В. П. Ильин, О некоторых свойствах функций из пространства $W^l_{p,a,x}(G)$, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1971, том 23, 33–40

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ $W_{p,a,\varkappa}^{\ell}(G)$

В.П.Ильин

Рассматриваемые в настоящей заметке функциональные пространства $W_{p,a,\varkappa}^{\ell}(G)$ состоят из функций f, входящих в соответствующие анизотропные пространства $W_p^{\ell}(G)$ С.Л.Соболева и характеризующихся, грубо говоря, тем, что для интегралов от p-ых степеней производных $\frac{\partial^{\ell_i} f}{\partial x_i^{\ell_i}}$ $(i=1,\dots,n)$, $\ell=(\ell_1,\dots,\ell_n)$, по некоторым подобластям G' основной области G имеют место оценки, зависящие от меры G' (определяемые скалярным параметром a и векторным параметром $\varkappa$).

Подобные функциональные пространства, построенные на базе изотропных пространств $W_p^{(\ell)}(G)$ С.Л.Соболева, при некоторых частных значениях индексов впервые изучались в работах ([1],[2], [3]) Морри. Затем его результаты обобщались и развивались в работах Греко [4] Ниренберга[5], В.П.Ильина[6],Кампанато[7],[8]. Рассматривавшиеся в этих работах пространства в наших обозначениях соответствуют пространствам $W_{p,a,\mathbf{1}}^{(\ell)}(G)$, $\mathbf{1}=(1,\dots,1)$. Более общие пространства $W_{p,a,\varkappa}^{(\ell)}(G)$, $\varkappa \geqslant \mathbf{1}$, изучались в работе[9]Барощи.

В этой заметке мы приведем некоторые результаты, касающиеся свойств функций из пространств $W_{p,a,\varkappa}^{\ell}(G)$. Но сначала введем пространства $L_{p,a,\varkappa}(G)$ и сформулируем ряд их свойств. Они играют здесь такую же роль, какую играют пространства $L_p(G)$ в теории пространств $W_p^{(\ell)}(G)$.

I. Пространства $L_{p,a,\varkappa}(G)$. Пусть G – область эвклидова пространства E^n, $v>0$, $\varkappa=(\varkappa_1,\dots,\varkappa_n)$, $\varkappa_j>0$ $(j=1,\dots,n)$, $v^{\varkappa}=(v^{\varkappa_1},\dots,v^{\varkappa_n})$.

Положим для любого $x\in E^n$

$$I_{v^{\varkappa}}(x)=\left\{y:|y_j-x_j|<\tfrac{1}{2}v^{\varkappa_j}\ (j=1,\dots,n)\right\},$$

$$G_{v^{\varkappa}}(x)=G\cap I_{v^{\varkappa}}(x)$$

Очевидно,

$$\operatorname{mes} G_{v^{\varkappa}}(x)\leqslant \operatorname{mes} I_{v^{\varkappa}}(x)=v^{|\varkappa|},\qquad |\varkappa|=\sum_{j=1}^{n}\varkappa_j.$$

Введем еще следующее обозначение:

$$[v]_1=\min\{v,1\}.$$

Пусть заданы числа p и a, $1 \leqslant p < \infty$, $0 \leqslant a \leqslant 1$, а также вектор $\varkappa = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n)$ с положительными координатами.

Будем говорить, что измеримая на G функция $f(x)$ принадлежит множеству $L_{p,a,\varkappa}(G)$, если существует константа M_f такая, что

$$\int_{G_{v\varkappa}(x)} |f(y)|^p dy \leqslant M_f [v]_1^{|\varkappa| a}$$

для любого $x \in G$ и любого v, $0 < v < \infty$.

