ∞, 2 или 1 соответственно, т.е таком, что $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Возникает естественный вопрос: это случайное совпадение или частный случай какой-нибудь общей закономерности. Оказывается, что справедлива следующая теорема, которая и является нашим основным результатом.

Теорема о сопряжении. *Если* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *причем решением задачи 1 является точка X, а решением задачи 2 – педальный треугольник точки Y, то X и Y изогонально сопряжены.*

Таким образом, зная решение задачи 1 для некоторой нормы L_p, мы можем получить решение задачи 2 для сопряженной нормы L_q и наоборот. При этом применяемое в теории функций сопряжение пространств оказывается непосредственно связанным с известным из элементарной геометрии изогональным сопряжением.

Мы уже выяснили, что теорема о сопряжении верна при $p, q = 1, 2, \infty$. Однако при других значениях p, q доказать теорему чисто геометрическими средствами вряд ли получится. Поэтому нам понадобятся некоторые дополнительные факты.

Барицентрические координаты и некоторые сведения из анализа

Определение 3. *Барицентрическими координатами* точки P относительно треугольника ABC называется такая тройка чисел (p_a, p_b, p_c), что $p_a\overline{PA}+p_b\overline{PB}+p_c\overline{PC}=\vec{0}$.

Упражнение 5. Докажите, что барицентрические координаты точки P, лежащей внутри треугольника, пропорциональны площадям треугольников PBC, PCA, PAB.

Упражнение 6. Сформулируйте и докажите аналог этого утверждения для точек вне треугольника (подсказка: некоторые из площадей надо считать отрицательными).

Из упражнения 5 следует, что барицентрические координаты определены однозначно, с точностью до умножения их на одно и то же число.

Упражнение 7. Докажите, что барицентрические координаты точки, изогонально сопряженной P, равны $\left(\frac{a^2}{p_a}, \frac{b^2}{p_b}, \frac{c^2}{p_c}\right)$.

Пусть $F(x,y)$ – функция двух переменных. Если зафиксировать значение переменной y, то $F(x,y)$ можно рассматривать как функцию переменной x. Производная этой функции называется *частной производной* F по x и обозначается F'_x. Аналогично определяется частная производная F'_y.

Определение 4. *Градиентом* функции $F(x,y)$ называется вектор $grad\ F=(F'_x, F'_y)$.

Упражнение 8. Пусть O – фиксированная точка плоскости, X – переменная точка с декартовыми координатами (x, y) и $F(X)=F(x,y)=|OX|^p$. Докажите, что $grad\ F = p|OX|^{p-2}\,\overline{OX}$.

Результат упражнения 8 означает, что градиент функции $|OX|^p$ имеет то же направление, что и вектор $\overline{OX}$, а его длина равна $p|OX|^{p-1}$.

Утверждение. Если функция $F(X)$, определенная на треугольнике ABC, достигает своего минимального значения во внутренней точке треугольника, то в этой точке $grad\ F=\vec{0}$.

Разумеется, в общем случае условие обращения градиента в ноль является лишь необходимым. Однако, существует специальный класс так называемых выпуклых функций, для которых оно оказывается и достаточным. Мы не будем давать строгого определения выпуклости, укажем лишь, что при $p \ge 1$ выпуклыми являются функции $F(X)=|OX|^p$, L_p-норма вектора $\overline{OX}$, а значит, и функции, минимум которых ищется в задачах 1, 2.

Доказательство теоремы

Теперь мы, наконец, можем приступить к доказательству теоремы о сопряжении.

Итак, задача 1 равносильна определению минимума функции $F(X)=|XA|^p+|XB|^p+|XC|^p$. Приравняв нулю ее градиент, получаем, что барицентрические координаты искомой точки X равны $\left(|XA|^{p-2}, |XB|^{p-2}, |XC|^{p-2}\right)$, следовательно, барицентрические координаты изогонально сопряженной точки X' равны $\left(\frac{a^2}{|XA|^{p-2}}, \frac{b^2}{|XB|^{p-2}}, \frac{c^2}{|XC|^{p-2}}\right)$, т.е.

$$\frac{S_{X'BC}}{S_{X'AC}}=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{|XA|^{p-2}}{|XB|^{p-2}}.$$

С другой стороны, для любых изогонально сопряженных точек X, X'

$$\frac{|XA|}{|XB|}=\frac{\sin\angle XBA}{\sin\angle XAB}=\frac{\sin\angle X'BC}{\sin\angle X'AC}=\frac{S_{X'BC}}{S_{X'AC}}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{|X'A|}{|X'B|}.$$

Исключая из этих равенств отношение $|XA|/|XB|$, получаем, что барицентрические координаты точки X' равны

$$\left(a^{\frac{p}{p-1}}|X'A|^{\frac{2-p}{p-1}},b^{\frac{p}{p-1}}|X'B|^{\frac{2-p}{p-1}},c^{\frac{p}{p-1}}|X'C|^{\frac{2-p}{p-1}}\right).$$

Перейдем к задаче 2. Пусть $A'B'C'$ – педальный треугольник точки Y. Так как четырехугольник $CA'YB'$ вписан в окружность с диаметром CY, то $|A'B'|=|CY|\sin\angle C=$ $=|CY|c/(2R)$. Аналогично, $|B'C'|=|AY|a/(2R)$, $|C'A'|=$ $=|BY|b/(2R)$. Поэтому задача 2 равносильна минимизации функции $G(Y)=a^q|YA|^q+b^q|YB|^q+c^q|YC|^q$. Приравнивая нулю ее градиент, получаем, что барицентрические координаты точки Y равны $\left(a^q|YA|^{q-2},b^q|YB|^{q-2},c^q|YC|^{q-2}\right)$.

