Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян, Вопросы нелинейной теории динамики разреженного газа,
Матем. моделирование, 2004, том 16, номер 1, 67–74

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2004г., том 16, номер 1, стр. 67-74

ВОПРОСЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ДИНАМИКИ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

© *Н.Б. Енгибарян, А.Х. Хачатрян*

Рассмотрена краевая задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Больцмана в рамках БГК-модели. Путем соответствующих преобразований задача сводится к слабо связанной квазилинейной системе интегральных уравнений. Такая нормальная форма уравнения Больцмана позволяет проанализировать постановку краевых задач и указать на эффективные способы их решения. В качестве примера применены результаты работы к двум классическим задачам кинетической теории газов.

ON NONLINEAR THEORY DYNAMICS OF DILUTE GAS

N.B. Yengibaryan, A.Kh. Khachatryan

In framework of BGK (Bhatnagar, Gross and Kruck) model the boundary-value problem for nonlinear integro-differential Boltzmann equation is considered. By means of corresponding transformations, the problem is reduced to «weak» connected quazilinear system of integral equations. Such normal form of Boltzmann equation allow us to analyse statement of boundary-value problem and to suggest effective methods for it solution. As example, the results for two classic problems of kinetic theory of gases are applied.

1. Введение. Изучение и решение кинетического уравнения Больцмана представляет большую теоретическую и прикладную важность (см. [1-8]).

В кинетической теории газов видное место занимают вопросы динамики разреженного газа в полупространстве и в плоском слое конечной толщины. Хорошо известны следующие три задачи [4-8]:

а) задача диффузного скольжения для полупространства;

б) задача температурного скачка для полупространства;

в) задача течения газа между параллельными пластинками.

Эти задачи в основном рассматриваются в рамках БГК (Бхатнагар-Гросс-Крук) модели уравнения Больцмана [9]. Применение БГК модели обычно сопровождается приближенной линеаризацией нелинейного интегро-дифференциального уравнения Больцмана. Эта линеаризация apriori может существенно исказить задачу не только в количественном, но и в качественном отношении. Важным аспектом в кинетической теории газов является уточнение граничных условий для уравнения Больцмана: выбор тех асимптотических свойств искомого решения, которые адекватны рассматриваемой физической задаче, с одной стороны, и согласуются с данной моделью, с другой.

Настоящая работа посвящена вопросам нелинейной теории динамики разреженного газа в «плоской геометрии». Краевая задача для интегро-дифференциального уравнения Больцмана точно преобразуется к виду квазилинейной системы интегральных уравнений, которая обладает рядом замечательных свойств.

2. Уравнение Больцмана в БГК модели. Пусть в пространстве R^3 задана декартовая система координат (x,y,z). Рассмотрим следующие две задачи течения простого (однокомпонентного) газа:

а) в полупространстве $x>0$, ограниченном твердой стенкой $x=0$,

б) в плоском слое, ограниченном параллельными пластинками $x=0$ и $x=d$, которые могут двигаться друг относительно друга. Первая задача формально соответствует значению $d=+\infty$.

Обозначим через f искомую функцию распределения газа по скоростям $\mathbf{s}=(s_1,s_2,s_3)$. В силу предполагаемой плоской симметрии задачи, функция f не зависит от y и z, то есть $f= =f(x,s_1,s_2,s_3)$. Предполагается также, что газ течет по положительному направлению оси Oy. В рамках БГК модели задача описывается следующей системой интегро-дифференциальных уравнений [4]:

$$s_1\partial f(x,\mathbf{s})/\partial x = -\sigma_0 n(x) f(x,\mathbf{s}) + \sigma_0 n^2(x)\beta(x)\exp(-\alpha(x)(\mathbf{s}-\mathbf{U}(x))^2), \quad (1)$$

$$n(x) = \iiint f(x,\mathbf{s})d^3s, \quad (2)$$

$$U(x) = \frac{1}{n(x)}\iiint s_2 f(x,\mathbf{s})d^3s, \quad (3)$$

$$T(x) = \frac{m}{2kn(x)}\iiint (\mathbf{s}-\mathbf{U}(x))^2 f(x,\mathbf{s})d^3s. \quad (4)$$

