T. A. Soldatova, Boundary properties of generalized Cauchy type integrals in the space of smooth functions, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2011, Volume 11, Issue 3, 95–109

DOI: 10.18500/1816-9791-2011-11-3-1-95-109

УДК 517.956

ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Т. А. Солдатова

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
кафедра математического анализа
E-mail: tsoldato@yandex.ru

На гладком контуре рассматриваются обобщенные интегралы типа Коши с ядром, зависящим от разности аргументов. Они охватывают как потенциалы двойного слоя для эллиптических уравнений второго порядка, так и обобщенные интегралы типа Коши для эллиптических систем первого порядка. Для функций, определяемых этими интегралами, найдены достаточные условия, обеспечивающие их принадлежность классу $C^{n,\mu}$, вплоть до границы. Получены соответствующие формулы для их предельных значений.

Ключевые слова: обобщенные интегралы типа Коши, краевые задачи, эллиптические уравнения, граничные свойства.

Boundary Properties of Generalized Cauchy Type Integrals in the Space of Smooth Functions

T. A. Soldatova

Lomonosov Moscow State University,
Chair of Mathematical Analysis
E-mail: tsoldato@yandex.ru

The generalized Cauchy type integrals which kernel depends on the difference of arguments are considered on the smooth contour. These integrals cover as potentials of double layer for second order elliptic equations as generalized Cauchy type integrals for first order elliptic systems on the plane. In the paper the sufficient conditions such that these integrals belong $C^{n,\mu}$ up to the boundary are found.

Key words: generalized Cauchy type integrals, boundary problems, elliptic equations, boundary properties.

1. ОДНОРОДНЫЕ ЯДРА

Хорошо известно [1], какое важное значение имеют классические интегралы типа Коши для исследования краевых задач теории функций. Применительно к краевым задачам для эллиптических уравнений второго порядка аналогичную роль играют потенциалы двойного слоя [2]. Интегралы указанных типов можно объединить в форме криволинейных интегралов ядрами однородной степени -1, зависящими от разности двух комплексных переменных (одна из которых является переменной интегрирования). Данная работа посвящена исследованию граничных свойств этих интегралов в классах $C^{n,\mu}$ для всех $n = 0, 1, \dots$

Рассмотрим непрерывную на $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ функцию $Q(\xi)$, однородную степени $-m$, где m — неотрицательное целое число. Последнее означает, что

$$Q(r\xi) = r^{-m} Q(\xi) \tag{1.1}$$

для любого $r > 0$. Очевидно, функция Q полностью определяется своими значениями на единичной окружности, которую обозначим $\mathbb{T}$, и допускает оценку $|Q(\xi)| \le |Q|_{0,\mathbb{T}} |\xi|^{-m}$, где $|\varphi|_{0,E}$ означает sup-норму функции φ на множестве E. В частности, отсюда

$$|Q(y - x)| \le 2^m |Q|_{0,\mathbb{T}} |y|^{-m} \quad \text{при} \quad |y| \ge 2|x|. \tag{1.2}$$

В самом деле, в силу (1.1) можем записать $Q(y - x) = |y|^{-m} Q(\xi)$ с вектором $\xi = (y - x)/|y|$, удовлетворяющим условию $1/2 \le |\xi| \le 2$.

В дальнейшем будут рассматриваться однородные функции Q, удовлетворяющие на окружности $\mathbb{T}$ условию Липшица. Напомним, что функция φ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $0 < \mu \le 1$ на множестве E (условию Липшица при $\mu = 1$), если конечна полунорма

$$[\varphi]_{\mu,E} = \sup_{x \ne y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^\mu}.$$

Класс ограниченных функций с конечной нормой $|\varphi|_\mu = |\varphi|_0 + [\varphi]_\mu$ образует банахово пространство Гельдера $C^{0,\mu}(E)$. При $\mu < 1$ для него используем также обозначение $C^\mu(E)$. Символ $C^1(E)$ используется для функций, непрерывно дифференцируемых на E (в случае, когда E является замкнутой областью).

Обратимся к однородной функции $Q \in C^{0,1}(\mathbb{T})$. В силу свойства однородности (1.1) она удовлетворяет условию Липшица в каждом слое $G = \{\delta \le |\xi| \le \delta^{-1}\}$ с оценкой норм $|Q|_{1,G} \le C|Q|_{1,\mathbb{T}}$, где постоянная $C > 0$ зависит только от m и δ. В частности, аналогично (1.2) отсюда приходим к оценке

$$|Q(y - x) - Q(y)| \le C|Q|_{1,\mathbb{T}}|y|^{-m-1} \quad \text{при} \quad |y| \ge 2|x|, \tag{1.3}$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от m.

В дальнейшем основной интерес представляют однородные функции Q степени -1.

Теорема 1.1 *Пусть функция $Q(\xi) \in C^{0,1}(\mathbb{T})$ однородна степени -1 и удовлетворяет условию*

$$Q(-e) = -Q(e) \tag{1.4}$$

для некоторого $e \in \mathbb{T}$. Тогда вне прямой $L = \{te \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ сингулярный интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} Q(te - x)dt = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} Q(te - x)dt \tag{1.5}$$

существует и зависит только от полуплоскости, в которой лежит точка x. Если дополнительно $Q \in C^1(\mathbb{T})$, то

$$\int_L \frac{\partial Q}{\partial \xi_i}(y - x)ds_y = 0, \quad i = 1, 2, \quad x \notin L, \tag{1.6}$$

где интегралы понимаются в обычном смысле.

Наконец, если функция $Q(\xi) \in C^m(\mathbb{T})$ и нечетна, т.е условие (1.4) выполняется для всех e, то

$$\int_{\mathbb{R}} t^k Q^{(m)}(te - x)dt = 0, \quad x \notin L, \, k = 0, 1, \dots, m - 1, \tag{1.7}$$

где $Q^{(m)}$ означает любую из частных производных порядка m.

Доказательство. При $R \ge 2|x|$ в силу (1.4) имеем:

$$\int\limits_{2|x|\le|t|\le R} Q(te - x)dt = \int\limits_{2|x|}^{R} [\varphi_+(t) + \varphi_-(t)]dt, \quad \varphi_\pm(t) = Q(\pm te - x) - Q(\pm te).$$

На основании (1.3) функции $\varphi_\pm$ допускают оценку $|\varphi_\pm(t)| \le \mathrm{C}[Q]_\mu|x|t^{-2}$ при $t \ge 2|x|$. Поэтому интеграл (1.5) действительно существует.

Обозначим $\phi(x)$ функцию на $\mathbb{R}^2 \setminus L$, определяемую этим интегралом. Доказательство того, что она постоянна в каждой из двух полуплоскостей, сводится к соотношениям

$$\phi(rx) = \phi(x), \quad \phi(x + \lambda e) = \phi(x), \tag{1.8}$$

справедливым для любых положительных r и λ. В силу однородности

$$\int_{-R}^{R} Q(te - rx)dt = \int_{-Rr}^{Rr} Q(te - x)dt,$$

что в пределе дает первое равенство (1.8). Точно так же при $x' = x + \lambda e$ можем записать

$$\int_{-R}^{R} Q(te - x')dt - \int_{-R}^{R} Q(te - x)dt = \left(\int\limits_{-R-\lambda}^{-R} + \int\limits_{R-\lambda}^{R} \right) Q(te - x)dt.$$

Так как

$$\max_{R-\lambda\le|t|\le R} |Q(te - x)| \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty,$$

приходим к справедливости и второго равенства в (1.8).

Обратимся ко второму утверждению теоремы. Пусть функция $Q \in C^1(\mathbb{T})$ и точка $c \in P$ фиксирована. Тогда как и выше убеждаемся, что функция $Q(te - x) - Q(te - c)$ суммируема на прямой $\mathbb{R}$.

Поскольку этим свойством обладают и ее частные производные по x_i, функцию $\phi(x) - \phi(c)$ можно продифферницировать под знаком интеграла. Поскольку эта функция постоянна в полуплоскости, в результате приходим к равенству (1.6).

