Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

С. Я. Альпер, О приближении функций, аналитических на совершенных множествах, многочленами с целыми коэффициентами,
Изв. вузов. Матем., 1972, номер 2, 11–15

https://www.mathnet.ru/ivm4001

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.85
9 декабря 2025 г., 13:41:39

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1972 МАТЕМАТИКА № 2 (117)

УДК 517.535

С. Я. Альпер

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ НА СОВЕРШЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ, МНОГОЧЛЕНАМИ С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть E — ограниченное совершенное множество с конечносвязным дополнением K. Известно, что однозначность и локальная аналитичность функции $f(z)$ на E являются необходимыми и достаточными условиями для возможности приближения $f(z)$ на E многочленами степени $\leqslant n$ со скоростью геометрической прогрессии, т. е. для существования при каждом $n=0, 1, 2, \ldots$ такого многочлена $p_n(z)$ степени $\leqslant n$, чтобы для всех n выполнялось неравенство ([1], §§ 4.5, 4.6)

$$|f(z)-p_n(z)|<Cq^n, \tag{1}$$

где q — некоторое число, $0<q<1$, и постоянная C не зависит от n и z.

Мы рассмотрим вопрос о возможности приближения $f(z)$ со скоростью геометрической прогрессии многочленами, коэффициенты которых представляют целые алгебраические числа из мнимого квадратичного поля $P(\eta)$, порожденного уравнением $\eta^2+a\eta+b=0$, где a и b — целые рациональные числа и $a^2-4b<0$.

Для возможности сколь угодно точного приближения непрерывной функции на замкнутом и ограниченном множестве E^* многочленами с целыми коэффициентами из поля $P(\eta)$, необходимо, как показал М. Фекете, чтобы трансфинитный диаметр $\tau(E^*)$ множества E^* был меньше 1. Мы будем дальше предполагать, что это условие для множества E^* выполняется.

Алгебраическим ядром $N=N(E^*, P(\eta))$ замкнутого и ограниченного множества E^* по отношению к полю $P(\eta)$ называется подмножество множества E^*, образованное корнями каждого уравнения $z^m+l_1z^{m-1}+\ldots+l_m=0$ с целыми алгебраическими коэффициентами из $P(\eta)$, которое неприводимо в этом поле и все корни которого принадлежат E^*. М. Фекете доказал, что в случае $\tau(E^*)<1$ ядро N либо пусто, либо состоит из конечного числа точек, принадлежащих E^*. Он доказал также, что в случае замкнутого ограниченного множества E^* с условием $\tau(E^*)<1$ существует такой многочлен $r(z)=z^\lambda+r_1z^{\lambda-1}+\ldots+r_\lambda$ с целыми коэффициентами из поля $P(\eta)$, что $|r(z)|<1$ для $z\in E^*$. Ссылки на статьи Фекете приведены в работе [2]. Отметим еще, что все точки ядра $N(E^*, P(\eta))$ являются корнями многочлена $r(z)$.

Пусть $\rho_0 > 1$ — такое близкое к 1 число, что линия уровня Γ_{ρ_0} функции Грина с полюсом на бесконечности для области K, дополнительной к совершенному ограниченному множеству E с конечносвязным дополнением и условием $\tau(E) < 1$, состоит из конечного числа замкнутых аналитических кривых Жордана без общих точек, каждая из которых содержит внутри одну из связных компонент множества E, а $f(z)$ остается аналитической функцией внутри и на Γ_{ρ_0}. Пусть $\tilde{E}$ обозначает совершенное множество, состоящее из кривых Γ_{ρ_0} и ограничиваемых ими внутренних областей, $\tilde{E} \supset E$. При достаточной близости ρ_0 к 1 будем иметь для указанного ранее многочлена $r(z)$ с условием $|r(z)| < 1$ на E неравенство $|r(z)| < 1$ на $\tilde{E}$, и корни $r(z)$, не входящие в E, не будут входить и в $\tilde{E}$. Таким образом, $N(E, P(\eta)) = N(\tilde{E}, P(\eta))$.

Многочлен $r(z)$ можно представить в виде произведения многочленов с целыми коэффициентами из $P(\eta)$ и старшими коэффициентами, равными 1, $r(z) = s_1(z) s_2(z) s_3(z)$, для которых выполняются следующие условия: 1) $s_1(z)$ — неприводимый многочлен в поле $P(\eta)$, все корни которого принадлежат ядру N, или произведение таких многочленов; 2) $s_2(z)$ — неприводимый многочлен в поле $P(\eta)$, среди корней которого имеются точки, принадлежащие множеству E, и точки, не принадлежащие E, или произведение таких многочленов; 3) $s_3(z)$ — многочлен, все корни которого не принадлежат E. Множество всех корней многочлена $s_1(z)$ образует, согласно определению, введенному в [2], внутреннее ядро $N_0 = N_0(\tilde{E}, P(\eta))$ множества $\tilde{E}$.