Здесь $n(x)$ – плотность газа, $\mathbf{U}(x)=(0,U,0)$ – среднемассовая скорость, $T(x)$ – температура газа, σ_0 – значение сечения столкновения, $\alpha=m/(2\mathrm{k}T)$, $\beta=(\alpha/\pi)^{3/2}$, m – масса молекул, k – постоянная Больцмана. Сечение столкновения σ_0 в настоящей работе считается постоянным. К нелинейному интегро-дифференциальному уравнению (1)-(4) будут присоединены те или иные граничные условия на границах $x=0$ и $x=d$, в зависимости от характера взаимодействия молекул газа со стенками.

3. Переход к кинетическому расстоянию. Первым шагом в предлагаемой нами процедуре упрощения задачи (1)-(4) является переход от аргумента x к новому аргументу $\tau=\tau(x)$ посредством соотношения:

$$\tau(x) = \sigma_0\int_0^x n(t)dt. \quad (5)$$

Хотя сама функция $n(x)$ неизвестна, однако ее предполагаемые свойства позволяют судить о характере зависимости τ от x: функция $\tau=\tau(x)$ – строго возрастающая непрерывно-дифференцируемая функция. Величину τ мы назовем кинетическим расстоянием переменной точки от граничной плоскости $\tau=x=0$ (в отличие от геометрического расстояния x).

Обозначим

$$\tau_0 = \int_0^d \sigma_0 n(x)dx \le +\infty. \quad (6)$$

Если $d<+\infty$,то $\tau_0<+\infty$.

Чтобы отметить переход к новому аргументу τ, добавим знак ~ над соответствующими функциями. Так например, $\tilde{f}(\tau,\mathbf{s}) = f(x,\mathbf{s})$. Тогда система (1)-(4) примет вид

$$s_1\partial\tilde{f}(\tau,\mathbf{s})/\partial\tau = -\tilde{f}(\tau,\mathbf{s}) + \tilde{n}(\tau)\tilde{\beta}(\tau)\exp(-\tilde{\alpha}(\tau)(\mathbf{s}-\tilde{\mathbf{U}}(\tau))^2), \quad (7)$$

$$\tilde{n}(\tau) = \iiint \tilde{f}(\tau,\mathbf{s})d^3s, \quad (8)$$

$$\tilde{U}(\tau) = \frac{1}{\tilde{n}(\tau)}\iiint s_2\tilde{f}(\tau,\mathbf{s})d^3s, \quad (9)$$

$$\tilde{T}(\tau) = \frac{m}{2k\tilde{n}(\tau)}\iiint (\mathbf{s}-\tilde{\mathbf{U}}(\tau))^2\tilde{f}(\tau,\mathbf{s})d^3s. \quad (10)$$

Граничные условия для уравнений (7)-(10) накладываются при значениях $\tau=0$ и $\tau=\tau_0$.

Заметим, что аналогичное упрощение задачи (1)-(4) достигается в рамках линеаризованной БГК модели путем приближенной линеаризации: множитель $n(x)$ в правой части (1) приближенно заменяется постоянной n_0 и осуществляется замена аргумента $\tau=\sigma_0 n_0 x$.

После полного решения задачи (7)-(10) возвращение к исходному аргументу x может быть осуществлено по формуле $\tau=\tau(x)$, где $\tau(x)$ является обратной к функции

$$x(\tau)=\int_0^{\tau}\frac{d\tau'}{\sigma_0\tilde{n}(\tau')}. \qquad (11)$$

Заметим, что при решении ряда основных задач такая необходимость отпадает. Намного сложнее и интереснее обстоит дело в случае слоя конечной толщины d (см. п.4).