Что касается последнего утверждения теоремы, то для $k = 0$ равенство (1.7) получается дифференцированием (1.6). Поэтому доказательство требуется только для $k \geq 1$. Пусть для определенности первая координата e_1 единичного вектора $e = (e_1, e_2)$ отлична от нуля. Тогда, раскладывая $(te_1)^k = [(te_1 - x_1) + x_1]^k$ по степеням $te_1 - x_1$, вместо (1.7) можем доказывать равенство

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{Q}(te - x)dt = 0, \quad \tilde{Q}(\xi) = \xi_1^k Q^{(m)}(\xi).$$

Очевидно, достаточно убедиться, что функция $\tilde{Q}$ представима в виде конечной суммы

$$\xi_1^k Q^{(m)}(\xi) = \sum_i Q_i^{(m_i)},\ k < m, \tag{1.9}$$

где функции $Q_i \in C^{m_i}(\mathbb{T})$ нечетны и однородны степени -1. Тогда указанное равенство будет следствием равенства (1.8) с $k = 0$, справедливость которого была отмечена выше.

Доказательство представления (1.9) проведем индукцией по m. При $m = 1$ оно очевидно, пусть рассматриваемое утверждение справедливо по отношению к $\xi_1^k Q^{(m-1)}(\xi)$, $k < m-1$. Для производной $Q^{(m)}$ возможны следующие два случая:

$$Q^{(m)} = \frac{\partial}{\partial \xi_1} Q^{(m-1)}, \quad Q^{(m)} = \frac{\partial}{\partial \xi_2} Q^{(m-1)}.$$

Соответственно этим случаям имеем:

$$\xi_1^k Q^{(m)} = \frac{\partial}{\partial \xi_1}[\xi_1^k Q^{(m-1)}] - k[\xi_1^{k-1} Q^{(m-1)}], \quad \xi_1^k Q^{(m)} = \frac{\partial}{\partial \xi_2}[\xi_1^k Q^{(m-1)}].$$

Если $k < m - 1$, то к выражениям в квадратных скобках достаточно применить предположение индукции. В случае $k = m - 1$ остается заметить, что функция $Q_0(\xi) = \xi_1^k Q(k)(\xi)$ однородна степени -1 и нечетна. Последнее следует из того, что каждое дифференцирование характер четности или нечетности меняет на противоположный. Тем самым представление (1.9), а вместе с ним и теорема установлены.

Общее значение интеграла (1.5) в полуплоскости D, лежащей слева от вектора e, обозначим $\sigma(Q; e)$. Ясно также, что замена e на $-e$ приводит к общему значению интеграла (1.5) в полуплоскости, лежащей справа от вектора e. Если функция Q нечетна, то замена $t = -t'$ в интеграле (1.5) приводит к равенству $\sigma(Q; -e) = -\sigma(Q; e)$ для любого вектора e. Другими словами, в этом случае σ представляет собой нечетную функцию на $\mathbb{T}$.

Опишем связь σ с линейными подстановками. Пусть матрица $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ имеет положительный определитель, так что определяемое ею линейное преобразование $\tilde{x} \to A\tilde{x}$ не меняет ориентации плоскости. В частности, если полуплоскость $\tilde{D}$ лежит слева от $\tilde{e}$, то образ $A(\tilde{D})$ при этом преобразовании совпадает с D. Поэтому линейная замена переменных в (1.5) приводит к равенству

$$\sigma[Q(\xi); e] = |A\tilde{e}|\sigma[Q(A\xi); \tilde{e}], \quad e = |A\tilde{e}|^{-1}(A\tilde{e}). \tag{1.10}$$

Нетрудно также дать явное выражение для интегралов $\sigma^{\pm}(Q; e)$. С этой целью положим

$$f(\arg \xi) = Q(\xi), \quad g(\theta) = \begin{cases} f[(\arg e) - \theta], & 0 \leq \theta \leq \pi/2, \\ -f[\pi - (\arg e) - \theta], & -\pi/2 \leq \theta < 0. \end{cases} \tag{1.11}$$

В терминах функции f условие (1.4) сводится к равенству $f(\pi + \arg e) = -f(\arg e)$, поэтому функция g непрерывна в точке $\theta = 0$. Если $Q \in C^{0,1}(\mathbb{T})$, то, очевидно, и 2π-периодическая функция $f \in C^{0,1}$ и, значит, этим свойством обладает и функция g на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$.

Лемма 1.1. *В условиях теоремы* 1.1

$$\sigma(Q, e) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{g(\theta)}{\sin\theta} d\theta, \tag{1.12}$$

где интеграл понимается как сингулярный в точке $\theta = 0$, т.е. является пределом при $\varepsilon \to 0$ интегралов по $\varepsilon \le |\theta| \le \pi/2$. В частности, если функция $Q(\xi)$ нечетна, то

$$\sigma(Q, e) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{f[(\arg e) - \theta]}{\sin\theta} d\theta. \tag{1.13}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $e = (0, 1)$, и выберем точку $c = (-1, 0) \in D$. Очевидно, $\arg(te - c) = \operatorname{arctg} t$, поэтому

$$\sigma(Q; e) = \int_{\mathbb{R}} Q(te - c)dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\operatorname{arctg} t)}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

Замена $\operatorname{tg} t = \theta$ в этом сингулярном (на ∞) интеграле приводит к равенству

$$\sigma(Q; e) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{f(\theta)}{\cos\theta} d\theta,$$

где интеграл понимается как предел при $\varepsilon \to 0$ соответствующих интегралов по $|\theta| \le \pi/2 - \varepsilon$. Поскольку в обозначениях (1.11)

$$\int_{|\theta| \le \pi/2 - \varepsilon} \frac{f(\theta)}{\cos\theta} d\theta = \int_{\varepsilon \le |\theta| \le \pi/2} \frac{g(\theta)}{\sin\theta} d\theta, \quad g(\theta) = \begin{cases} f(\pi/2 - \theta), & 0 \le \theta \le \pi/2, \\ -f(-\pi/2 - \theta), & -\pi/2 \le \theta \le 0, \end{cases}$$

отсюда следует справедливость формулы (1.12) в рассматриваемом случае $e = (0, 1)$.

В общем случае произвольного единичного вектора e положим $\tilde{e} = (0, 1)$ и рассмотрим линейное преобразование A, осуществляющее поворот плоскости против часовой стрелки на угол $\alpha - \pi/2$, $\alpha = \arg e$. При этом повороте $\tilde{e}$ переходит в e и, следовательно,

$$Q(A\xi) = \frac{\tilde{f}(\arg\xi)}{|\xi|}, \quad \tilde{f}(\theta) = f(\theta + \alpha - \pi/2).$$

Поэтому на основании (1.10) предыдущая формула, примененная к $\tilde{Q}$ и $\tilde{e}$, приводит к равенству (1.12) в общем случае.

Наконец, если функция $Q(\xi)$ нечетна, то функция f обладает свойством $f(\theta + \pi) = -f(\theta)$, что доказывает равенство (1.13).

Как будет показано ниже, для $f \in C^{0,1}$ формула (1.13) определяет функцию $\sigma(e)$, принадлежащую $C^{\mu}(\mathbb{T})$ для любого $0 < \mu < 1$ (класс таких функций естественно обозначить C^{1-0}). Доказательство основывается на следующем вспомогательном предложении, которое представляет собой уточненный вариант одного свойства гельдеровых функций, рассмотренного в известной монографии Н. И. Мусхелишвили.

