Е. П. Голубева, О. М. Фоменко, Распределение целых точек на двуполостных гиперболоидах,
Тр. МИАН СССР, 1981, том 158, 69–79

Труды Математического института АН СССР
1981, том 158

УДК 511.465+517.863

Е. П. ГОЛУБЕВА, О. М. ФОМЕНКО

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК НА ДВУПОЛОСТНЫХ ГИПЕРБОЛОИДАХ

1. Рассмотрим тернарную квадратичную форму с целыми коэффициентами и ассоциированные с ней поверхности ($n \in \mathbf{Z}$, $n > 0$)

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1, \tag{1}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = n, \tag{2}$$

причем в приводимой ниже теореме 1 f — диагональная форма, по крайней мере, с одним положительным коэффициентом, а в теоремах 2—4 поверхности (1), (2) — двуполостные диагональные гиперболоиды.

Здесь и ниже Ω, Ω_0, Ω_1, $\Omega_2, \ldots$ — ограниченные квадрируемые области на (1). Под мерой $\omega(\Omega)$ области Ω мы понимаем объем конуса с вершиной в начале координат и основанием Ω. Пусть $Q(n, \Omega) = Q_f(n, \Omega)$ — число целых точек (т. е. точек с целыми координатами x_1, x_2, x_3) в проекции области Ω из начала координат на поверхность (2). Фиксируем область Ω_2, а в качестве Ω_1 рассмотрим произвольную область на поверхности (1). В случае выполнения соотношения ($n \to \infty$)

$$Q_f(n, \Omega_1) = \frac{\omega(\Omega_1)}{\omega(\Omega_2)} Q_f(n, \Omega_2)(1 + o(1))$$

говорим, что целые точки распределены на (2) равномерно. Если, далее, для $Q_f(n, \Omega_2)$ найдена асимптотика ($n \to \infty$), то тем самым найдена асимптотика и для $Q_f(n, \Omega_1)$ в случае произвольной области Ω_1.

В настоящей работе изучается асимптотическое распределение целых точек на двуполостных гиперболоидах

$$a_1x_1^2 - a_2x_2^2 - a_3x_3^2 = n > 0 \quad (n \to \infty), \tag{3}$$

где $a_i > 0$, $a_i \in \mathbf{Z}$ ($i = 1, 2, 3$), детерминант $d = a_1a_2a_3$ бесквадратен и $(n, 2d) = 1$. При некотором предположении о нулях L-рядов Дирихле находится (теорема 4) асимптотика для числа целых точек в произвольных областях на (3), причем даны оценки остаточных членов.

Изучение представимости чисел тернарными формами началось со знаменитой формулы Гаусса о числе $Q(n)$ целых точек на сфере

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = n > 0,$$

которая вместе с теоремой Зигеля показывает, что если $n \neq 4^a(8k+7)$, то $Q(n) \gg n^{1/2-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ произвольно мало).

В работах 1939—1940 гг. Ю. В. Линник начал изучение представления чисел отдельными положительными тернарными формами (или, что то же, классами) рода (представимость самим родом изучалась еще Смитом и Минковским) (см. [1] или обзор [2]). В работе 1957 г. ([3]; перепечатано в [1, с. 209—228]; воспроизведено в книге [4]) Ю. В. Линник доказал, что целые точки на сфере распределены асимптотически равномерно.

Для положительных тернарных форм наиболее общие результаты принадлежат А. В. Малышеву [5]. Для широкого множества форм он получил точные по порядку двусторонние оценки числа целых точек в любой достаточно хорошей области на соответствующем эллипсоиде. Большим достижением Ю. В. Линника и А. В. Малышева явилась возможность исследовать положительные тернарные формы, принадлежащие многоклассным родам. Однако полностью проблема равномерного распределения целых точек на эллипсоидах общего вида не решена (даже условно); для диагональных эллипсоидов равномерность вытекает из комбинации результатов Е. П. Голубевой [6] с указанными только что результатами А. В. Малышева [5]. Не решена (даже условно) и более трудная проблема нахождения асимптотики числа целых точек в произвольных областях на эллипсоидах, в частности на всем эллипсоиде. Правда, для некоторых классов эллипсоидов (для которых полное число целых точек находится сведением к числу целых точек на сфере) такие асимптотические формулы получили А. В. Малышев [5] и Е. П. Голубева [7, 8].

Изучение неопределенных тернарных форм началось с работы Ю. В. Линника ([9]; перепечатано в [1, с. 141—200]; воспроизведено в [4]), в которой была доказана асимптотическая формула для числа целых точек в произвольной области на двуполостном гиперболоиде

$$x_1x_2 - x_3^2 = n > 0 \tag{4}$$

(У. М. Пачев [10] несколько обобщил этот результат).

В более трудном случае однополостного гиперболоида

$$x_1x_2 - x_3^2 = -n < 0 \tag{5}$$

Б. Ф. Скубенко ([11]; воспроизведено в [4]) получил равномерную распределенность целых точек.