Мы будем считать дальше, что $s_2(z) \equiv 1$; другими словами, мы предполагаем, что многочлен $r(z)$ с требуемыми свойствами можно выбрать для множества E так, чтобы выполнялось условие

$$r(z) = s_1(z) s_3(z). \tag{2}$$

Такое предположение осуществляется, например, в случае, когда совершенное множество E, лежащее внутри области, ограниченной лемнискатой $|r(z)| = 1$, содержит все корни многочлена $r(z)$. Обозначим через $z_1, z_2, \ldots, z_k$ все точки ядра $N = N(E, P(\eta))$.

Теорема 1. *Пусть E — ограниченное совершенное множество с условием $\tau(E) < 1$ и с конечно-связным дополнением, и пусть выполняется условие* (2). *Для того чтобы для функции $f(z)$, определенной на E и отличной от многочлена с целыми коэффициентами из $P(\eta)$, при каждом $n = 0, 1, 2, \ldots$ существовал многочлен $p_n(z)$ степени $\leqslant n$, коэффициенты которого являются целыми числами из поля $P(\eta)$, удовлетворяющий на E условию* (1) *при некотором q, $0 < q < 1$, необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ была однозначной и локально-аналитической функцией на E и чтобы при каждом натуральном p многочлен $S(z)$ степени $\leqslant kp - 1$, удовлетворяющий интерполяционным условиям*

$$S^{(\nu)}(z_j) = f^{(\nu)}(z_j) \quad (\nu = 0, 1, \ldots, p-1;\ j = 1, 2, \ldots, k), \tag{3}$$

имел в качестве всех своих коэффициентов целые числа из $P(\eta)$.

Доказательство. Необходимость. Аналитичность $f(z)$ на E, как уже было отмечено, вытекает из условия (1) на основании известной теоремы. Из неравенства (1) и условия теоремы следует

([1], § 4.7) оценка $|f(z)-p_n(z)|<C_1(q\rho)^n$ на линии уровня Γ_ρ функции Грина для области K, где ρ выбрано так, что $1<\rho\leqslant\rho_0$ и $q\rho<1$. Таким образом, последовательность многочленов $p_n(z)$ с целыми коэффициентами из $P(\eta)$ сходится равномерно к $f(z)$ на и внутри линии уровня Γ_ρ. Отсюда, в силу теоремы 1 из работы [2], следует, что интерполяционные многочлены $S(z)$, удовлетворяющие условиям (3), имеют в качестве всех своих коэффициентов целые числа из $P(\eta)$.

Достаточность. Пусть σ обозначает наибольшую из кратностей корней $z_1, z_2, \ldots, z_k$ многочлена $r(z)$. В дальнейшем число μ предполагается фиксированным с условием $0<\mu<1$.

Интерполяционный многочлен $S_n(z)$, определяемый равенством $S_n^{(\nu)}(z_j)=f^{(\nu)}(z_j)$ $(\nu=0, 1, \ldots, \sigma[n\mu]-1;\ j=1, 2, \ldots, k)$, степень которого $\leqslant k\sigma[n\mu]-1$, имеет согласно условию теоремы своими коэффициентами целые числа из $P(\eta)$ при любом таком натуральном n, что $[n\mu]\geqslant 1$; $[\alpha]$ обозначает как обычно целую часть числа $\alpha\geqslant 0$. Пусть $\omega(z)=\prod\limits_{j=1}^{k}(z-z_j)$.

Согласно формуле Эрмита для функций $\varphi_n(z)=f(z)-S_n(z)$ и z внутри Γ_R имеем

$$\varphi_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\left[\frac{\omega(z)}{\omega(\zeta)}\right]^{\sigma[n\mu]}d\zeta, \tag{4}$$

где $R>\rho_0>1$ выбрано так, что $f(z)$ остается еще аналитической на и внутри линии уровня Γ_R, которая состоит из конечного числа внешних друг к другу замкнутых аналитических кривых Жордана. Пусть $M=\max\limits_{\Gamma_R}|f(\zeta)|$, $\beta=\max\limits_{\Gamma_{\rho_0}}|\omega(z)|$, $\alpha=\min\limits_{\Gamma_R}|\omega(\zeta)|$; тогда

$$|\varphi_n(z)|\leqslant MA(\beta/\alpha)^{\sigma[n\mu]},\quad z\in\Gamma_{\rho_0}, \tag{5}$$