Лемма 1.2. *Пусть $\varphi(u, v) \in C^{\nu}(G \times F)$, $F \subseteq \mathbb{R}^s$ и $0 < \mu < \nu$. Тогда для фиксированных $u', u'' \in G$, $u' \ne u''$, функция*

$$\tilde{\varphi}(v) = \frac{\varphi(u', v) - \varphi(u'', v)}{|u' - u''|^{\mu}}, \quad v \in F,$$

принадлежит классу $C^{\nu-\mu}(F)$ и справедлива оценка

$$|\tilde{\varphi}|_{\nu-\mu} \le 8|\varphi|_{\nu}. \tag{1.14}$$

Доказательство. Из определения видно, что функция $\tilde{\varphi}$ ограничена и

$$|\tilde{\varphi}|_0 \le \max(2|\varphi|_0, [\varphi]_{\nu}). \tag{1.15}$$

Условимся элементы множества $E = G \times F$ записывать x, y, z и рассмотрим на $E \times E$ функцию

$$\psi(x, y) = \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x - y|^{\mu}},$$

которая при $x = y$ полагается равной нулю. Оценим разность $\psi(x,z) - \psi(y,z)$. Предполагая для определенности $|y - z| \le |x - z|$, имеем:

$$|\psi(x,z) - \psi(y,z)| \le \left(\frac{|x-y|^\nu}{|x-z|^\mu} + \frac{|y-z|^\nu||x-z|^\mu - |y-z|^\mu|}{|y-z|^\mu|x-z|^\mu}\right)[\varphi]_\nu = A[\varphi]_\nu|x-y|^{\nu-\mu},$$

$$A = \frac{|x-y|^\mu}{|x-z|^\mu} + \frac{|y-z|^{\nu-\mu}||x-z|^\mu - |y-z|^\mu|}{|x-y|^{\nu-\mu}|x-z|^\mu}.$$

Очевидно,

$$A \le \frac{(|x-z| + |y-z|)^\mu}{|x-z|^\mu} + \frac{|y-z|^{\nu-\mu}||x-z|^\mu - |y-z|^\mu|}{||x-z| - |y-z||^{\nu-\mu}|x-z|^\mu} = (1+t)^\mu + \frac{t^{\nu-\mu}(1-t^\mu)}{(1-t)^{\nu-\mu}},$$

где положено $t = |y-z||x-z|^{-1} \le 1$. Поскольку $t^\mu + (1-t)^{\nu-\mu} \ge t + (1-t) = 1$ и, значит, $1 - t^\mu \le (1-t)^{\nu-\mu}$, величина $A \le 2^\mu + 1 \le 3$. Таким образом,

$$|\psi(x,z) - \psi(y,z)| \le 3[\varphi]_\nu|x-y|^{\nu-\mu}.$$

В общем случае произвольных точек $(x,y),(x',y')$ множества $E \times E$ можем записать $|\psi(x,y) - \psi(x',y')| \le |\psi(x,y) - \psi(x',y)| + |\psi(x',y) - \psi(x',y')|$ и к слагаемым в правой части применить предыдущую оценку. Вспоминая, что $\tilde{\varphi}(v) = \psi[(u',v),(u'',v)]$, в результате получим:

$$|\tilde{\varphi}(v_1) - \tilde{\varphi}(v_2)| \le 6[\varphi]_\nu|v_1 - v_2|^{\nu-\mu}.$$

Совместно с (1.15) отсюда следует требуемая оценка (1.14).

Обратимся к формуле (1.13). Рассматривая $\arg e$ в ее правой части как дополнительную координату параметра u, докажем следующее утверждение.

Лемма 1.3 *Пусть* $g(u,\theta) \in C^{0,\nu}(G \times [-\pi/2, \pi/2]), \quad 0 < \nu \le 1$. *Тогда функция*

$$\sigma(u) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{g(u,\theta)}{\sin\theta} d\theta, \tag{1.16}$$

принадлежит классу $C^{\nu-0}(G)$ *и справедлива оценка* $|\sigma|_{C^\mu} \le C|g|_{C^\nu}, \quad 0 < \mu < \nu$, *где постоянная* $C > 0$ *зависит только от* μ *и* ν. *Если дополнительно функция* g *непрерывно дифференцируема по* u, *причем ее частная производная* g'_u *удовлетворяет условию Гельдера, то имеет место формула дифференцирования:*

$$\sigma'(u) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{g'_u(u,\theta)}{\sin\theta} d\theta. \tag{1.17}$$

Доказательство. Подинтегральное выражение (1.16) представим в виде

$$\frac{\tilde{g}(u,\theta)|\theta|^{\nu-\mu}}{\sin\theta}, \quad \tilde{g}(u,\theta) = \frac{g(u,\theta)}{|\theta|^{\nu-\mu}}.$$

Согласно лемме 1.2 функция $\tilde{g}(u,\theta)$ принадлежит классу $C^\mu(G \times [-\pi/2, \pi/2])$ с соответствующей оценкой норм. Первое утверждение леммы отсюда получается непосредственно.

Что касается формулы дифференцирования (1.17), то без ограничения общности u можно считать одномерным параметром, пробегающим интервал $G \subseteq \mathbb{R}$. Для $u_1, u_2 \in G$ положим

$$\tilde{g}(u_1,u_2,\theta) = \frac{g(u_1,\theta) - g(u_2,\theta)}{u_1 - u_2} = \int_0^1 g'_u[u_1(1-s) + u_2 s]ds,$$

предполагая $\tilde{g}(u_1,u_2,\theta) = g'_u(u,\theta)$ при $u_1 = u_2 = u$. Тогда функция $\tilde{g}$ удовлетворяет условию Гельдера, так что на основании первой части леммы отвечающая ей функция $\tilde{\sigma}$ обладает этим же свойством. Поскольку

$$\tilde{\sigma}(u_1,u_2,\theta) = \frac{\sigma(u_1,\theta) - \sigma(u_2,\theta)}{u_1 - u_2},$$

отсюда следует формула (1.17).

2. ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Напомним обозначения гельдеровых классов дифференцируемых функций. Пространство $C^{n,\mu}(E)$, где $E \subseteq \mathbb{R}^k$ – некоторая замкнутая область, состоит из всех n раз непрерывно дифференцируемых функций φ, которые вместе со своими частными производными принадлежат $C^\mu(E)$. Оно может быть определено индуктивно условием $\varphi, \varphi' \in C^{n-1,\mu}(E)$ с соответствующей нормой, равной сумме норм указанных функций в пространстве $C^{n-1,\mu}(E)$. Когда ясно, о каком множестве E идет речь, удобно эту норму обозначать $|\varphi|_{n,\mu}$. Напомним, что под φ' понимается любая из частных производных первого порядка. Можно также ввести аналогичные пространства с различными дифференциальными свойствами по разным группам переменных. Пусть $E = G \times F$ с замкнутыми областями $G \subseteq \mathbb{R}^r$ и $F \subseteq \mathbb{R}^s$, $\;r + s = k$, переменных соответственно u и v. Тогда пространство $C^{n,m,\mu}(G \times F)$ определяется индуктивно условиями $\varphi, \varphi'_u \in C^{n-1,m,\mu}(G \times F)$ и $\varphi, \varphi'_v \in C^{n,m-1,\mu}(G \times F)$ и снабжается соответствующей нормой $|\varphi|_{n,m,\mu}$. Таким образом, все частные производные функции φ, суммарный порядок которых по переменным u (v) не превосходит m (n), принадлежат $C^\mu(G \times F)$. Наивысший порядок таких производных, очевидно, совпадает с $m + n$.

Применительно к однородным функциям $Q(x,\xi)$, зависящим от $x \in E$ как от параметра, эти определения модифицируются следующим образом. Пространство $C^{\mu;0}(E \times \mathbb{T})$ состоит из функций $C(E \times \mathbb{T})$ этого типа, которые принадлежат $C^\mu(E)$ по первой переменной равномерно по $\xi \in \mathbb{T}$. Оно снабжается соответствующей нормой $|Q| = \sup_{\xi\in\mathbb{T}} |Q|_{\mu,E}$. Исходя из этого пространства, соответствующие пространства дифференцируемых функций $C^{n,\mu;k}(E \times \mathbb{T}$ и $C^{n,m,\mu;k}[(G \times F) \times \mathbb{T}]$ вводятся индуктивно по каждой из выделенных переменных, как выше. Например, при $n \geq 1$ норма в пространстве $C^{n,\mu;k}(E \times \mathbb{T})$ определяется равенством

$$|Q|_{n,\mu;k} = |Q'_x|_{n-1,\mu;k} + |Q'_\xi|_{n,\mu;k-1}.$$

Перечислим некоторые элементарные свойства введенных пространств, связанные с операциями умножения и суперпозиции функций.