Для широкого класса диагональных форм (в который, однако, форма $x_1x_2 - x_3^2$ не включается) равномерную распределенность на двуполостных и однополостных гиперболоидах доказала Е. П. Голубева [6]. Рассмотренные Ю. В. Линником, Б. Ф. Скубенко и Е. П. Голубевой неопределенные тернарные формы являются нуль-формами, т. е. обращаются в нуль в некоторой целой точке $\neq(0, 0, 0)$.

В приведенных выше результатах требуется существование простого числа с дополнительными условиями либо справедливость некоторых недоказанных, хотя и очень слабых гипотез об L-рядах Дирихле типа предположения H (см. ниже). До настоящего времени результатов о распределении целых точек на гиперболоидах общего вида не было; единственным исключением является упомянутая выше заметка Е. П. Голубевой [6].

Здесь мы доказываем равномерную распределенность целых точек на двуполостных гиперболоидах (3) в случае, когда рассматриваемая тернарная форма не является нуль-формой. Изучаемые нами тернарные формы принадлежат одноклассным родам, однако в отличие от положительных тернарных форм это условие не является очень ограничительным, поскольку классическая теорема Мейера гарантирует одноклассность рода неопределенных тернарных форм при весьма общих условиях. При этом считается выполненным следующее

Предположение H. Существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого достаточно большого $|m|$ L-функция Дирихле

$$L(s, \chi) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{m}{k}\right) \frac{1}{k^s} \tag{6}$$

не имеет нулей в прямоугольнике

$$1 - (\log|m|)^{\varepsilon_0 - 1} < \operatorname{Re} s < 1, \quad |\operatorname{Im} s| < 1. \tag{7}$$

Отметим, что результаты настоящей работы можно обобщить, заставляя переменные x_i принимать значения из арифметической прогрессии.

2. Настоящий пункт содержит формулировку и доказательство (кроме теоремы 2) полученных результатов, а также некоторые комментарии в связи с используемыми методами. Доказательству теоремы 2 посвящен п. 3. Введем сначала для случая диагональных тернарных форм два определения.

Определение 1. Пусть $f(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2$. Область Ω на поверхности (1)

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1$$

назовем x_i-областью (или стандартной областью), если для ее точек справедливы неравенства

$$c_1 \leqslant x_i \leqslant c_2, \quad t_1 \leqslant x_j/x_k \leqslant t_2,$$

где (i, j, k) — произвольная перестановка чисел (1, 2, 3), $c_1 = c_1(\Omega)$ и $c_2 = c_2(\Omega)$ таковы, что $1 - a_ix_i^2 \neq 0$ при $c_1 \leqslant x_i \leqslant c_2$. Кривые $x_i = c$ на (1) назовем стандартными линиями.

Определение 2. Две x_i-области Ω_1, Ω_2 на поверхности (1), где $f(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2$, называются эквивалентными, если

$$c_1(\Omega_1) = c_1(\Omega_2), \quad c_2(\Omega_1) = c_2(\Omega_2), \quad \omega(\Omega_1) = \omega(\Omega_2).$$

Другими словами, две x_i-области на поверхности (1) называются эквивалентными, если одна получается из другой «движением» вдоль стандартных линий $x_i = c$.

В основе доказываемых нами результатов о равномерном распределении целых точек на двуполостных гиперболоидах лежит следующая довольно общая

Теорема 1. *Пусть $f(x_1, x_2, x_3)$ — диагональная квадратичная форма*

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2,$$

где $a_i \in \mathbf{Z}$, $a_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$, детерминант $d = a_1a_2a_3$ бесквадратен, $a_2a_3 \neq -1$ и хотя бы одно из a_i положительно. Пусть $n \in \mathbf{Z}$, $n > 0$, $(n, 2d) = 1$, na_1 и $-nd$ не являются полными квадратами. Пусть Ω_1, Ω_2 — две эквивалентные x_1-области на поверхности (1)

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1.$$

Тогда

$$Q_f(n, \Omega_1) = Q_f(n, \Omega_2) + O\left(\frac{n^{1/2}L(1, \chi)}{\log^{\eta} n}\right),$$

где

$$\eta > 0, \quad \chi(k) = \left(\frac{-nd}{k}\right), \quad L(s, \chi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(k)}{k^s} \quad (\operatorname{Re} s > 0).$$

Ниже теорема 1 применяется к случаю двуполостного гиперболоида. С ее помощью можно также изучать распределение целых точек на эллипсоидах и однополостных гиперболоидах (см. [6]).