На множестве $L_{p,a,\varkappa}(G)$ введем норму, полагая

$$\|f\|_{L_{p,a,\varkappa}(G)} = \|f\|_{p,a,\varkappa;G} = \sup_{x \in G,\ 0 < v < \infty} \left([v]_1^{-\frac{|\varkappa|}{p} a} \|f\|_{p, G_{v\varkappa}(x)} \right), \qquad (1)$$

где, как обычно,

$$\|f\|_{p,G} = \|f\|_{L_p(G)} = \left[\int_G |f(y)|^p dy \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Заметим, что пространства $L_{p,a,1}(G)$ $(\equiv L_{p,\lambda}(G),\ \lambda = an)$, известны как пространства Морри. Пространства близкие к $L_{p,a\varkappa}(G)$, но при $\varkappa_i \geqslant 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, рассматривались Бароцци [9].

Отметим ряд свойств нормированного пространства $L_{p,a,\varkappa}(G)$.

1) П р о с т р а н с т в о $L_{p,a,\varkappa}(G)$ я в л я е т с я п о л н ы м. Для пространств $L_{p,a,1}(G)$ доказательство приведено в работе [7]. В общем случае – аналогичное.

2) $L_{p,a,\varkappa}(G) \subset L_p(G)$ и

$$\|f\|_{p,G} \leqslant \|f\|_{p,a,\varkappa;G} \qquad (2)$$

п р и л ю б ы х $\varkappa > 0$[*)] $(\varkappa_i > 0$ $i = 1, \ldots, n)$ и $0 \leqslant a \leqslant 1$.

3) Д л я л ю б о г о в е щ е с т в е н н о г о ч и с л а $c > 0$

$$\|f\|_{p,a,c\varkappa;G} = \|f\|_{p,a,\varkappa;G}. \qquad (3)$$

Свойства 2) и 3) непосредственно вытекают из (1).

4) П р и л ю б о м $\varkappa > \mathbf{0}$ с п р а в е д л и в ы с о о т н о ш е н и я:

а)

$$\|f\|_{p,0,\varkappa;G} = \|f\|_{p,G};$$

б) е с л и $p > 1$, т о

$$\|f\|_{p,1,\varkappa;G} \geqslant \|f\|_{\infty,G}.$$

Утверждение а) очевидно. Для доказательства б) заметим, что на основании известной теоремы о дифференцировании кратных интегралов (см, например, [10])

$$\lim_{v \to 0} \frac{1}{\operatorname{mes} I_{v\varkappa}(x)} \int_{G_{v\varkappa}(x)} |f(y)| dy = |f(x)| \qquad (4)$$

---

*) $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$.

почти для всех $x \in G$. Полагая теперь в неравенстве $(0 < v \leqslant 1)$:

$$\frac{1}{mes\, I_{v^{æ}}(x)} \int\limits_{G_{v^{æ}}(x)} |f(y)|dy \leqslant \|f\|_{p,a,æ;G}\, v^{\frac{|æ|}{p}(a-1)} \qquad (5)$$

$a=1$ и переходя в нём к пределу при $v \to 0$, получаем требуемое.

Из сопоставления (4) и (5) следует также, что пространство $L_{p,1+\varepsilon,æ}(G)$, $\varepsilon > 0$, состоит из функций, эквивалентных нулю на G .

5) Если G - ограниченная область, $p \leqslant q$, $\frac{1-b}{q} \leqslant \frac{1-a}{p}$, то $L_{q,b,æ}(G) \subset L_{p,a,æ}(G)$.

Утверждение вытекает из элементарно устанавливаемого неравенства для норм.

6) Если область G представляет собой теоретико-множественную сумму открытых множеств $G_k (k=1,\dots,K)$, $G=\bigcup\limits_{k=1}^{K} G_k$, то

$$\|f\|_{p,a,æ;G} \leqslant 2^n \sum_{k=1}^{K} \|f\|_{p,a,æ;G_k} .$$

Это свойство также легко следует из определения нормы в $L_{p,a,æ}(G)$.

2. <u>Пространства $W_{p,a,æ}^{\ell}(G)$</u> . Пусть G - область E^n, $\ell=(\ell_1,\dots,\ell_n)$ - вектор с натуральными компонентами, $1 \leqslant p < \infty$, $0 \leqslant a \leqslant 1$, $æ=(æ_1,\dots,æ_n)$, $æ_i > 0$ $(i=1,\dots,n)$.