4. Определение кинетической толщины τ_0 слоя. Предлагаемая процедура перехода к аргументу τ аналогична применению метода самосогласованных оптических глубин в нелинейной теории переноса излучения. Идея этого метода исходит из работ Эддингтона, В.А. Амбарцумяна (см.[10]) и была впервые реализована в работах одного из авторов [11] (см. также [12]). Центральным вопросом является определение кинетической толщины $\tau_0<+\infty$ слоя. Эта задача решается следующим способом. Рассматривается краевая задача на конечном промежутке $[0,\tau_0]$, где $\tau_0>0$ играет роль параметра. После полного решения этого семейства задач значение τ_0 определяется как обратная функция к функции

$$x_0(\tau_0)=\int_0^{\tau_0}\frac{d\tau}{\sigma_0\tilde{n}(\tau,\tau_0)}. \qquad (12)$$

Данная процедура в ряде случаев допускает полное математическое обоснование.

5. Переход к интегральным уравнениям в случае полупространства $d=+\infty$. В дальнейшем в настоящей работе будут рассмотрены только задачи в полупространстве, Apriori не исключена возможность $\tau_0<+\infty$ при $d=+\infty$. Однако мы ограничимся рассмотрением таких задач, в случае которых $\tau_0=+\infty$, при $d=+\infty$ и функция $n(x)$ имеет конечный предел в ∞. Тогда будем иметь $\tilde{n}(+\infty)=n(+\infty)$.

Введем функции f^+ и f^-, описывающие распределение по скоростям для молекул, двигающихся соответственно в сторону стенки и в обратную сторону:

$$\tilde{f}^+(\tau,\mathbf{s})=\tilde{f}(\tau,\mathbf{s}),\quad s_1>0,,\quad \tilde{f}^-(\tau,\mathbf{s})=\tilde{f}(\tau,-s_1,s_2,s_3),\qquad s_1>0. \qquad (13)$$

К уравнению (7)-(10) присоединяются следующие граничные условия на границе $\tau=0$:

$$\tilde{f}^+(0,\mathbf{s})=qf_0^M(\mathbf{s})+(1-q)\tilde{f}^-(0,\mathbf{s}). \qquad (14)$$

Здесь q – коэффициент аккомодации, указывающий на долю молекул, которые после взаимодействия со стенкой покидают ее с максвелловским распределением по скоростям:

$$f_0^M(\mathbf{s})=\beta_0 n_0^- \exp(-\alpha_0 s^2),\qquad \beta_0=(\alpha_0/\pi)^{3/2},\qquad \alpha_0=m/(2kT_0). \qquad (15)$$

$$n_0^-=2\sqrt{\pi\alpha_0}\,\tilde{n}^-(0)=2\sqrt{\pi\alpha_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}s_1\tilde{f}^-(0,\mathbf{s})d^3s,\qquad \tilde{T}(0)=T_0. \qquad (16)$$

где n_0^- определяется из условия непротекания.

Остальная часть молекул отражается от поверхности стенки зеркально.

В качестве второго граничного условия задается поведение функции распределения при $\tau \to +\infty$. Нами пока будет сделано следующее общее предположение:

$$\tilde{f}^-(\tau, \mathbf{s}) \sim 0(\exp(\tau/s_1)) \quad \text{при } \tau \to +\infty. \tag{17}$$

Вопрос о наложении дополнительных требований на функции $\tilde{U}$, $\tilde{n}$ и $\tilde{T}$ при $\tau \to +\infty$ будет обсужден позже.

Используя краевые условия (14), (17), задача (7)-(10) может быть преобразована в нелинейную систему интегральных уравнений относительно функций $\tilde{U}$, $\tilde{n}$ и $\tilde{T}$. Для этого, в первую очередь, выразим функций $\tilde{f}^{\pm}$ через $\tilde{U}$, $\tilde{n}$ и $\tilde{T}$.