При $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ условия на точки X' и Y совпадают, следовательно, совпадают и сами эти точки.

Обсуждение

Прежде всего заметим, что теорема о сопряжении допускает следующую элементарную формулировку.

Пусть $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *$X$ – решение задачи 1, а* A', B', C' – *решение задачи 2. Тогда* $CX\perp A'B'$.

Это вытекает из следующего свойства изогонального сопряжения.

Упражнение 9. Пусть $A'B'C'$ – педальный треугольник точки P. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из A, B, C на $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ соответственно, пересекаются в точке, изогонально сопряженной P.

Теперь, как и было обещано, объясним, почему мы рассматривали только остроугольные треугольники. Дело в том, что в противном случае решением задачи 1 для $p=\infty$ будет не центр описанной окружности, который лежит вне треугольника, а середина его наибольшей стороны. Соответственно, при $q=1$ решением задачи 2 будет вырожденный треугольник, две вершины которого совпадают с вершиной тупого угла а третья – с ее проекцией на противоположную сторону. Аналогично, приведенное решение задачи 1 при $p=1$ является верным, только если все углы треугольника меньше $120°$. В противном случае решением задачи 1 будет вершина наибольшего угла треугольника, а решением задачи 2 при $q=\infty$ – педальный треугольник основания биссектрисы этого угла. Впрочем, легко убедиться, что теорема о сопряжении остается верной и в этих случаях. С другой стороны, решение задачи 1 при $p=2$, очевидно, остается таким же для произвольных треугольников.

Упражнение 10. Докажите, что при любом $1<p<\infty$ и любых углах треугольника минимум в задаче 1 достигается во внутренней точке.

Указание. Рассмотрите проекцию градиента на высоты треугольника.

Из последнего упражнения и теоремы о сопряжении следует, что в задаче 2 минимум во всех случаях, кроме указанных выше, достигается на педальном треугольнике внутренней точки. Однако если данный треугольник тупоугольный, то проекция внутренней точки на одну из его сторон может попасть на ее продолжение. Соответственно, если требовать, чтобы точки A', B', C' лежали именно на сторонах треугольника ABC, то теорема о сопряжении в некоторых случаях может оказаться неверна. Разумеется, для остроугольного треугольника такая ситуация невозможна.

Наконец, объясним, почему мы рассматривали только $p,q\geq 1$. Первая причина состоит в том, что при $p<1$ соответствующая величина L_p не удовлетворяет неравенству треугольника и, следовательно, не является нормой. Вторая причина, впрочем связанная с первой, в том, что функции, минимум которых ищется в задачах 1 и 2, в этом случае не являются выпуклыми, а значит, точки минимума могут быть не единственными. В упомянутой выше заметке Акулича описываются эффекты, возникающие в задаче 1 при уменьшении p.

Автор благодарен В.Протасову за конструктивное обсуждение, позволившее существенно улучшить первоначальную версию статьи.

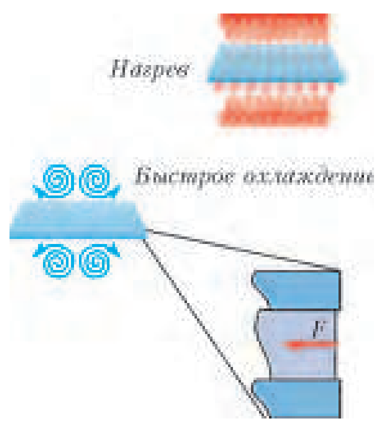
ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

Как стекло сделать прочным?

(Начало см. на 4-й странице обложки)

Чтобы сделать прочной книгу, достаточно сжать ее с обеих сторон, и тогда в торец книги можно будет хоть гвозди забивать. Оказывается, прочность стекла можно увеличить аналогичным образом (см. рисунок). Для этого стекло сначала равномерно нагревают до температуры около 750 градусов, при этом все его слои одинаково удлиняются. Потом обе поверхности быстро охлаждают струями холодного воздуха, не давая при этом остыть срединному слою стекла. Быстрое охлаждение поверхностного слоя не сопровождается уменьшением его размеров. Срединный же слой стекла, остывая медленно и стремясь уменьшить свою площадь, сжимает поверхностные слои, что и приводит к увеличению прочности всего стекла.

Почему же *быстрое охлаждение* поверхностного слоя *не сопровождается* уменьшением его размеров? Сжатие стеклянного образца при охлаждении – это результат того, что атомы при уменьшении скорости своего теплового движения наконец-то смогли подойти поближе друг к другу. Естественно, этому должна предшествовать перестройка межатомных связей и обретение новых соседей, а атомы, которые мешают уплотнению, должны при этом успеть отойти в сторону – ведь стекло аморфное тело. Иными



(Продолжение см. на с. 57)