Лемма 2.1. (a) *Если $\varphi, \psi \in C^{n,\mu}$, то произведение $\varphi\psi$ принадлежит тому же пространству и справедлива оценка $|\varphi\psi|_{n,\mu} \leq C|\varphi|_{n,\mu}|\psi|_{n,\mu}$, где постоянная $C > 0$ зависит только от n.*

(b) *Если $\varphi \in C^{n,\mu}(\tilde{E})$, отображение $\alpha : E \to \tilde{E}$ удовлетворяет условию Липшица и его производная $\alpha' \in \mathrm{C}^{n-1,\mu}$ (при $n \geq 1$), то суперпозиция $\varphi \circ \alpha$ принадлежит $C^{n,\mu}(E)$ и справедлива оценка $|\varphi \circ \alpha|_{n,\mu} \leq C|\varphi|_{n,\mu}$, где постоянная $C > 0$ зависит только от n и α.*

(c) *Если $\varphi \in C^{n,\mu}(E)$, $\tilde{E} = f(E)$ и $f \in C^{n,1}(\tilde{E})$, то суперпозиция $f \circ \varphi$ принадлежит $C^{n,\mu}(E)$ и справедлива оценка $|f \circ \varphi|_{n,\mu} \leq C|f|_{n,1}|\varphi|_{n,\mu}$, где постоянная $C > 0$ зависит только от n.*

(d) *Пусть 2 — вектор-функция $\varphi(y) \in C^{n,\mu}(F)$ и ее значения лежат в некотором круговом слое $S_\delta = \{\delta \leq |\xi| \leq \delta^{-1}\}$. Тогда для $Q(x,\xi) \in C^{n,\mu;n+1}(E \times \mathbb{T})$ функция $\psi(x,y) = Q[x,\varphi(y)]$ принадлежит $C^{n,\mu}(E \times F)$ и справедлива оценка $|\psi|_{n,\mu} \leq C|Q|_{n,\mu;n+1}|\varphi|_{n,\mu}$, где постоянная $C > 0$ зависит только от n, δ и степени однородности функции Q.*

Доказательство. При $n = 0$ доказательство утверждений (a) – (c) непосредственно следует из элементарных неравенств для полунормы $[\ ]_\mu$ от произведения и суперпозиции функций:

$$[\varphi\psi]_\mu \leq |\varphi|_0[\psi]_\mu + [\varphi]_\mu|\psi|_0, \quad [f \circ \varphi]_\mu \leq [f]_1[\varphi]_\mu, \quad [\varphi \circ \alpha]_\mu \leq [\varphi]_\mu[\alpha]_1^\mu.$$

Общий случай в соответствии с индуктивным определением пространств легко получается из последних неравенств индукцией по n. В силу этих же соображений утверждение (d) также достаточно рассмотреть для $n = 0$. Как уже отмечалось в разд. 1, однородная функция $Q(\xi) \in C^1(\mathbb{T})$ удовлетворяет условию Липшица в каждом круговом слое S_δ, причем ее постоянная Липшица в этом слое допускает оценку $|Q|_{0,1} \leq M|Q|_{C^1}$, где константа M зависит только от δ и степени однородности функции Q. Возвращаясь к рассматриваемому случаю, можем утверждать таким образом, что $Q(x,\xi)$ принадлежит $C^\mu(E)$ равномерно по $\xi \in \mathbb{T})$ и $C^{0,1}(S)$ равномерно по $x \in E$. Поэтому остается воспользоваться утверждением (c) леммы.

Пусть, как и в предыдущем разделе, L означает прямую $\{te, t \in \mathbb{R}\}$ и D — полуплоскость дополнения к L, лежащая слева от вектора $e \in \mathbb{T}$. Пусть функция $Q(t,\xi) \in C^{\mu;0}(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ однородна степени

-1 и нечетна по ξ, она служит ядром интеграла

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}} Q(t, te - x)\varphi(t)dt, \quad x \in D, \tag{2.1}$$

с плотностью $\varphi \in C^{\mu}(\mathbb{R})$. Чтобы исключить сингулярность при $t = \infty$, функцию φ предполагаем с компактным носителем, не ограничивая общности, можно считать, что

$$\varphi(t) = 0, \quad \text{при} \quad |t| \geq 1. \tag{2.2}$$

Тогда интеграл (2.1) определяет функцию, непрерывную в открытой полуплоскости D. Если дополнительно $Q(t,\xi) \in C^{\mu;k}(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$, то функция $\phi \in C^k(D)$ и ее частные производные вычисляются под знаком интеграла:

$$\phi^{(k)}(x) = (-1)^k \int_{\mathbb{R}} Q_{\xi}^{(k)}(t, te - x)dt. \tag{2.3}$$

Здесь как и в теореме 1.1 под $Q_{\xi}^{(k)}$ понимается любая из частных производных по ξ_1, ξ_2 порядка k и аналогичный смысл имеет $\phi^{(k)}$. С учетом (2.2) и однородности $Q_{\xi}^{(k)}$ отсюда следует оценка

$$|\phi^{(k)}|_{0,\tilde{D}} \leq C \max_{|t|\leq 1, \xi \in \mathbb{T}} |Q_{\xi}^{(k)}(t,\xi)|, \tag{2.4}$$

для sup-нормы этих производных в полуплоскости $\tilde{D} \subseteq D$, отстоящей от L на расстоянии 1.

Возникает вопрос, при каких дополнительных условиях функция $\phi^{(k)}$ непрерывно продолжается на замкнутую полуплоскость и принадлежит $C^{\mu}(\overline{D})$? Исследование этого вопроса опирается на следующие два вспомогательных предложения.

Лемма 2.2. *Пусть функция $\phi(x)$ непрерывно дифференцируема в полуплоскости D и ее вектор-градиент ψ' допускает оценку $|\phi'(x)| \leq Mr^{\mu-1}$, где r означает расстояние от точки x до прямой L. Тогда она удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ, причем $[\phi]_{\mu,D} \leq 4M/\mu$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что D совпадает с полуплоскостью $\{x_2 > 0\}$. В этом случае, очевидно, $r = x_2$. Положим $\varphi(s) = \phi(t_0 \pm s, s)$, $s > 0$, где $t_0 \in \mathbb{R}$ и один из знаков фиксированы. По предположению леммы $|\varphi'(s)| \leq 2Ms^{\mu-1}$, так что

$$|\varphi(s_1) - \varphi(s_2)| \leq 2\mu^{-1}M|s_1^{\mu} - s_2^{\mu}| \leq 2\mu^{-1}M|s_1 - s_2|^{\mu}.$$

Пусть теперь x и y — произвольные точки полуплоскости D. Проведем через них прямые, параллельные векторам $e^{\pm} = (\pm 1, 1)$ и рассмотрим вторую пару противоположных вершин полученного прямоугольника. Одна из этих вершин, которую обозначим z, принадлежит D. Применяя предыдущую оценку к сужению ψ на стороны $[x,z]$ и $[y,z]$ прямоугольника, получим неравенство

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq |\phi(x) - \phi(z)| + |\phi(z) - \phi(y)| \leq 4M\mu^{-1}|x - y|^{\mu},$$

где учтено, что $|x - z|$ и $|y - z|$ не превосходят $|x - y|$.

Из леммы, в частности, следует, что функция ϕ непрерывно продолжима на замкнутую полуплоскость $\overline{D}$. Поэтому при дополнительном требовании ограниченности она принадлежит пространству $C^{\mu}(\overline{D})$. Заметим, что ограниченность ϕ достаточно потребовать в полуплоскости $\tilde{D} \subseteq D$, отстоящей от прямой L на расстоянии 1, соответственно равенство

$$|\phi| = |\phi|_{0,\tilde{D}} + [\phi]_{\mu,D} \tag{2.5}$$

определяет эквивалентную норму в пространстве $C^{\mu}(\overline{D})$.

Лемма 2.3. *Пусть функция $P(t,\xi) \in C^{k,\mu;0}(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ однородна степени $-k-2$ по ξ и удовлетворяет условию*

$$\int_{\mathbb{R}} t^i P(t_0, te - x)dt = 0, \quad x \in D, \tag{2.6}$$

для любых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $i = 0, 1, \ldots, k$. Тогда интеграл

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} P(t, te - x)dt, \quad x \in D,$$

допускает оценку

$$|\psi(x)| \leq Cr^{\mu-1}|P|_{C^{k,\mu;0}},$$

где r означает расстояние от точки x до прямой L и постоянная $C > 0$ зависит только от μ и k.