Доказательство теоремы 1, которое здесь не приводится, повторяет доказательство теоремы 2 работы [7] с отличием, связанным с тем, что, кроме групповых характеров, в рассуждении будут участвовать гроссенхарактеры идеальных чисел квадратичного поля. Отметим, что в доказательстве теоремы 1 используются предположение H и результат М. Б. Барбана и П. П. Вехова [12], вместо которого можно применить дисперсионный метод (см. [13]; перепечатано в [14, с. 299—316]) или схему, предложенную в работе А. И. Виноградова [15].

Перед формулировкой теоремы 2 отметим, что, изучая двуполостный гиперболоид, мы всегда будем рассматривать его верхнюю полу.

Теорема 2. *Пусть*

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1^2 - a_2x_2^2 - a_3x_3^2,$$

где $a_i \in \mathbf{Z}$, $a_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$, *детерминант* $d = a_1a_2a_3$ *бесквадратен. Пусть* $n \in \mathbf{Z}$, $n > 0$, $(n, 2d) = 1$; Ω_1, Ω_2 — *ограниченные квадрируемые области на* (1). *Тогда имеем*

$$Q_f(n, \Omega_1) = \frac{\omega(\Omega_1)}{\omega(\Omega_2)} Q_f(n, \Omega_2) + O\left(\frac{n^{1/2} L(1, \chi)}{\log^\theta n}\right),$$

где $\theta > 0$ *и*

$$L(s, \chi) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-nd}{k}\right) \frac{1}{k^s} \quad (\operatorname{Re} s > 0).$$

Доказательство вместе с необходимыми леммами 1, 2 содержится в следующем пункте работы. Теперь же мы отметим лишь движущие пружины доказательства.

В дискретном эргодическом методе Ю. В. Линника на поверхности (2) берется целая точка L. Под действием определенного элемента P_L некоторой дискретной группы эта точка переходит в точку $L' = P_L \cdot L$ на (2); тем самым на множестве целых точек L на (2) определяется поток, описывающий блуждания по «траектории потока», причем в подавляющем большинстве случаев «время пребывания» траектории в области Λ на (2) будет асимптотически пропорционально объему конуса с вершиной в начале координат и основанием — проекцией Λ на (1) из начала координат.

В методе настоящей работы, идущем от работ [6, 7], движение точки по поверхности заменяется «движением бесконечно малой области» вдоль стандартных линий. Теорема 1 обеспечивает равномерное распределение в узких полосах, образованных стандартными линиями. Двигаясь вдоль двух «взаимно перпендикулярных» направлений, мы можем равномерно заполнить целыми точками всю рассматриваемую область. Единственную техническую сложность представляет переход с одного стандартного направления на другое, поскольку стандартные области для разных стандартных направлений разные. В лемме 1 показано, что можно осуществить этот переход так, что меры соответствующих стандартных областей мало отличаются друг от друга.

В лемме 2 показано, что величина $Q(n, \Omega)$, где Ω — достаточно малая стандартная подобласть области Ω_0, пропорциональна мере подобласти Ω.

На основании лемм 1, 2 теорема 2 доказывается сразу.

Схема доказательства теоремы 2 годится для широкого класса поверхностей второго порядка (определенных и неопределенных) (см. [6]). Исключением, однако, являются формы, у которых абсолютная величина детерминанта d есть полный квадрат, например форма $x_1x_2-x_3^2$, разобранная Ю. В. Линником и Б. Ф. Скубенко. В этом случае теорема 1 обеспечивает равномерное распределение только вдоль одного стандартного направления, поскольку вдоль второго направления квадратичная форма является разложимой. При $|d|=d_1^2$ соображения настоящей работы должны быть модифицированы. Для того чтобы теорема 2 не была тривиальной, нужно наложить на n родовое условие формы f и найти область Ω_2, для которой

$$Q(n,\ \Omega_2) \geqslant \frac{n^{1/2}L(1,\ \chi)}{\psi(n)}, \tag{8}$$

где $\psi(n)=o(\log^\theta n)$, $\theta>0$.

С помощью условия (8) легко понять смысл теоремы 2: если в какой-то области на поверхности нашего гиперболоида имеется достаточно много целых точек, то достаточно много целых точек имеется и в любой другой области гиперболоида и на поверхности гиперболоида целые точки будут распределены равномерно. Переходим теперь к теореме 3, в которой указывается область Ω_2 на рассматриваемом нами двуполостном гиперболоиде (1), для которой $Q(n,\ \Omega_2)$ имеет точное выражение, удовлетворяющее (8).