Из (7) с учетом условий (14) и (17) получаем:

$$\tilde{f}^+(\tau, \mathbf{s}) = C(\mathbf{s})\exp(-\tau/s_1) + \int_0^{\tau} \exp(-(\tau - t)/s_1)\psi(t, \mathbf{s})\frac{dt}{s_1}, \qquad s_1 > 0, \tag{18}$$

$$\tilde{f}^-(\tau, \mathbf{s}) = \int_{\tau}^{\infty} \exp(-(t - \tau)/s_1)\psi(t, \mathbf{s})\frac{dt}{s_1}, \tag{19}$$

где

$$\psi(\tau, \mathbf{s}) = \tilde{\beta}(\tau)\tilde{n}(\tau)\exp(-\tilde{\alpha}(\tau)s_1^2)\exp(-\tilde{\alpha}(\tau)s_3^2)\exp(-\tilde{\alpha}(\tau)(s_2 - \tilde{U}(\tau))^2), \tag{20}$$

$$C(\mathbf{s}) = qf_0^M(\mathbf{s}) + (1-q)\int_0^{\infty} \exp(-t/s_1)\psi(t, \mathbf{s})\frac{dt}{s_1}. \tag{21}$$

Подставляя (18),(19) в выражение (8), с учетом (20), (21) будем иметь

$$\tilde{n}(\tau) = h_0(\tau) + \int_0^{\infty} W_1(\tau, t)r(t)dt, \tag{22}$$

где

$$h_0(\tau) = qn_0^- \sqrt{\alpha_0/\pi}\int_0^{\infty} \exp(-\alpha_0 s_1^2)\exp(-\tau/s_1)ds_1, \tag{23}$$

$$W_1(\tau, t) = \sqrt{\tilde{\alpha}(t)/\pi}\int_0^{\infty} [\exp(-|\tau - t|/s) + \varepsilon\exp(-(\tau + t)/s)]\exp(-\tilde{\alpha}(t)s^2)\frac{ds}{s}, \tag{24}$$

$$r(t) = \sqrt{\tilde{\alpha}(t)/\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\tilde{\alpha}(t)(s_2 - \tilde{U}(t))^2)\tilde{n}(t)ds_2, \tag{25}$$

$$n_o^- = 2\sqrt{\alpha_0/\pi}\int_0^{\infty} \tilde{\alpha}(t)dt\int_0^{\infty} ds_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\tilde{\alpha}(t)(s_2 - \tilde{U}(t))^2)\exp(-\tilde{\alpha}(t)s_1^2)\exp(-t/s_1)\tilde{n}(t)ds_2, \tag{26}$$

Второй шаг в сторону упрощения задачи (7)-(10) сопряжен с тем обстоятельством, что вид функций n_0^- и r не зависят от функций $\tilde{U}$ (этот результат впервые был получен в [13]). В этом легко можно убедиться, путем замены переменной интегрирования $p=s_2-\tilde{U}(t)$ под знаком интеграла (25) и (26). Имеем

$$r(t) = \tilde{n}(t), \qquad n_o^- = 2\sqrt{\alpha_0}\int_0^{\infty} \sqrt{\tilde{\alpha}(t)}dt \int_0^{\infty} \exp(-\tilde{\alpha}(t)s^2)\exp(-t/s)\tilde{n}(t)ds.$$

Эта замена приводит (22) к следующему уравнению:

$$\tilde{n}(\tau) = h_0(\tau) + \int_0^\infty W_1(\tau,t)\tilde{n}(t)dt$$

или

$$\tilde{n}(\tau) = \int_0^\infty W_2(\tau,t)\tilde{n}(t)dt, \tag{27}$$

$$W_2(\tau,t) = W_1(\tau,t) + R_1(\tau)R_2(t),$$

$$R_1(\tau) = 2q\alpha_0 \int_0^\infty \exp(-\tau/s)\exp(-\alpha_0 s^2)ds, \qquad R_2(t) = \sqrt{\tilde{\alpha}(t)/\pi}\int_0^\infty \exp(-t/s)\exp(-\tilde{\alpha}(t)s^2)ds.$$