Доказательство. Запишем формулу Тейлора

$$P(t,\xi) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(t-t_0)^i}{i!} P_t^{(i)}(t_0,\xi) + \Delta(t,\xi) \tag{2.7}$$

с остаточным членом

$$\Delta(t,\xi) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(s-t_0)^{k-1}}{(k-1)!} \left[P^{(k)}(s,\xi) - \tilde{P}^{(k)}(t_0,\xi) \right] ds.$$

Очевидно, функция $\Delta(t,\xi)$ однородна степени $-m-2$ по ξ и допускает оценку

$$|\Delta(t,\xi)| \le C_1 |P|_{C^{k,\mu;0}} |t-t_0|^{k+\mu}, \quad \xi \in \mathbb{T},$$

где постоянная C_1 зависит только от k и μ. Согласно (2.6), (2.7) имеем равенство

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} \Delta(t, te - x) dt,$$

что приводит к оценке

$$|\psi(x)| \le C_1 |P|_{C^{k,\mu;0}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|t-t_0|^{m+\mu}}{|te-x|^{k+2}} dt. \tag{2.8}$$

До сих пор $t_0 \in \mathbb{R}$ в этих рассуждениях было произвольным. Пусть t_0 таково, что точка $t_0 e$ является проекцией x на прямую L, тогда $|te-x|^2 = r^2 + |t-t_0|^2$, где r есть расстояние от x до прямой L. В результате интеграл в (2.8) перепишется в форме

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|t-t_0|^{k+\mu}}{|te-x|^{k+2}} dt = 2r^{\mu-1} \int\limits_0^{\infty} \frac{s^{k+\mu} ds}{(s^2+1)^{k/2+1}},$$

что завершает доказательство леммы.

Обратимся к функции (2.1) в полуплоскости D, лежащей слева от L. Наряду с ней введем в рассмотрение сингулярный интеграл

$$\phi^*(t_0 e) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|t-t_0| \ge \varepsilon} Q(t, te - t_0 e) \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{Q(t,e)\varphi(t)dt}{t-t_0}, \tag{2.9}$$

где принято во внимание свойство нечетности функции Q. Этот интеграл всегда существует, поскольку по предположению функция $Q(t,\xi)\varphi(t) \in C^{\mu,0}(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ и, значит,

$$|Q(t,e)\varphi(t) - Q(t_0,e)\varphi(t_0)| \le C|t-t_0|^{\mu}. \tag{2.10}$$

Сформулируем теперь основной результат относительно граничных свойств функции ϕ и ее производных.

Теорема 2.1 *Пусть ядро $Q(t,\xi) \in C^{n,\mu;n+1}(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$, $\quad n \ge 0$, однородно степени -1 и нечетно по ξ, а функция $\varphi \in C^{n,\mu}(\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию (2.2). Тогда функция ϕ непрерывно продолжима с полуплоскости D на ее замыкание, принадлежит пространству $C^{n,\mu}(\overline{D})$ и допускает оценку*

$$|\phi|_{C^{n,\mu}} \le C |Q|_{C^{n,\mu;n+1}} |\varphi|_{C^{n,\mu}}, \tag{2.11}$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от n и μ.

Предельные значения $\phi^+(t_0 e) = \lim \phi(x)$ при $x \to t_0 e$, $\quad x \in D$, связаны с сингулярным интегралом (2. 9) соотношением

$$\phi^+(t_0 e) = \sigma[Q(t_0,\xi); e]\varphi(t_0) + \phi^*(t_0 e), \tag{2.12}$$

Доказательство. Зафиксируем $0 \leq k \leq n$ и рассмотрим функцию $P(t,\xi) = Q_\xi^{(k+1)}(t,\xi)\varphi(t)$. По условию она принадлежит классу $C^{k,\mu;0}$, причем

$$|P|_{C^{k,\mu;0}} \leq C|Q|_{C^{n,\mu;n+1}}. \tag{2.13}$$

Кроме того, на основании теоремы 1.1 она удовлетворяет условию (2.6). Поэтому к $\psi = \phi^{(k+1)}$ можем применить лемму 2.3. Следовательно, функция $[\phi^{(k)}]' = \phi^{(k+1)}$ удовлетворяет условию леммы 2.2, на основании которой приходим к оценке

$$[\phi^{(k)}|_{\mu,D} \leq C_k|Q_\xi^{(k+1)}|_{C^{k,\mu;0}}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

С учетом (2.4) левую часть здесь можно заменить нормой (2.5) в пространстве $C^\mu(\overline{D})$. В соединении с (2.13) отсюда следует оценка (2.11).

Обратимся к обоснованию формулы (2.12). В силу уже доказанной непрерывности функции ϕ в замкнутой полуплоскости $\overline{D}$ ее предельное значение $\phi^\pm(t_0e)$ можно определять вдоль прямой L^0, ортогональной L и проходящей через точку t_0e. В этом случае, очевидно,

$$|te - x| \geq |t - t_0|, \quad x \in L^0. \tag{2.14}$$

В силу (2.2) интегрирование в (2.1) для $x \in L^0$ и в (2.9) можно вести по $|t - t_0| \leq R = 1 + |t_0|$. Рассмотрим в полуплоскости D функции

$$\psi_0(x) = \int\limits_{|t-t_0|\leq R} Q(t_0, te-x)\varphi(t_0)dt, \quad \psi_1(x) = \int\limits_{|t-t_0|\geq R} Q(t_0, te-x)\varphi(t_0)dt.$$

Последний интеграл здесь понимается как сингулярный на бесконечности, его существование обосновывается аналогично теореме 1.1. Из этой теоремы также следует, что сумма $\psi_0 + \psi_1$ в полуплоскости D тождественно равна $\sigma[Q(t_0,\xi);e]$ Как и при доказательстве соотношения (1.7) теоремы 1.1 убеждаемся, что в выражении $\psi_1(x)$ можно перейти к пределу при $x \to t_0e$ под знаком интеграла, который в силу нечетности функции Q равен нулю. Поэтому

$$\psi_0^+(t_0e) = \sigma[Q(t_0,\xi);e]\varphi(t_0). \tag{2.15}$$

С другой стороны, на основании (2.10), (2.14) и теоремы Лебега о мажорированной сходимости в выражении

$$\phi(x) - \psi_0(x) = \int\limits_{|t-t_0|\leq R} [Q(t, te-x)\varphi(t) - Q(t_0, te-x)\varphi(t_0)]dt$$

можно перейти к пределу при $x \to t_0e$, $x \in L^0$, под знаком интеграла. Поэтому

$$\phi^+(t_0e) - \psi_0^+(t_0e) = \int\limits_{|t-t_0|\leq R} \frac{Q(t,e)\varphi(t) - Q(t_0,e)\varphi(t_0)}{t-t_0}dt.$$

Очевидно, интеграл здесь совпадает с сингулярным интегралом (2.9), так что совместно с (2.15) в результате приходим к справедливости формулы (2.12).

Теорему 2.1 дополним случаем, когда ядро $Q(t,\xi) = Q(x,t,\xi)$ зависит от $x \in \overline{D}$, так что (2.1) переходит в интеграл

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}} Q(x,t,te-x)\varphi(t)dt, \quad x \in D. \tag{2.16}$$

Соответственно этому запишется и сингулярный интеграл (2.9):

$$\phi^*(t_0e) = \int_{\mathbb{R}} \frac{Q(t_0e,t,e)\varphi(t)dt}{t-t_0}.$$

Теорема 2.2 *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *с той разницей, что* $Q(x,t,\xi) \in C^{n,\nu;n+1}[(\overline{D}\times\mathbb{R})\times\mathbb{T}]$, $0 < \mu < \nu$. *Тогда функция* ϕ *принадлежит пространству* $C^{n,\mu}(\overline{D})$ *с соответствующей оценкой*

$$|\phi|_{C^{n,\mu}} \leq C|Q|_{C^{n,\nu;n+1}}|\varphi|_{C^{n,\mu}}, \tag{2.17}$$

для ее нормы и справедлива формула (2.12) *для ее предельных значений.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай интеграла

$$\psi(u,x) = \int_{\mathbb{R}} Q(u,t,te-x)\varphi(t)dt, \quad x \in D, \tag{2.18}$$

когда ядро $Q(t,\xi) = Q(u,t,\xi)$ зависит от некоторого параметра $u \in G \subseteq \mathbb{R}^s$ и принадлежит классу $C^{0,n,\nu;n+1}[(G \times \mathbb{R}) \times \mathbb{T}]$. Покажем, что функция $\psi(u,x)$ принадлежат пространству $C^{0,n,\mu}(G \times \overline{D})$ и справедлива соответствующая оценка ее нормы:

$$|\psi|_{C^{0,n,\mu}} \le C|Q|_{C^{0,n,\nu;n+1}}|\varphi|_{C^{n,\mu}}. \tag{2.19}$$

Как и в случае теоремы 2.1, достаточно установить аналогичные оценки для полунормы $[\psi_x^{(k)}]_{\mu,G\times D}$, $0 \le k \le n$. Поскольку $[\psi]_{\mu,G\times D} \le [\psi]_{\mu,G} + [\psi]_{\mu,D}$ и на основании теоремы 2.1 оценка (2.19) справедлива для полунормы $[\psi_x^{(k)}]_{\mu,P}$. Поэтому дело сводится к доказательству соответствующей оценки для $[\psi_x^{(m)}]_{\mu,G}$.