Пусть форма

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=a_1x_1^2-a_2x_2^2-a_3x_3^2=X^TAX,$$

где $A=[a_1, -a_2, -a_3]$ — диагональная 3×3 матрица, $X^T=(x_1,\ x_2,\ x_3)$, $a_i\in\mathbf{Z}$, $a_i>0$ $(i=1,\ 2,\ 3)$, детерминант $d=|A|=a_1a_2a_3$ бесквадратен, не является нуль-формой. Пусть $n>0$ — целое число, $(n,\ 2d)=1$, удовлетворяющее родовым условиям формы f. Пусть $\Gamma(A)$ — группа единиц для A (с детерминантом $+1$). Группа $\Gamma(A)$ дискретно действует на поверхностях (1) и (2) по правилу $X\to UX$, где $U\in\Gamma(A)$; пусть $F(A,\ n)$ — $\Gamma(A)$-фундаментальная область на (2), $F(A)=F(A,\ 1)$ — соответствующая ей $\Gamma(A)$-фундаментальная область на (1) ($F(A,\ n)$ получается проекцией $F(A)$ на (2) из начала координат). $F(A)$ является компактным многоугольником на поверхности гиперболоида (1). Ниже $h(-D)$ означает число собственно примитивных классов положительно определенных бинарных квадратичных форм $ax^2+2bxy+cy^2$ определителя $D=ac-b^2>0$. Далее, точка $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ называется примитивной, если о. н. д. $(x_1,\ x_2,\ x_3)=1$.

Т е о р е м а 3. *Для $Q'_f(n,\ F(A))$, числа целых примитивных точек в многоугольнике $F(A,\ n)$, имеет место формула*

$$Q'_f(n,\ F(A))=2^{-\nu(d)}h(-D)\,\rho_D, \tag{9}$$

где $D=nd>0$, $\nu(d)$ — количество нечетных простых делителей d, $\rho_D=\rho$ зависит от D (mod 8) и задается следующими условиями: $\rho=1/2$, если $D\equiv1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6$ (mod 8); $\rho=2$, если $D\equiv7$ (mod 8); если $D\equiv3$ (mod 8), то $\rho=1/3$, за исключением двух случаев, в которых $\rho=1$: i) инвариант Хассе $c_2(f)=1$; ii) $D=3$; $\rho=1/4$, если $D\equiv0$ (mod 8). Полное число целых точек в $F(A,\ n)$ равно

$$Q_f(n,\ F(A))=\sum_{t^2\mid n}Q'_f(n/t^2,\ F(A)). \tag{10}$$

При этом целая точка $\mathfrak{g}$, *являющаяся вершиной многоугольника* $F(A, n)$, *берется с весом* $1/E(A, \mathfrak{g})$, *где* $E(A, \mathfrak{g})$ — *порядок (конечной) группы* $\Gamma(A, \mathfrak{g}) = \{U \in \Gamma(A) \mid U\mathfrak{g} = \mathfrak{g}\}$.

Для доказательства теоремы 3 напомним, что вид $\Gamma(A)$-фундаментальной области для произвольного двуполостного гиперболоида изучали еще Клейн и Фрике [16], а в наше время — Б. А. Венков [17]. Тот факт, что форма f не является нуль-формой, гарантирует компактность фундаментальной области. Формула (9) доказывается непосредственным применением результатов Джонса ([18]; воспроизведено в [19]) либо использованием результатов Мааса [20] по вычислению коэффициентов Фурье тета-рядов, ассоциированных с неопределенными тернарными формами, и теоремы Зигеля [21]. Надо только учесть, что из-за бесквадратности d в роде формы f один класс; это следует из теоремы Мейера (см. [19]).

Формулы (9), (10) остаются справедливыми и в случае двуполостного гиперболоида, ассоциированного с тернарной нуль-формой из одноклассного рода; при этом фундаментальная область $F(A)$ будет некомпактной, образно говоря, она будет иметь бесконечные «рога» (см. по этому поводу [17]). Аналогичная ситуация возникла у Ю. В. Линника: рассмотренный им треугольник на поверхности (4) (область приведения положительно определенных бинарных квадратичных форм) имеет углы $\pi/3$, $\pi/3$, 0. Для применения теоремы 2 настоящей работы, в которой требуется ограниченность рассматриваемых областей, нужно «отрезать рога» у фундаментальной области $F(A)$, подобно тому как это делает в своем доказательстве Ю. В. Линник. Последнее, однако, требует дополнительных соображений, поэтому случай нуль-форм в настоящей работе не рассматривается. Следует заметить, что для целого класса тернарных нуль-форм Е. П. Голубева [6] выделила на однополостных и двуполостных гиперболоидах (1) конечные области Ω, для которых можно подсчитать асимптотику $Q(n, \Omega)$. При этом рассматриваются как одноклассные, так и многоклассные случаи. Отметим, что на однополостном гиперболоиде $f(x_1, x_2, x_3) = -n < 0$ группа $\Gamma(A)$ действует не дискретно и фундаментальная область не существует, поэтому формулы типа (9) нашим способом не получаются. Случай простейшего однополостного гиперболоида (5) рассмотрел Б. Ф. Скубенко. На поверхности (5) берем классическую область приведения Δ неопределенных бинарных квадратичных форм; пусть $T(\Delta)$ — число целых точек в области Δ. Доказав интересную «теорему о циклах», Б. Ф. Скубенко вывел асимптотику

$$\log T(\Delta) \sim {}^1/_2 \log n \quad (n \to \infty),$$

однако асимптотика самой величины $T(\Delta)$ до сих пор не получена. Правда, с помощью некоторого трудного предположения, связанного с гипотезой Ю. В. Линника о сумме сумм Клостермана, Л. А. Тахтаджян [22] доказал такую асимптотику.