и постоянная A зависит только от множества E и чисел R и ρ_0. На выбор числа $R(R>\rho_0)$ мы еще наложим требование, чтобы корни многочлена $r(z)$, отличные от точек ядра $N(E, P(\eta))$, находились в области, внешней к Γ_R. Образуем теперь функцию

$$\psi_n(z)=\varphi_n(z)/(r(z))^{[n\mu]}. \tag{6}$$

Пусть $\alpha_0=\min\limits_{\Gamma_{\rho_0}}|r(z)|$; на линии Γ_{ρ_0} при $\tau=\beta(\alpha\alpha_0^{1/\sigma})^{-1}$ имеем

$$|\psi_n(z)|\leqslant MA\tau^{\sigma[n\mu]}. \tag{7}$$

При всех достаточно больших n можно определить для функции $\psi_n(z)$ интерполяционный многочлен $P_n^{(n)}(z)$ степени $\leqslant n$ так, как это сделано в [1] (с. 100—101); положив $R'=\rho_0$, $R=q_0$ $(\rho_0>q_0>1)$ и выбрав числа R_1 и R_2, удовлетворяющие тем же неравенствам, для $z\in E$ и всех $n\geqslant N_0$ получим

$$|\psi_n(z)-P_n^{(n)}(z)|<\frac{A_0}{q_0^n}\max_{\Gamma_{\rho_0}}|\psi_n(z)|,$$

где постоянная A_0 не зависит от z и указанных значений n. Если положить $P_n^{(n)}(z)\equiv 0$ для всех $n<N_0$ и выбрать $A_1=\max(q_0^{N_0}, A_0)$,

то для всех $n=0, 1, 2, \ldots$ и $z \in E$ будем иметь

$$|\psi_n(z) - P_n^{(n)}(z)| \leqslant \frac{A_1}{q_0^n} \max_{\Gamma_{\rho_0}} |\psi_n(z)|, \tag{8}$$

где A_1 не зависит от z и n. С помощью неравенства (7) получим

$$|\psi_n(z) - P_n^{(n)}(z)| \leqslant \frac{MA_2}{q_0^n} \tau^{\sigma[n\mu]}, \quad A_2 = AA_1,$$

или

$$|\psi_n(z) - P_n^{(n)}(z)| \leqslant MA_2 d^n, \ z \in E. \tag{9}$$

Мы полагаем здесь $d = \tau^{\sigma\mu} q_0^{-1}$ при $\tau > 1$ и выбираем $\mu > 0$ настолько малым, что $d < 1$; при $\tau \leqslant 1$ мы полагаем $d = q_0^{-1}$; постоянная A_2 не зависит от n и z.

Пусть $P_n^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} z^k$ и $G = \max_E |z^j|$ $(j=0, 1, \ldots, \lambda-1)$, где λ — степень многочлена $r(z)$. Делением многочлена $P_n^{(n)}(z)$ на $r(z)$ представим его в виде $P_n^{(n)}(z) = \alpha_0(z) + \alpha_1(z) r(z) + \alpha_2(z) r^2(z) + \ldots$, где $\alpha_i(z)$ — многочлены степени $\leqslant \lambda - 1$.

Заметим, что существует число $T = T(\eta)$ с таким свойством, что для каждого комплексного числа a найдется целое число $\tilde{a}$ из поля $P(\eta)$ с условием $|a - \tilde{a}| \leqslant T$. Заменяя каждый коэффициент многочлена $\alpha_i(z)$ некоторым целым числом из $P(\eta)$ так, чтобы модуль разности этих чисел был $\leqslant T$, образуем новый многочлен $Q_n^{(n)}(z)$ с целыми коэффициентами из $P(\eta)$: $Q_n^{(n)}(z) = \tilde{\alpha}_0(z) + \tilde{\alpha}_1(z) r(z) + \tilde{\alpha}_2(z) r^2(z) + \ldots$ Пусть $\max_E |r(z)| = \delta < 1$; тогда

$$\max_E |r(z)|^{[n\mu]} |P_n^{(n)}(z) - Q_n^{(n)}(z)| < \delta^{[n\mu]} \lambda G T (1 + \delta + \delta^2 + \ldots) <$$

$$< \frac{\lambda G T}{\delta(1-\delta)} \delta^{n\mu}. \tag{10}$$

Из (6), (9) и (10) следует $|\varphi_n(z) - (r(z))^{[n\mu]} Q_n^{(n)}(z)| < MA_2' d^n \delta^{n\mu} + A_3 \delta^{n\mu} < A_4 \delta^{n\mu}$ или

$$|f(z) - S_n(z) - (r(z))^{[n\mu]} Q_n^{(n)}(z)| < A_4 \delta^{n\mu}. \tag{11}$$

Положим $\mu = 1/N_1$, где N_1 — такое большое натуральное число, что $d < 1$, и рассмотрим сначала натуральные числа вида $n = N_1 s$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$. Многочлен, вычитаемый из $f(z)$ в левой части (11), имеет целые коэффициенты из $P(\eta)$, а степень его не превосходит числа $k\sigma s + \lambda s + N_1 s = ls$; обозначив этот многочлен через $L_{ls}(z)$, для $z \in E$ имеем $|f(z) - L_{ls}(z)| < A_4 \delta_0^{ls}$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$, где $\delta_0 = \delta^{1/l} < 1$.