Обозначим через $W_{p,a,æ}(G)$ пространство локально суммируемых на G функций f , имеющих на G обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные $\mathcal{D}_i^{\ell_i} f = \frac{\partial^{\ell_i} f}{\partial x_i^{\ell_i}}$ $(i=1,\dots,n)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{W_{p,a,æ}^{\ell}(G)} = \|f\|_{L_{p,a,æ}(G)} + \sum_{i=1}^{n} \|\mathcal{D}_i^{\ell_i} f\|_{L_{p,a,æ}(G)} .$$

В силу неравенства (2) $W_{p,a,æ}(G) \subset W_p^{\ell}(G)$ и

$$\|f\|_{W_p^{\ell}(G)} \leqslant \|f\|_{W_{p,a,æ}^{\ell}(G)} .$$

Из полноты пространств $W_p^{\ell}(G)$ и $L_{p,a,æ}(G)$ легко следует, что пространства $W_{p,a,æ}^{\ell}(G)$ также являются полными.

На основании равенства (3) мы заключаем, что при любом $c > 0$

$$\|f\|_{W_{p,a,cæ}^{\ell}(G)} = \|f\|_{W_{p,a,æ}^{\ell}(G)}$$

Отметим также, что в силу 4а) и 4б)

$$\|f\|_{W_p^{\ell}(G)} = \|f\|_{W_{p,0,\varkappa}^{\ell}(G)}, \quad \|f\|_{W_\infty^{\ell}(G)} \leqslant \|f\|_{W_{p,1,\varkappa}^{\ell}(G)}.$$

3. <u>Классы областей G</u>. Пусть $\ell=(\ell_1,\dots,\ell_n)$ – вектор с положительными координатами, $0<h<\infty$, $\varepsilon>0$, $a_i \neq 0$ $(i=1,\dots,n)$. Назовем ℓ -рогом (радиуса h и раствора ε) тело

$$V(\ell)=V=\bigcup_{0<v\leq h}\left\{x: \frac{x_i}{a_i}>0,\ v<\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{\ell_i}<(1+\varepsilon)v,\ i=1,\dots,n\right\}. \tag{6}$$

Пусть для области $G\subset E^n$ существует конечное число K открытых множеств G_k и ℓ -рогов $V_k(\ell)$ вида (6), так что при этом

$$G=\bigcup_{k=1}^{K} G_k=\bigcup_{k=1}^{K}(G_k+V_k(\ell)) \tag{7}$$

где G_k+V_k – векторная сумма множеств G_k и V_k.

Будем говорить в таком случае, что о б л а с т ь G у д о в л е т в о р я е т с л а б о м у у с л о в и ю ℓ - р о г а и п и с а т ь $G\in \underline{A}(\ell,h)$.

Будем говорить, что о б л а с т ь G у д о в л е т в о р я е т у с л о в и ю ℓ - р о г а и п и с а т ь $G\in A(\ell,h)$, если для G выполнено условие (7) и

$$G=\bigcup_{k=1}^{K} G_k^{(\sigma)} \qquad \text{при некотором } \sigma>0,$$

где

$$G_k^{(\sigma)}=\{x: x\in G_k,\quad \rho(x,\partial G_k \mid \partial G)>\sigma\},$$

∂G – граница G, ∂G_k – граница G_k.

В случае $\ell_1=\dots=\ell_n$ ℓ -рог $V(\ell)$ является конусом, и мы будем говорить, что G удовлетворяет условию конуса или, соответственно, слабому условию конуса.

4. <u>Основные результаты</u>. Приведем теперь две теоремы о свойствах функций из пространств $W_{p,\alpha,\varkappa}^{\ell}(G)$. Мы здесь не даем доказательств этих теорем, но заметим, что для этой цели можно воспользоваться известными интегральными представлениями функций из $W_p^{\ell}(G)$. При этом методика доказательства в существенных чертах повторяет методику доказательства аналогичных теорем для пространств $W_p^{\ell}(G)$.