Аналогичные выкладки приводят к точной линеаризации уравнения (9) относительно функции $\tilde{U}(\tau)\tilde{n}(\tau)$:

$$\tilde{U}(\tau)\tilde{n}(\tau) = \int_0^\infty W_1(\tau,t)\tilde{U}(t)\tilde{n}(t)dt. \tag{28}$$

Наконец, подставляя (18),(19) в (10) и после некоторых преобразований, получаем следующее интегральное уравнение относительно температуры $\tilde{T}(\tau)\tilde{n}(\tau)$:

$$\tilde{T}(\tau)\tilde{n}(\tau) = \tilde{g}(\tau) + \int_0^\infty W_3(\tau,t)\tilde{T}(t)\tilde{n}(t)dt, \tag{29}$$

где

$$W_3(\tau,t) = \frac{2}{3}\sqrt{\tilde{\alpha}(t)/\pi}\int_0^\infty [\exp(-|\tau - t|/s) + \varepsilon\exp(-(\tau+t)/s)]\exp(-\tilde{\alpha}(t)s^2)[\tilde{\alpha}(t)s^2+1]\frac{ds}{s}, \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tau) = \frac{m}{3k}[q n_0^- \sqrt{\alpha_0/\pi}\int_0^\infty \exp(-\tau/s)\exp(-\alpha_0 s^2)(s^2 + 1/\alpha_0)ds - \\ -\tilde{n}(\tau)\tilde{U}^2(\tau) + \int_0^\infty W(\tau,t)\tilde{n}(t)\tilde{U}^2(t)dt].\end{aligned} \tag{31}$$

6. Общая схема решения системы (27)-(29). Полученную систему нелинейных интегральных уравнений (27)-(29) мы назовем нормальной формой уравнения Больцмана в БГК модели. Эта система является слабо связанной квазилинейной системой в следующем смысле. При любом заданном виде функции $\alpha(\tau)>0$, фигурирующей в выражениях W_1, W_2, W_3 и $\tilde{g}$, уравнения (27)-(29) представляют собой раздельные линейные интегральные уравнения (относительно $\tilde{n}$, $\tilde{n}\tilde{U}$ и $\tilde{n}\tilde{T}$ соответственно). Такая структура системы (27)-(29) наводит на следующую общую схему ее решения, которая порождает уточнение в конкретных задачах:

а) Выбирается некоторая начальная форма функции $\tilde{\alpha}(\tau) > 0$, например, $\tilde{\alpha}(\tau) = \mathrm{const}$, которую назовем первым приближением к $\tilde{\alpha}(\tau)$;

б) Решается линейное однородное уравнение (27) при $\alpha=\alpha_1$. Его решение $n_1 = (\tilde{n})_1$ содержит одну произвольную постоянную $\lambda>0$ (см. [14]);

в) Решается однородное уравнение (28). В его решении $Q_1 = (\tilde{n}\tilde{U})_1$ участвует произвольная постоянная $\mu \geq 0$;

г) Определяется U_1 в первом приближении, как частное Q_1/n_1. Постоянные λ и μ должны быть выбраны исходя из дополнительных асимптотических условий, накладываемых на функции $\tilde{n}$ и $\tilde{U}$ (например, используя значение $n(\infty)$);

д) Строится минимальное положительное решение уравнения (29). В результате определяются $\tilde{T}$ в первом приближении и новое приближение для α: $\alpha_2 = m/(2k\tilde{T}_1)$. Процесс повторяется несколько раз.