Из теорем 2 и 3 непосредственно вытекает основная теорема 4. Следует только отметить, что выше мы рассматривали все целые точки на поверхности. Перенесение полученных результатов на примитивные точки не представляет трудностей.

Теорема 4. *Рассмотрим не нуль-форму*

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1^2 - a_2x_2^2 - a_3x_3^2,$$

где $a_i \in \mathbf{Z}$, $a_i > 0$ $(i=1, 2, 3)$, $d=a_1a_2a_3$ *бесквадратно. Пусть* $n > 0$ — *целое число*, $(n, 2d)=1$, *удовлетворяющее родовым условиям* f, Ω — *произвольная ограниченная квадрируемая область на* (1). *Тогда в обозначениях теоремы* 3 *имеем*

$$Q'_f(n, \Omega)=\frac{\omega(\Omega)}{\omega(F(A))}2^{-\nu(d)}h(-D)\rho_D+O\left(\frac{n^{1/2}L(1, \chi)}{\log^\theta n}\right), \tag{11}$$

$$Q_f(n, \Omega)=\frac{\omega(\Omega)}{\omega(F(A))}Q_f(n, F(A))+O\left(\frac{n^{1/2}L(1, \chi)}{\log^\theta n}\right); \tag{12}$$

здесь $\theta>0$, $D=nd$,

$$L(s, \chi)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-D}{k}\right)\frac{1}{k^s} \quad (\mathrm{Re}\, s>0),$$

выражение для $Q_f(n, F(A))$ *дается в* (9), (10).

3. В настоящем пункте будет доказана теорема 2. Сначала докажем две леммы.

Лемма 1. *Пусть* Ω — x_3-*область на поверхности* (1):

$$f(x_1, x_2, x_3)=1$$

(*где* $f(x_1, x_2, x_3)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 2) *такая, что*

$$0\leqslant c_1\leqslant x_3\leqslant c_2, \qquad 0\leqslant x_2/x_1\leqslant t_1,$$

где при некоторых постоянных A *и* B

$$c_1-c_2=t_2\leqslant At, \qquad t_1\leqslant Bt.$$

Пусть $\tilde{\Omega}$ — *наименьшая из* x_2-*областей, содержащих* Ω, $\tilde{\Omega}'$ — *произвольная область, эквивалентная* $\tilde{\Omega}$ *и такая, что для ее точек* $x_1\leqslant C$, C — *некоторая постоянная, и* $\tilde{\tilde{\Omega}}'$ — *наименьшая из* x_3-*областей, содержащих* $\tilde{\Omega}'$. *Тогда при* $t\to 0$

$$\omega(\Omega)=\frac{t_1t_2}{3a_1}+O(t^3), \tag{13}$$

$$\omega(\tilde{\Omega})=\omega(\tilde{\Omega}')=\omega(\Omega)+O(t^3), \tag{14}$$

$$\omega(\tilde{\tilde{\Omega}}')=\omega(\tilde{\Omega}')+O(t^3). \tag{15}$$

O-постоянные зависят от формы f *и* A, B, C.

Доказательство. Сделаем замену переменных

$$x_1=\frac{r}{\sqrt{a_1}}\operatorname{ch}\varphi\operatorname{ch}\theta, \qquad x_2=\frac{r}{\sqrt{a_2}}\operatorname{ch}\varphi\operatorname{sh}\theta, \qquad x_3=\frac{r}{\sqrt{a_3}}\operatorname{sh}\varphi.$$

Тогда

$$\omega(\Omega)=\frac{1}{\sqrt{d}}\int_0^1 r^2\,dr\int_{\operatorname{arsh}\sqrt{a_3}c_1}^{\operatorname{arsh}\sqrt{a_3}c_2}\operatorname{ch}\varphi\,d\varphi\int_0^{\operatorname{arth}\sqrt{a_2/a_1}t_1}d\theta=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{d}}\frac{1}{3}\sqrt{a_3}\,t_2\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}t_1+O(t^3)=\frac{t_1t_2}{3a_1}+O(t^3),$$

и равенство (13) доказано.