Если $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $l=(l_1,\dots,l_n)$, то положим

$$|\alpha:l|=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{l_i} .$$

4.I. Теорема. Пусть область G удовлетворяет слабому условию l-рога, $f\in W^{l}_{p,a,\varkappa}(G)$, $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$, $\bar\varkappa=c\varkappa$, где $\frac{1}{c}=\max\limits_{i=1,\dots,n} l_i\varkappa_i$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ ($0\leqslant\alpha_i$ - целые ($i=1,\dots,n$)),

$$\begin{aligned}&\delta=1-|\alpha:l|-(|1:l|-|\bar\varkappa|a)\left(\tfrac{1}{p}-\tfrac{1}{q}\right)>0,\\ &\delta_0=1-|\alpha:l|-(|1:l|-|\bar\varkappa|a)\tfrac{1}{p}.\end{aligned} \tag{8}$$

Тогда в области G существует обобщенная производная $\mathcal{D}^\alpha f$, для которой справедливы неравенства:

$$\|\mathcal{D}^\alpha f\|_{q,G}\leqslant C_1\Big(h^{\delta-1}\|f\|_{p,a,\varkappa;G}+h^{\delta}\sum_{i=1}^{n}\|\mathcal{D}_i^{l_i}f\|_{p,a,\varkappa;G}\Big), \tag{9}$$

$$\|\mathcal{D}^\alpha f\|_{q,b,\varkappa;G}\leqslant C_2\|f\|_{W^{l}_{p,a,\varkappa}(G)}\ (p\leqslant q<\infty), \tag{10}$$

где h - произвольное число из $(0,\min\{1,H\})$, b - любое число, удовлетворяющее условиям:

$0\leqslant b\leqslant 1$, если $\delta_0>0$

$0\leqslant b<1$, если $\delta_0=0$

$0\leqslant b<1+\dfrac{\delta_0 q(1-a)}{|1:l|-|\bar\varkappa|a}=a+\dfrac{\delta q(1-a)}{|1:l|-|\bar\varkappa|a}$, если $\delta_0<0$,

C_1 и C_2 - константы, не зависящие от f, причем C_1 не зависит также от h.

В частности, если $\delta_0>0$, то $\mathcal{D}^\alpha f$ непрерывна на G и

$$\sup_{x\in G}|\mathcal{D}^\alpha f(x)|\leqslant C_1\Big(h^{\delta_0-1}\|f\|_{p,a,\varkappa;G}+h^{\delta_0}\sum_{i=1}^{n}\|\mathcal{D}_i^{l_i}f\|_{p,a,\varkappa;G}\Big).$$

Пусть t - n-мерный вектор, $\Delta(t)\varphi(x)=\varphi(x+t)-\varphi(x)$.

Положим

$$\Delta(t;G)\varphi(x)=\Delta(t)\varphi(x),$$

если точки x и $x+t$ содержатся в области G вместе с соединяющим их отрезком,

$$\Delta(t;G)\varphi(x)=0$$

- в противном случае.

4.2. Теорема. Пусть область G удовлетворяет условию ℓ-рога, функция f и параметры $p,q,\varkappa,\alpha,\delta,\delta_0$ удовлетворяют условиям теоремы 4.I.

Тогда при $\delta>0$ производная $\mathcal{D}^{\alpha}f$ удовлетворяет на G условию Гельдера в метрике L_q, точнее

$$\|\Delta(t;G)\mathcal{D}^{\alpha}f\|_{q,G}\leqslant C\|f\|_{W^{\ell}_{p,a,\varkappa}(G)}\cdot|t|^{\varepsilon} \qquad \text{(II)}$$

где ε - любое число, удовлетворяющее неравенствам:

$0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$, если $\delta\ell_0>1$

$0\leqslant\varepsilon<1$, если $\delta\ell_0=1$

$0\leqslant\varepsilon\leqslant\delta\ell_0$, если $\delta\ell_0<1$

$\ell_0=\min\limits_{i=1,\dots,n}\ell_i$, C - константа, не зависящая от f и $|t|$.

В частности, если $\delta_0>0$, то

$$\sup_{x\in G}|\Delta(t;G)\mathcal{D}^{\alpha}f(x)|\leqslant C\|f\|_{W^{\ell}_{p,a,\varkappa}(G)}\cdot|t|^{\varepsilon_0},$$

где ε_0 удовлетворяет тем же условиям, что и ε, но с заменой δ на δ_0.