7. Об уравнениях (27)-(29). Ядра уравнений (27)-(29) обладают следующими замечательными свойствами: они положительны и имеют место соотношения:

$$\int_0^\infty W_2(\tau,t)d\tau = 1, \tag{32}$$

$$\int_0^\infty W_k(\tau,t)d\tau \le 1, \qquad k = 1,3. \tag{33}$$

Эти соотношения показывают, что уравнениями (27)-(29) описываются некоторые линейные стохастические процессы. Равенство (32) означает, что при любой функции α, ядро W – стохастическое (марковское). Этот факт отражает закон полного сохранения числа частиц: молекулы не уничтожаются внутри полупространства и не уходят из него. Примечательно, что равенство (32) имеет место после перехода к аргументу τ, то есть именно как функция от кинетических расстояний τ и t. Функция W_2 приобретает вероятностный смысл переходной функции виртуальной частицы. Этот факт еще раз подтверждает важность перехода к новой переменной τ.

Неравенства (33) означают, что ядра W_1 и W_3 являются полумарковскими (см. [15]). Для W_1 неравенство выражает сохранение момента количества движения внутри среды и его потери при контакте газа со стенкой. Несколько иная ситуация имеет место в случае уравнения (29) относительно $\tilde{n}\tilde{T}$. Тогда энергия сохраняется внутри среды. Стенка может как увеличить, так и уменьшить температуру газа.

В теории переноса излучения аналогичная ситуация имеет место в задачах переноса в полупространстве с внешними источниками энергии.

8. О поведении решения в бесконечности. В настоящем пункте мы вкратце обсудим вопрос о степени согласованности тех или иных предположений о граничном поведении функции $\tilde{T}$ в бесконечности и свойствах решения задачи, полученного в условиях сделанных предположений. Нормальный вид уравнений дает широкую возможность качественного анализа позитивных и негативных аспектов БГК модели. Как в математическом, так и в физическом отношениях, качественно различаются следующие два типа решения задачи (27)-(29):

а) температура $\tilde{T}(\tau)$ остается ограниченной при

$$\tau \to \infty \quad \text{и} \quad \exists\ \alpha_\infty = \lim_{\tau\to\infty} \tilde{\alpha}(\tau) = m/(2kT_\infty) > 0, \tag{34}$$

где число T_∞ считается заданным;

$$\text{б) } T_\infty = +\infty \ \text{ и } \ \alpha_\infty = 0. \tag{35}$$

Сперва рассмотрим вопрос реализации схемы, изложенной в п.6, в случае предположения (34). Пусть $\alpha_1(\tau)=\alpha_\infty$. Дополним уравнение (27) условием

$$\tilde{n}(\infty) = n_\infty , \tag{36}$$

где n_∞ считается заданным.

Тогда ядро уравнения (27) является суммой K_0+K, где

$$K_0(\tau - t) = \sqrt{\alpha_\infty / \pi}\int_o^\infty \exp(-|\tau - t|/s)\exp(-\alpha_\infty s^2)\frac{ds}{s}$$

– консервативное ядро Винера–Хопфа. Можно доказать, что тогда уравнение (27) обладает положительным решением, удовлетворяющим условию (36), причем это решение – единственное в достаточно широких классах функций.

При построении функции Q_1 мы можем либо брать тривиальное решение уравнения (28): Q=0, либо его нетривиальное (положительное) решение. Случаю Q>0 соответствует наличие дрейфа газа в полупространстве. Рассмотрим случай Q=0. Можно доказать, что минимальное решение уравнения (29) будет ограниченной функцией, $\exists T_\infty$, $0<T_\infty<+\infty$. Функция $\alpha_2= =m/(2kT_1)$ будет иметь конечный предел $\alpha_2(+\infty)$. Дальнейшее построение $\tilde{n}_2$, $\tilde{T}_2$ и т.д. станет предметом отдельного рассмотрения. Имеются достаточные основания предположить, что таким путем будет построено ограниченное решение системы (27),(29).