Область $\tilde{\Omega}$ определяется неравенствами

$$0\leqslant x_2\leqslant t_1\sqrt{\frac{1+a_3c_2^2}{a_1-a_2t_1^2}}=l_1,$$

$$m_1=\sqrt{\frac{(a_1-a_2t_1^2)\,c_1^2}{1+a_3c_1^2}}\leqslant\frac{x_3}{x_1}\leqslant\frac{\sqrt{a_1}\,c_2}{\sqrt{1+a_3c_2^2}}=m_2.$$

Сделаем замену переменных

$$x_1=\frac{r}{\sqrt{a_1}}\operatorname{ch}\varphi\operatorname{ch}\theta,\qquad x_2=\frac{r}{\sqrt{a_2}}\operatorname{sh}\varphi,\qquad x_3=\frac{r}{\sqrt{a_3}}\operatorname{ch}\varphi\operatorname{sh}\theta,$$

тогда

$$\omega(\Omega)=\frac{1}{\sqrt{d}}\int\limits_0^1 r^2\,\mathrm{d}r\int\limits_0^{\operatorname{arsh}\sqrt{a_2}\,l}\operatorname{ch}\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int\limits_{\operatorname{arth}m_2\sqrt{a_3/a_1}}^{\operatorname{arth}m_1\sqrt{a_3/a_1}}\mathrm{d}\theta=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{a_2}{d}}\,l\left(\operatorname{arth}m_1\sqrt{a_3/a_1}-\operatorname{arth}m_2\sqrt{a_3/a_1}\right)+O(t^3)=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{a_1a_3}}\,t_1\frac{\sqrt{1+a_3c_2^2}}{\sqrt{a_1}}\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}(m_2-m_1)\frac{1}{1-a_1c_2^2a_3/(1+a_3c_2^2)\,a_1}+O(t^3)=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{t_1\left(\sqrt{1+a_3c_2^2}\right)^3t_2\sqrt{a_1}\left(\sqrt{1+a_3c_2^2}-c_2^2a_3/\sqrt{1+a_3c_2^2}\right)}{a_1\sqrt{a_1}\,(1+a_3c_2^2)}+O(t^3)=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{t_1t_2}{a_1}+O(t^3).$$

Таким образом, равенство (14) доказано. Совершенно аналогично прямым вычислением получаем соотношение (15).

Лемма 2. *Пусть Ω_0 — область на поверхности* (1) (*где* $f(x_1, x_2, x_3)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 2), *задаваемая условием* $0<x_1\leqslant C$, *и* Ω — *произвольная x_3-область, для которой*

$$c_2-c_1=\log^{\xi}n,\qquad t_1\leqslant x_2/x_1\leqslant t_1+\log^{\xi}n, \tag{16}$$

где $\xi={}^2/_5\eta$, *а* η — *постоянная, фигурирующая в теореме* 1. *Тогда*

$$Q(n,\ \Omega)=\frac{\omega(\Omega)}{\omega(\Omega_0)}Q(n,\ \Omega_0)+O\left(\frac{n^{1/2}L(1,\ \chi)}{\log^{\eta}n}\right). \tag{17}$$

Доказательство. Обозначим $n^{1/2}L(1,\ \chi)/\log^{\eta}n=N$. В силу теоремы 1 существует постоянная A такая, что для любых эквивалентных областей $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$

$$-AN<Q(n,\ \Omega^{(1)})-Q(n,\ \Omega^{(2)})<AN. \tag{18}$$

Из теоремы 3 либо из результатов работы [12] следует, что

$$Q(n,\ \Omega_0)=O(n^{1/2}L(1,\ \chi)(\log\log n)^{\gamma}), \tag{19}$$

где $\gamma>0$ — постоянная и O-постоянная зависит от f, γ и C. Таким образом, для любой постоянной A_1 и достаточно больших n

$$A_1\frac{Q(n,\ \Omega_0)}{\log^{3\xi}n}\leqslant AN. \tag{20}$$

Докажем, что

$$-6AN<Q(n,\ \Omega)-\frac{\omega(\Omega)}{\omega(\Omega_0)}Q(n,\ \Omega_0)<6AN. \tag{21}$$

Предположим противное, тогда найдется сколь угодно большие n, для которых

$$Q(n,\ \Omega)-\frac{\omega(\Omega)}{\omega(\Omega_0)}Q(n,\ \Omega_0)>6AN, \tag{22}$$

или

$$Q(n, \mathfrak{Q}) - \frac{\omega(\mathfrak{Q})}{\omega(\mathfrak{Q}_0)} Q(n, \mathfrak{Q}_0) < -6AN. \tag{23}$$

Пусть имеет место неравенство (22). Рассмотрим область $\mathfrak{Q}'$, эквивалентную $\mathfrak{Q}$, для точек которой $0 \leqslant x_2/x_1 \leqslant t$, t — некоторая постоянная. Тогда в силу (18)

$$Q(n, \mathfrak{Q}') - \frac{\omega(\mathfrak{Q}')}{\omega(\mathfrak{Q}_0)} Q(n, \mathfrak{Q}_0) > 5AN.$$