Зафиксируем $\varepsilon = \min(\nu-\mu,\mu)$, точки $u', u'' \in G, \quad u' \ne u''$, и рассмотрим функцию

$$\tilde{\psi}(x) = \frac{\psi(u',x) - \psi(u'',x)}{|u'-u''|^{\mu}},$$

которая определяется аналогично (2.1) по отношению к ядру

$$\tilde{Q}(t,\xi) = [Q(u',t,\xi) - Q(u'',t,\xi)]|u'-u''|^{-\mu}.$$

На основании леммы 1.2 функция $\tilde{Q}$ принадлежит пространству $C^{n,\varepsilon;0}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ и ее норма оценивается через норму $|Q|$ пространства $C^{0;n,\nu;n+1}[(G\times\mathbb{R})\times\mathbb{T}]$ равномерно по u', u''. Поэтому функции $\tilde{\psi}$ можем применить теорему 2.1, в которой μ следует заменить на ε.

На основании этой теоремы получаем, в частности, оценку вида (2.19) для sup-нормы функции $\tilde{\psi}$, равномерную по $u', u'' \in G$. Остается заметить, что верхняя грань по $u', u'' \in G$ левой части этой оценки совпадает с $[\psi_x^{(m)}]_{\mu,G}$.

Пусть далее G является замкнутой областью и ядро Q принадлежит классу $C^{n;n,\nu;n+1}[(G\times\mathbb{R})\times\mathbb{T}]$. Тогда при $0 \le k \le n$ функция $\psi_u^{(k)}$, определяемая по $Q_u^{(k)}$, аналогично (2.18) удовлетворяет условиям рассмотренного выше случая, в которых n следует заменить на $n-k$. В частности, для нее справедлива оценка (2.19). Следовательно, исходная функция $\psi(u,x)$ принадлежат пространству $C^{n;\mu}(G \times \overline{D})$, и справедлива соответствующая оценка ее нормы. Поскольку при $G = \overline{D}$ функция $\psi(x,x)$ совпадает с (2.16), отсюда следует справедливость первого утверждения теоремы.

Что касается формулы (2.12) для предельных значений, то эта формула, очевидно, справедлива для предельных значений $\psi^+(u,t_0e)$ интеграла (2.18) с соответствующим коэффициентом $\sigma[Q(u,t_0,\xi);e]$ и сингулярным интегралом $\psi^*(u,t_0e)$. В случае $G = \overline{D}$ на основании леммы 1.3 в этой формуле можно перейти к пределу при $u \to t_0e$. В соответствии с равенством $\psi(x,x) = \phi(x)$ в результате приходим к формуле (2.12) и для функции (2.16).

Заметим, что в силу леммы 1.3 в условиях теоремы 2.2 функция $\sigma[Q(t_0e,t_0,\xi);e]$ принадлежит классу $C^{n,\nu-0}(\mathbb{R})$. Поэтому формула (2.12) показывает, что первая часть теоремы 2.3 справедлива и для сингулярного интеграла $\phi^*(t_0e)$. Удобно эту теорему переформулировать по отношению к сингулярному интегралу непосредственно.

Теорема 2.3 *Пусть $k(t_0,t) \in C^{n,\nu}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, функция $\varphi \in C^{n,\mu}(\mathbb{R})$, $0 < \mu < \nu$, и удовлетворяет условию* (2.2). *Тогда функция ψ, определяемая сингулярным интегралом*

$$\psi(t_0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{k(t_0,t)\varphi(t)}{t-t_0}dt, \tag{2.20}$$

принадлежит $C^{n,\mu}(\mathbb{R})$ и справедлива оценка

$$|\psi|_{C^{n,\mu}} \le |k|_{C^{n,\nu}}|\varphi|_{C^{n,\mu}}.$$

Отметим, что при $n \geq 1$, аналогично лемме 1.3, обосновывается формула дифференцирования

$$\psi'(t_0) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t_0}[k(t_0, t_0 - t)\varphi(t_0 - t)]\frac{dt}{t}$$

сингулярного интеграла (2.20), или, в развернутой форме,

$$\psi'(t_0) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial k}{\partial t_0} + \frac{\partial k}{\partial t}\right)(t_0, t)\frac{\varphi(t)}{t - t_0}dt + \int_{\mathbb{R}} \frac{k(t_0, t)\varphi'(t)}{t - t_0}dt. \qquad (2.21)$$

Из этой формулы, в частности, следует, что случай $n \geq 1$ теоремы 2.3 является следствием $n = 0$.

3. ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА В ГЛАДКИХ ОБЛАСТЯХ

Напомним, что гладкая дуга Γ на плоскости $\mathbb{R}^2$ определяется как образ непрерывно дифференцируемой вектор-функции $x = \gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, которая взаимно однозначна и производная которой $\gamma'(t) \neq 0$ для всех t. Эта функция является (гладкой) параметризацией этой дуги. Точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ определяют концы дуги, остальные точки Γ называются внутренними. Очевидно, параметризация задает ориентацию дуги, т.е. естественный порядок следования точек, определяемый параметром. Если, наоборот, указана ориентация дуги, то каждая ее параметризация либо меняет, либо сохраняет эту ориентацию.

Элемент длины дуги с помощью параметризации γ определяется равенством $ds = |\gamma'(t)|dt$. Соответственно интеграл от функции φ на Γ вычисляется по формуле

$$\int_{\Gamma} \varphi(y)ds_y = \int_a^b \varphi[\gamma(t)]|\gamma'(t)|dt.$$

В частности, при $\varphi = 1$ получим длину l всей кривой.

Очевидно, если вещественная функция $f \in C^1[c, d]$ имеет своим образом $[a, b]$, причем f взаимно однозначна и $f'(t) \neq 0$, $c \leq t \leq d$, то функция $\alpha = \gamma \circ f$ будет также гладкой параметризацией дуги Γ. Функцию f можно подобрать так, чтобы $|\alpha'| \equiv 1$. Условимся параметризацию $y = \alpha(s)$ дуги Γ называть естественной, если ее производная α' по модулю тождественно равна единице. Этот термин используем и по отношению к параметру s. Очевидно, любые два естественных параметра отличаются друг от друга постоянным слагаемым.

По определению заданная на Γ функция $\varphi(y)$ непрерывно дифференцируема, если она обладает этим свойством как функция естественного параметра. Соответственно ее производная $\varphi' = \varphi'_s$ как функция на Γ непрерывна, она может быть определена также равенством

$$\varphi'(y_0) = \lim_{y \to y_0,\, y \in \Gamma} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{\pm|y - y_0|}, \qquad (3.1)$$

где верхний (нижний) знак соответствует точкам y, лежащим слева (справа) от y_0.

Если $y = (y_1, y_2)$ рассматривать как вектор-функцию на Γ, то, очевидно, эта функция непрерывно дифференцируема и ее производная

$$e(y) = (y|_{\Gamma})' \qquad (3.2)$$

представляет собой непрерывно меняющийся единичный касательный вектор на Γ. Ясно, что он определяется однозначно по ориентируемой кривой Γ.

Пример непрерывно дифференцируемой вещественной функции доставляет обращение гладкой параметризации γ дуги, т.е. функция $t = \varphi(y)$, обратная к $y = \gamma(t)$. Ее производная $\varphi'(y) = 1/|\gamma'(t)|$ всюду положительна. Верно и обратное — любая функция $t = \varphi(y) \in C^1(\Gamma)$, производная которой всюду отлична от нуля, определяет гладкую параметризацию. В соответствии с этим ее называем гладким параметром. Гладкий параметр можно вводить и в окрестности фиксированной точки $\tau \in \Gamma$, когда выполнено лишь условие $\varphi'(\tau) \neq 0$. Рассмотрим два типичных параметра этого типа.