Итак, в случае задачи (27)-(29) «без течения» (U=0), уравнения (27)-(29) выглядят вполне согласованными. Численные построения последующих приближений может выявить характер изменения и тенденцию ее стабилизации. Намного сложнее обстоит дело в случае $\tilde{U}$ >0. Об этом случае речь пойдет чуть позже.

Пусть $T_\infty=\infty$ и $\alpha_\infty=0$. Тогда физический процесс «не стабилизируется» в глубоких слоях среды и ядра W_1,W_2,W_3 нельзя приближенно заменить ядрами, зависящими от разности аргументов. В такой ситуации нарушается концепция о пограничном слое, ставится под большим вопросом пригодность линеаризованной БГК модели. Оказывается, что предположения $\alpha_\infty>0$ и $\tilde{U} > 0$ несовместимы.

Дело в том, что при $\alpha_\infty>0$ функция $\tilde{U}(\tau)$ линейно растет в ∞, а свободный член $\tilde{g}$ уравнения (29) неинтегрируем, более того, тогда $\tilde{g}$ имеет отличный от 0 предел в ∞. Такому свободному члену соответствует решение $\tilde{T}(\tau)$, которое может расти в $+\infty$ со скоростью τ^2, что приводит к нарушению ряда основополагающих требований. Сказанное физически означает, что среднемассовая скорость в рамках БГК модели порождает соизмеримую с ней кинетическую энергию теплового движения в глубоких слоях – порядка $\tilde{U}^2$. Это негативное явление остается в тени при линеаризации БГК модели.

Вопросам математического обоснования ряда утверждений настоящей работы, а также методам решения задачи (27)-(29) при U=0, будет посвящена отдельная работа авторов.

Резюме. Нормальная форма (27)-(29) уравнения Больцмана включает в себя следующие особенности:

1) Переход к кинетическому расстоянию τ и формуле (12) для определения τ_0.

2) Линейность уравнений (27)-(29) при заданном виде функции $\tilde{\alpha}(\tau)$.

3) Стохастичность ядра W_2 и полумарковость ядер W_1 и W_3.

4) Раздельные (скалярные) уравнения при заданном $\tilde{\alpha}(\tau)$.

5) Возможность анализа корректности постановки тех или иных граничных условий при $\tau\to\infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боголюбов Н.Н.* Проблемы динамической теории статистической физики. -М., Л., 1946.
2. *Чемпен С., Каулинг П.* Математическая теория неоднородных газов. -М., 1960.
3. *Карлеман Т.* Математические задачи кинетической теории газов. -М., 1960.
4. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. -М. Наука, 1962, 440с.
5. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. -М.: Мир, 1978, 495с.
6. *Siewert C.E.* J. Comput. Phys., 1999, v.152, p.251.
7. *Barichello L.B. and Siewert C.E.* European Journal of Applied Matlematics, 2000, 314p.
8. *Латышев А.В.* ТМФ, 1991, v.86, №3, p.402.
9. *Bhatnagar P.L., Gross E.P. and Krook M.* Phys. Rev., 1954, 94, 511.
10. *Амбарцумян В.А.* В сб.: Теория звездных спектров. -М.: Наука, 1966, 91с.
11. *Енгибарян Н.Б.* Астрофизика, 1965, №1, вып.3, с.297.
12. *Енгибарян Н.Б., Хачатрян А.Х.* Астрофизика, 1985, т.23, вып.1, с.145.
13. *Енгибарян Н.Б., Хачатрян А.Х.* ТМФ, 2000, т.125, №2, с.1589
14. *Енгибарян Н.Б., Хачатрян А.Х.* ЖВМ и МФ, 1998, т.38, №3, с.468.
15. *Королюк В.С., Броди С.М., Турбин А.Ф.* В Сб. «Теория вероятностей, Мат. статистика. Теория кибернетика». 11; (Итоги науки. ИНИТИ АН СССР) -М.: 1973, 47.

Поступила в редакцию 17.12.02