Пусть $\tilde{\mathfrak{Q}}'$ — наименьшая из x_2-областей, содержащих $\mathfrak{Q}'$; тогда, очевидно,

$$Q(n, \tilde{\mathfrak{Q}}') \geqslant Q(n, \mathfrak{Q}').$$

В силу леммы 1

$$\omega(\tilde{\mathfrak{Q}}') = \omega(\mathfrak{Q}') + O\left(\frac{1}{\log^{3\xi} n}\right).$$

Поэтому для достаточно больших n из (20) получаем

$$Q(n, \tilde{\mathfrak{Q}}') - \frac{\omega(\tilde{\mathfrak{Q}}')}{\omega(\mathfrak{Q}_0)} Q(n, \mathfrak{Q}_0) > 5AN - A_1 \frac{Q(n, \mathfrak{Q}_0)}{\log^{3\xi} n} > 4AN.$$

Аналогично для произвольной области $\tilde{\mathfrak{Q}}''$, эквивалентной $\tilde{\mathfrak{Q}}'$,

$$Q(\tilde{\mathfrak{Q}}'') - \frac{\omega(\tilde{\mathfrak{Q}}'')}{\omega(\mathfrak{Q}_0)} Q(n, \mathfrak{Q}_0) > 3AN,$$

и для $\tilde{\tilde{\mathfrak{Q}}}''$, наименьшей из x_3-областей, содержащих $\tilde{\mathfrak{Q}}''$,

$$Q(n, \tilde{\tilde{\mathfrak{Q}}}'') - \frac{\omega(\tilde{\tilde{\mathfrak{Q}}}'')}{\omega(\mathfrak{Q}_0)} Q(n, \mathfrak{Q}_0) > 2AN.$$

Наконец, для произвольной области $\tilde{\tilde{\mathfrak{Q}}}'''$, эквивалентной $\tilde{\tilde{\mathfrak{Q}}}''$, справедливо неравенство

$$Q(n, \tilde{\tilde{\mathfrak{Q}}}''') - \frac{\omega(\tilde{\tilde{\mathfrak{Q}}}''')}{\omega(\mathfrak{Q}_0)} Q(n, \mathfrak{Q}_0) > AN. \tag{24}$$

Разобьем $\mathfrak{Q}_0$, кроме полосы вдоль границы ширины $O(\log^{\xi} n)$, на области $\mathfrak{Q}^{(k)}$ типа $\tilde{\tilde{\mathfrak{Q}}}'''$, пересекающиеся только по границам; их количество $K = D_1 \log^{2\xi} n$, где D_1 — некоторая постоянная.

Просуммируем (24) по $\mathfrak{Q}^{(k)}$, тогда

$$\sum_{k=1}^{K} \left(Q(n, \mathfrak{Q}^{(k)}) - \frac{\omega(\mathfrak{Q}^{(k)})}{\omega(\mathfrak{Q}_0)} Q(n, \mathfrak{Q}_0) \right) > D_1 \log^{2\xi} n \cdot AN.$$

Поскольку $\mathfrak{Q}^{(k)} \subset \mathfrak{Q}_0$,

$$Q(n, \mathfrak{Q}_0) \geqslant \sum_{k=1}^{K} Q(n, \mathfrak{Q}^{(k)}) + O(\log^{2\xi+1} n).$$

Кроме того, очевидно,

$$\sum_{k=1}^{K} \omega(\mathfrak{Q}^{(k)}) = \omega(\mathfrak{Q}_0) + O\left(\frac{\log^{\xi} n}{\log^{2\xi} n}\right).$$

Таким образом,

$$Q(n, \mathfrak{Q}_0) - Q(n, \mathfrak{Q}_0) > D_1 \log^{2\xi} n \cdot AN - E\,\frac{n^{1/2} L(1, \chi)(\log\log n)^{\gamma}}{\log^{\xi} n},$$

где E — некоторая постоянная. Поскольку $\xi = {}^2/_5\eta$, последнее неравенство не может иметь место для сколь угодно больших n и в этом случае лемма доказана.

Совершенно аналогично можно рассмотреть случай неравенства (23).

Доказательство теоремы. Разобьем область Ω_0 на области $\Omega^{(k)}$ типа (16). В силу леммы 2

$$Q(n, \Omega^{(k)}) = \frac{\omega(\Omega^{(k)})}{\omega(\Omega_0)} Q(n, \Omega_0) + O\left(\frac{n^{1/2}L(1, \chi)}{\log^{\eta} n}\right). \qquad (25)$$

Просуммируем равенство (24) по областям $\Omega^{(k)}$, пересекающимся с Ω_1, тогда

$$Q(n, \Omega_1) = \frac{\omega(\Omega_1)}{\omega(\Omega_0)} Q(n, \Omega_0) + O\left(\frac{n^{1/2}L(1, \chi)}{\log^{\eta} n} \cdot \log^{2\xi} n\right) + O\left(\sum_{\Omega^{(k)}}{}' \frac{1}{\log^{2\xi} n} Q(n, \Omega_0)\right),$$