В точке τ одна из координат единичного вектора (3.2) отлична от нуля. Если $e_j(\tau) \neq 0$, то декартова координата y_j как функция на Γ является гладким параметром в окрестности точки τ. Следовательно, в этой окрестности Γ является графиком некоторой непрерывно дифференцируемой вещественной функции h. Другими словами, существуют такие $\delta > 0$, $a \in \mathbb{R}$ и функция $h \in C^1[a-\delta, a+\delta]$, что гладкая дуга $\Gamma(\tau,\delta)$, описываемая соответствующим уравнением

$$\begin{aligned} &\{y_2 = h(y_1),\, |y_1 - a| \le \delta,\}, \quad e_1(\tau) \ne 0, \\ &\{y_1 = h(y_2),\, |y_2 - a| \le \delta\}, \quad e_2(\tau) \ne 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

содержится в Γ, причем τ является ее внутренней точкой. При достаточно малом δ пересечение Γ с соответствующей окрестностью в точности совпадает с этой дугой:

$$\Gamma(\tau,\delta) = \Gamma \cap U(\tau,\delta), \tag{3.4}$$

где $U(\tau,\delta) = \{|y_1 - a| \le \delta,\, |y_2 - h(y_1)| \le \delta\}$ при $e_1(\tau) \ne 0$ и $U(\tau,\delta) = \{|y_2 - a| \le \delta,\, |y_1 - h(y_1)| \le \delta\}$ при $e_2(\tau) \ne 0$. В самом деле, если $\Gamma(\tau,\delta_0)$ имеет тот же смысл, что и выше, то достаточно $\delta < \delta_0$ выбрать так, чтобы множество $U(\tau,\delta)$ не пересекалось с $\Gamma \setminus \Gamma(\tau,\delta)$.

Рассмотрим на Γ функцию $r = \pm|y-\tau|$, где верхний (нижний) знак соответствует точкам $y \in \Gamma$, лежащим справа (слева) от τ. Эта функция непрерывно дифференцируема и ее производная дается равенством

$$r' = \pm\frac{(y-\tau)e(y)}{|y-\tau|},$$

где числитель представляет собой скалярное произведение векторов $y-\tau$ и $e(y)$. В частности, $r'(\tau) = 1$ и, значит, в окрестности τ функция r является гладким параметром. Следовательно, существуют такие $\delta > 0$ и вектор-функция $\omega(r) \in C[-\delta_0, \delta_0]$, непрерывно дифференцируемая при $r \ne 0$, что $|\omega(r)| \equiv 1$, $\omega(0) = e(\tau)$, $r\omega'(r) \to 0$ при $r \to 0$ и гладкая дуга Γ_τ, описываемая уравнением $y = \tau + r\omega(r)$, $|r| \le \delta$, содержится в Γ. Очевидно, функция $\gamma(r) = \tau + r\omega(r)$ является ее гладкой параметризацией со свойством $|\gamma(r) - \tau| \equiv |r|$, параметризации такого типа называем радиальными (с центром в точке τ). Как и выше убеждаемся, при достаточно малом δ пересечение Γ с кругом $|y-\tau| \le \delta$ совпадает с Γ_τ.

Условимся вектор-функцию $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in C^1(\Gamma)$ называть сдвигом, если ее производная α' всюду отлична от нуля. В этом случае, очевидно, образ $\Gamma_1 = \alpha(\Gamma)$ является гладкой дугой, а обратное отображение α^{-1} есть также сдвиг. В этом смысле гладкая параметризация и обратное к ней отображение являются сдвигами.

Введем класс $C^{n,\mu}$, $n \ge 1, 0 \le \mu \le 1$, гладких дуг, считая по определению принадлежащими этому классу их естественные параметризации. Дуга, принадлежащая классу $C^{1,\mu}$ при некотором μ, называется ляпуновской. На дугах $\Gamma \in C^{n,\mu}$ по отношению к естественному параметру определяется и аналогичный класс функций $C^{n,\mu}(\Gamma)$. Это определение равносильно тому, что $\varphi, \varphi' \in C^{n-1,\mu}(\Gamma)$. Последнее условие можно принять за индуктивное определение класса $C^{n,\mu}$. В частности, по отношению к единичному касательному вектору (3.2) условие $\Gamma \in C^{n,\mu}$ равносильно $e \in C^{n-1,\mu}(\Gamma)$. Ясно также, что если дуга и заданный на ней сдвиг α принадлежат классу $C^{n,\mu}$, то образ $\alpha(\Gamma)$ будет дугой того же класса, а обратное отображение принадлежит классу $C^{n,\mu}$ на этой дуге. Этот факт проще всего установить индукцией по n. Из этих же соображений для дуги $\Gamma \in C^{n,\mu}$ функция h в (3.3) принадлежит классу $C^{n,\mu}[a-\delta, a+\delta]$.

Наряду с гладкими дугами важную роль будут играть и гладкие контуры. По определению простой гладкий контур есть образ непрерывно дифференцируемой на единичной окружности $\mathbb{T}$ вектор-функции, которая взаимно однозначна и производная которой всюду отлична от нуля. Производная здесь определяется аналогично (3.1) или, что равносильно, по отношению к угловой координате точки на окружности. Обьединение конечного числа попарно непересекающихся простых контуров дает составной контур. На таком контуре Γ можно ввести локальный естественный параметр длины дуги и производную можно понимать по отношению к этому параметру. Соответственно вводится и класс непрерывно дифференцируемых функций. Ясно, что производная функции $\varphi \in C^1(\Gamma)$ может быть определена и равенством (3.1). Понятие сдвига контуров совершенно аналогично случаю дуг. Точно также определяются классы $C^{n,\mu}$ контуров и функций на этих контурах.

Рассмотрим теперь (конечную или бесконечную) область D, ограниченную контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$. Контур ориентируем положительно по отношению к D, т.е. эта область остается слева. Соответственно этой ориентации понимается касательный вектор (3.2) и граничные значения $\phi^+(y_0)$, $y_0 \in \Gamma$, функций $\phi \in C(\overline{D})$.

Рассмотрим в области D интеграл

$$\phi(x) = \int_\Gamma Q(x, y, y - x)\varphi(y)ds_y, \quad x \in D, \tag{3.5}$$

где ядро Q нечетно и однородно степени -1 по ξ. Функции $\phi(x)$ соответствует на Γ сингулярный интеграл

$$\phi^*(y_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Gamma\cap\{|y-y_0|\geq\varepsilon\}} Q(y_0, y, y - y_0)\varphi(y)ds_y, \quad y_0 \in \Gamma. \tag{3.6}$$

Убедимся, что в предположении $Q(x, y, \xi) \in C^{\mu;1}[(\overline{D} \times \Gamma) \times \mathbb{T}]$, $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$, $\Gamma \in C^{1,\mu}$ этот интеграл всегда существует.

Доказательство основывается на следующем замечании. Пусть точки $y_\varepsilon^\pm \in \Gamma$ лежат по разные стороны от y_0, и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1}|t_\varepsilon^\pm - t_0| = 1. \tag{3.7}$$

Малую дугу с концами в этих точках обозначим Γ_ε. Тогда предел (3.6) и аналогичный предел интегралов по $\Gamma \setminus \Gamma_\varepsilon$ существуют одновременно.

В самом деле, подинтегральное выражение $\psi(y) = Q(y_0, y, y - y_0)\varphi(y)$ в окрестности y_0 допускает оценку $|\psi(y)| \leq C|y - y_0|^{-1}$. Поэтому, переходя к радиальному параметру r с центром в точке y_0, получим оценку

$$\Big| \int\limits_{\Gamma\cap\{|y-y_0|\geq\varepsilon\}} \psi(y)dr - \int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon} \psi(y)\, dr\Big| \leq C_1 \max \int\limits_\varepsilon^{r_\varepsilon^\pm} \frac{dr}{r}, \quad r_\varepsilon^\pm = |t_\varepsilon^\pm - t_0|.$$

Совместно с (3.7) отсюда следует справедливость высказанного утверждения.