Если натуральное m имеет вид $m = ls + r$, где $r = 0, 1, \ldots, l-1$, то, рассматривая $L_{ls}(z)$ как многочлен степени, не превосходящей $ls + r$, и используя оценку $\delta_0^{ls} < \delta_0^{-l} \delta_0^{ls+\rho}$, получим для каждого целого $m \geqslant 0$ многочлен $R_m(z)$ степени не выше m с целыми коэффициентами из $P(\eta)$, для которого при $z \in E$ и $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$|f(z) - R_m(z)| < A_5 q^m, \tag{12}$$

где $q = \delta_0 < 1$, а постоянная A_5 не зависит от m и z.

Рассмотрим частный случай доказанной теоремы. Пусть E есть сегмент [0, 1]; для этого случая $\tau(E) = 1/4 < 1$, в качестве многочлена $r(x)$ можно взять $x(1-x)$ и ядро N состоит из точек 0 и 1. Сопоставляя доказанную теорему для этого случая с теоремой 3 из работы [2], получим такой результат:

Теорема 2. *Для того чтобы функция $f(z)$, аналитическая внутри некоторого эллипса с фокусами 0 и 1 и отличная от многочлена с целыми коэффициентами из $P(\eta)$, могла быть приближена согласно* (12) *многочленами $R_m(z)$ степени $\leqslant m$ с целыми коэффициентами из $P(\eta)$ на сегменте* [0, 1], *необходимо и достаточно, чтобы все числа $f^{(k)}(0)/k!$ и $f^{(k)}(1)/k!$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ были целыми числами из $P(\eta)$.*

Достаточность указанных условий в теореме 2 для случая, когда $f(x)$ — вещественная функция при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и приближение происходит многочленами с целыми рациональными коэффициентами, была ранее установлена совершенно другим методом А. О. Гельфондом [3]. Отметим, что в работе [3] дается некоторая оценка снизу для чисел q в неравенстве вида (12), зависящая от осей эллипса, внутри которого $f(z)$ является аналитической функцией. В работе [3] рассматривается также приближение на сегменте $[-1, +1]$.

Замечание 1. Теорема 1 остается справедливой для более общего случая, когда E — замкнутое ограниченное множество плоскости z, дополнение которого K связно и регулярно (в том смысле, что K имеет функцию Грина с полюсом на бесконечности). Это следует из результатов, изложенных в [1] (гл. 4).

Замечание 2. Мы предполагали до сих пор, что для разложения $r(z)$ выполняется условие (2), т. е. $s_2(z) \equiv 1$. Если отказаться от этого условия, то можно указать одно достаточное условие возможности приближения функции $f(z)$ многочленами с целыми коэффициентами из $P(\eta)$ со скоростью геометрической прогрессии.

Пусть $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r$ — корни $s_2(z)$, не принадлежащие E, и предположим, что можно построить функцию $F(z)$, удовлетворяющую следующим условиям: 1) $F(z) = f(z)$ на множестве E; 2) $F(z)$ — аналитическая функция в некотором достаточно малом замкнутом круге σ_i с центром в каждой точке ζ_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$; 3) интерполяционный многочлен $S(z)$, определяемый условиями вида (3) по функции $F(z)$ и по всем точкам ядра множества $E_0 = E + \sum_{i=1}^{r} \sigma_i$, для всех $\nu = 0, 1, \ldots$ $\ldots, p-1$ при каждом натуральном p имеет в качестве всех своих коэффициентов целые числа из $P(\eta)$. Тогда $f(z)$ может быть приближена на E многочленами с целыми коэффициентами из $P(\eta)$ так, чтобы удовлетворялось условие (12).

г. Ростов-на-Дону

Поступило
4 II 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Уолш Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М., ИИЛ, 1961.

2. Альпер С. Я. О приближении функций многочленами с целыми коэффициентами на замкнутых множествах. ИАН СССР. Сер. матем., т. 28, № 5, 1964, с. 1173—1186.

3. Гельфонд А. О. О равномерных приближениях многочленами с целыми рациональными коэффициентами. УМН, т. 10, вып. 1, 1955, с. 41—65.