Замечание. Если в предыдущих теоремах условие ℓ-рога относительно области G заменить условием s-рога, $s=(s_1,\dots,s_n)$, точнее, если предположить, что $f\in W^{\ell}_{p,a,\varkappa}(G)$, а $G\in \underline{A}(s,H)$ или, соответственно, $G\in A(s,H)$, то основное условие (8), гарантирующее справедливость неравенств (9) -(II), примет вид

$$\delta=\min_{i=1,\dots,n}\frac{\ell_i}{s_i}-|\alpha:s|-[\,|1:s|-|\varkappa|(\frac{1}{\max\limits_i s_i\varkappa_i})a](\frac{1}{p}-\frac{1}{q})>0. \qquad (8')$$

При этом в неравенствах, определяющих границы возможных значений параметров ℓ и ε , всюду ℓ нужно заменить на s .

Заметим еще, что для пространств $W^{(\ell)}_{p,\alpha,\varkappa}(G)$, ℓ – натуральное число, норма в которых определяется равенством

$$\|f\|_{W^{(\ell)}_{p,\alpha,\varkappa}(G)}=\|f\|_{p,\alpha,\varkappa;G}+\sum_{|\beta|=\ell}\|\mathcal{D}^{\beta}f\|_{p,\alpha,\varkappa;G} ,$$

результаты типа теорем 4.I и 4.2 имеют место в той же формулировке, что и для пространств $W^{\ell_1}_{p,\alpha,\varkappa}(G)$, $\ell_1=(\ell,\dots,\ell)$, если область G удовлетворяет слабому условию конуса (условию конуса). Если же $G\in \underline{A}(s,H)$ (соответственно, $G\in A(s,H)$) то вместо ($8'$) должно выполняться более слабое условие

$$\delta=\frac{\ell-|\kappa|}{\max\limits_i s_i}-\Big[|1:s|-|\varkappa|\big(\frac{1}{\max\limits_i s_i\varkappa_i}\big)a\Big]\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)>0 .$$

Наконец, отметим, что результаты типа теорем 4.I и 4.2 для пространств $W^{(l)}_{p,\alpha,1}(G)$ при условии, что $G\in\underline{A}(1,H)$ (соответственно, $G\in A(1,H)$) получены в работах [I] – [8] , а для пространств $W^{(\ell)}_{p,\alpha,\varkappa}(G)$, $\varkappa\geqslant 1$, при условии, что $G\in\underline{A}(\frac{1}{\varkappa},H)(G\in A(\frac{1}{\varkappa},H))$ – в работе [9] .

Литература.

1. Morrey C.B. Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics. Univ. of California Publ., 1943, 1.

2. Morrey C.B. Second order elliptic systems of differential equations, Ann. of Math. Studies. Princeton Univ. Press., 1954, № 3.

3. Morrey C.B. Second order elliptic equations in several variables and Hölder continuity, Math. Zeit., 1959, 72.

4. Greco D. Criteri di compattezza per insieme di funzioni in „n" variabili independenti, Ricerche di Matem. Napoli, 1952, 1, 124–144.

5. Nirenberg L. Estimates and Existence of Solutions of Elliptic Equations, Comm.Pure Appl.Math., 1956, 9, №3, 509–530.

6. Ильин В.П. К теоремам вложения, Труды МИАН, I959, 53, 359–386.

7. Campanato S. Caratterizzatione delle tracce di funzioni appartenenti ad una classe di Morrey insieme con le loro derivate prime, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, s.III, 1961, 15, fasc.3, 263-281.

8. Campanato S. Proprietá di inclusione per Spazi di Morrey. Ricerche di Matem., 1963, 12, fasc.1, 67-86.

9. Barozzi G.C. Su una generalizzazione degli spazi $L^{(q,\lambda)}$ di Morrey, Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa, s. III, 1965, 19, fasc.4, 609-626.

10. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т.II, изд."Мир", Москва, 1965.