где суммирование в $\sum'$ ведется по областям $\Omega^{(k)}$ вдоль границы Ω_1. Следовательно, $\sum'$ содержит $O(\log^{\xi} n)$ слагаемых и в силу леммы 2

$$Q(n, \Omega_1) = \frac{\omega(\Omega_1)}{\omega(\Omega_0)} Q(n, \Omega_0) + O\left(\frac{n^{1/2}L(1, \chi)}{\log^{1/5\eta} n}\right) + O\left(\frac{Q(n, \Omega_0)}{\log^{2/5\eta} n}\right) =$$

$$= \frac{\omega(\Omega_1)}{\omega(\Omega_0)} Q(n, \Omega_0) + O\left(\frac{n^{1/2}L(1, \chi)}{\log^{1/5\eta} n}\right). \qquad (26)$$

Точно так же

$$Q(n, \Omega_2) = \frac{\omega(\Omega_2)}{\omega(\Omega_0)} Q(n, \Omega_0) + O\left(\frac{n^{1/2}L(1, \chi)}{\log^{1/5\eta} n}\right). \qquad (27)$$

Сравнивая равенства (26) и (27), получаем утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Линник Ю. В.* Избр. труды. Теория чисел. Эргодический метод и L-функции. Л.: Наука, 1979.
2. *Линник Ю. В., Малышев А. В.* Приложения арифметики кватернионов к теории тернарных квадратичных форм и к разложению чисел на кубы. — УМН, 1953, 8, вып. 5, с. 3—71.
3. *Линник Ю. В.* Асимптотико-геометрические и эргодические свойства множества целых точек на сфере. — Мат. сб., 1957, **43**, вып. 2, с. 257—276.
4. *Линник Ю. В.* Эргодические свойства алгебраических полей. Л.: Изд-во ЛГУ, 1967.
5. *Малышев А. В.* О представлении целых чисел положительными квадратичными формами. — Труды МИАН СССР, 1962, **65**, с. 1—212.
6. *Голубева Е. П.* О представлении больших чисел тернарными квадратичными формами. — ДАН СССР, 1970, **191**, № 3, с. 519—521.
7. *Голубева Е. П.* Асимптотика числа целых точек на некоторых эллипсоидах. — Мат. заметки, 1972, **11**, № 6, с. 625—634.
8. *Голубева Е. П.* Асимптотика числа представлений больших чисел некоторыми тернарными положительными квадратичными формами. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР, 1978, **76**, с. 53—59.
9. *Линник Ю. В.* Асимптотическое распределение приведенных бинарных квадратичных форм в связи с геометрией Лобачевского. — Вестн. ЛГУ. Сер. мат., физ., хим., 1955, № 2, вып. 1, с. 3—23; № 5, вып. 2, с. 3—32; № 8, вып. 3, с. 15—27.
10. *Пачев У. М.* О распределении целых точек на некоторых двуполостных гиперболоидах. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР, 1980, **93**, с. 87—141.
11. *Скубенко Б. Ф.* Асимптотическое распределение целых точек на однополостном гиперболоиде и эргодические теоремы. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1962, **26**, № 5, с. 721—752.
12. *Барбан М. Б., Вехов П. П.* Суммирование мультипликативных функций от полиномов. — Мат. заметки, 1969, 5, № 6, с. 669—680.
13. *Линник Ю. В., Бредихин Б. Н.* Асимптотика и эргодические свойства решений обобщенного уравнения Харди—Литтлвуда. — Мат. сб., 1966, **71**, № 2, с. 145—161.
14. *Линник Ю. В.* Избр. труды. Теория чисел. L-функции и дисперсионный метод. Л.: Наука, 1980.
15. *Виноградов А. И.* Общее уравнение Харди—Литтлвуда. — Мат. заметки, 1967, 1, № 2, с. 189—197.

16. *Fricke R.*, *Klein F.* Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. N. Y., 1965, Bd. 1.
17. *Венков Б. А.* О фундаментальной области неопределенной тройничной квадратичной формы. — Учен. зап. ЛГПИ. Физ.-мат. фак., 1955, 14, вып. 1, с. 16—45.
18. *Jones B. W.* Representations by quadratic forms. — Ann. Math., 1949, 50, N 4, p. 884—899.
19. *Jones B. W.* The arithmetic theory of quadratic forms. Baltimore: Wiley, 1950.
20. *Maass H.* Über die räumliche Verteilung der Punkte in Gittern mit indefiniter Metrik. — Math. Ann., 1959, 138, N 4, S. 287—315.
21. *Ramanathan K. G.* On the analytic theory of quadratic forms. — Acta arithm., 1972, 21, s. 423—436.
22. *Тахтаджян Л. А.* Асимптотическая формула для сумм длин периодов квадратичных иррациональностей дискриминанта D. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР, 1979, 91, с. 134—144.