С помощью этого замечания на сингулярный интеграл легко распространяется формула замены переменных

$$\int_{\alpha(\tilde\Gamma)} \psi(y)ds_y = \int_{\tilde\Gamma} \psi[\alpha(t)]|\alpha'(t)|ds_t, \tag{3.8}$$

где $\alpha : \tilde\Gamma \to \Gamma$ является сдвигом (дуги или контура) $\tilde\Gamma$, причем точка y_0 лежит внутри $\alpha(\tilde\Gamma)$. В частности, если $\tilde\Gamma$ есть отрезок $I = [-1, 1]$ действительной оси и $\alpha(0) = y_0$, то в рассматриваемом случае сингулярного интеграла (3.6) можем записать

$$\phi^*(y_0) = \int_I \frac{f(t)}{t}dt, \quad f(t) = Q\left[\alpha(0), \alpha(t), \frac{\alpha(t) - \alpha(0)}{t}\right] |\alpha'(t)|\varphi[\alpha(t)],$$

где принято во внимание нечетность и однородность степени -1 функции Q по ξ. По предположению $\Gamma \in C^{1,\mu}$, и, значит, функцию α можно выбрать в этом же классе. Очевидно, вектор-функция $[\alpha(t) - \alpha(0)]/t = \int\limits_0^1 \alpha'(st)ds$ принадлежит классу $C^\mu(I)$ и ее значения лежат в некотором круговом слое $G = \{\delta \leq |x| \leq \delta^{-1}\}$. Поэтому на основании леммы 2.1 (d) функция $f(t) \in C^\mu(I)$, и, значит, сингулярный интеграл (3.6) действительно существует.

Теорема 3.1. *Пусть ядро $Q(x, y, \xi)$ нечетно и однородно степени -1 по ξ, и для некоторого целого $n \geq 0$ выполнены условия гладкости*

$$\Gamma \in C^{n+1,\nu}, \quad Q(x, y, \xi) \in C^{n,\nu;n+1}[(\overline{D} \times \Gamma) \times \mathbb{T}]. \tag{3.9}$$

Тогда для $\varphi \in C^{n,\mu}(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, функция ϕ принадлежит классу $C^{n\mu}(\overline{D})$ с оценкой

$$|\phi|_{C^{n,\mu}} \leq C|Q|_{C^{n,\nu;n+1}}|\varphi|_{C^{n,\mu}}, \tag{3.10}$$

для ее нормы, где постоянная $C > 0$ зависит только от μ, ν и Γ. Предельные значения ϕ^+ этой функции связаны с сингулярным интегралом (3.6) соотношением

$$\phi^+(y_0) = \sigma(y_0)\varphi(y_0) + \phi^*(y_0), \quad \sigma(y_0) = \sigma[Q(y_0, y_0, \xi); e(y_0)]. \tag{3.11}$$

Доказательство проведем сначала для «криволинейного» варианта теоремы 2.3, когда роль прямой L играет график $\Gamma: \ y_2 = h(y_1)$ функции $h \in C^{n+1,\nu}(\mathbb{R})$, определяющий область $D = \{x_2 > h(x_1)\}$. Параметрически Γ задается уравнением $y = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $\gamma_1(t) = t$, $\gamma_2(t) = h(t)$. Требуется установить оценку (3.11) и формулу (3.12) для интеграла (3.5), взятого по данной бесконечной кривой, где плотность $\varphi \in C^{n,\mu}(\Gamma)$ имеет компактный носитель, т.е. для некоторого фиксированного $R > 0$ выполняется условие $\varphi(y) = 0$, $|y| \geq R$.

Рассмотрим преобразование $x = \alpha(\tilde{x})$ плоскости на себя по формуле $x_1 = \tilde{x}_1$, $x_2 = h(\tilde{x}_1) + \tilde{x}_2$, переводящее прямую $\mathbb{R}: \ x_2 = 0$ и полуплоскость $\tilde{D} = \{\tilde{x}_2 > 0\}$ на соответственно Γ и D. Очевидно, это отображение и обратное к нему как вектор-функции удовлетворяют условию Липшица, а их производные принадлежат классу $C^{n,\mu}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Поэтому на основании леммы 2.1 (b) оценку (3.11) достаточно установить по отношению к преобразованным функциям $\phi[\alpha(\tilde{x})]$ и $\varphi[\gamma(t)]$, связанных соотношением

$$\phi[\alpha(\tilde{x})] = \int_{\mathbb{R}} Q[\alpha(\tilde{x}), \gamma(t), \gamma(t) - \alpha(\tilde{x})]\varphi[\gamma(t)]|\gamma'(t)|dt, \quad \tilde{x}_2 > 0. \tag{3.12}$$

По условию $h \in C^{n+1,\nu}(\mathbb{R})$, так что матрица-функция

$$A(t,s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a(t,s) & 1 \end{pmatrix}, \quad a(t,s) = \frac{h(t) - h(s)}{t - s},$$

принадлежит классу $C^{n,\nu}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Аналогичный вид имеет и обратная матрица с заменой a на $-a$, поэтому найдется такое $\delta > 0$, что выполнены оценки

$$\delta|\xi| \leq |A(t,s)\xi| \leq \delta^{-1}|\xi|, \quad \xi \in \mathbb{R}^2. \tag{3.13}$$

При фиксированных t и s линейное преобразование $\xi \to A(t,s)\xi$ плоскости на себя обратимо и не меняет ее ориентации, при этом $\gamma(t) - \alpha(\tilde{x}) = A(t, \tilde{x}_2)(t\tilde{e} - \tilde{x})$ с единичным вектором $\tilde{e} = (1, 0)$, касательным к прямой $\mathbb{R}$. Соответственно этому (3.12) можем переписать в форме

$$\phi[\alpha(\tilde{x})] = \int_{\mathbb{R}} \tilde{Q}(\tilde{x}, t, t\tilde{e} - \tilde{x})\varphi[\gamma(t)]|\gamma'(t)|dt, \quad \tilde{Q}(\tilde{x}, t, \xi) = Q[\alpha(\tilde{x}), \gamma(t), A(t, \tilde{x}_2)\xi]. \tag{3.14}$$

Из (3.13) и леммы 2.1 следует, что функция $\tilde{Q}$ удовлетворяет условиям гладкости теоремы 2.3, т.е. принадлежит классу $C^{n,\nu;n+1}$. Поэтому на основании этой теоремы приходим к справедливости оценки (3.11).

Согласно формуле замены переменных (3.8), справедливой и для сингулярного интеграла (3.6), имеем:

$$\phi^*[\gamma(t_0)] = \int_{\mathbb{R}} Q[\gamma(t_0), \gamma(t), \gamma(t) - \gamma(t_0)]\varphi[\gamma(t)]|\gamma'(t)|dt.$$

Поскольку $\gamma(t) = \alpha(t\tilde{e})$, аналогично (3.13), это равенство можем записать в форме

$$\phi^*[\gamma(t_0)] = \int_{\mathbb{R}} \tilde{Q}(t_0\tilde{e}, t_0, t\tilde{e} - t_0\tilde{e})\varphi[\gamma(t)]|\gamma'(t)|dt.$$

Поэтому формула (2.12), примененная к последнему интегралу, дает соотношение

$$\phi^+[\gamma(t_0)] = \sigma[\tilde{Q}(t_0\tilde{e}, t_0, \xi), \tilde{e}]\varphi[\gamma(t_0)]|\gamma'(t_0)| + \phi^*[\gamma(t_0)]. \tag{3.15}$$

Из определения матрицы A видно, что $A(t_0, t_0)\tilde{e} = \gamma'(t_0)$. Очевидно, $\gamma'(t_0)/|\gamma'(t_0)|$ представляет собой единичный касательный вектор $e[\gamma(t_0)]$ к Γ в точке $\gamma(t_0)$. Поэтому на основании (1.10) имеем:

$$\sigma[\tilde{Q}(t_0\tilde{e}, t_0, \xi), \tilde{e}]|\gamma'(t_0)| = \sigma\{Q[\gamma(t_0), \gamma(t_0)], e[\gamma(t_0)]\}.$$

Следовательно, при подстановке γ формула (3.11) переходит в (3.15). Тем самым «криволинейный» вариант теоремы 2.3 установлен полностью.

Случай области $D = \{x_2 < h(x_1)\}$ рассматривается аналогично. Это же относится и к ситуации, когда Γ является графиком вида $x_1 = h(x_2)$.

Обратимся к случаю конечной гладкой области D теоремы. Из (3.9) и леммы 2.1 следует, для любого компакта $K \subseteq D$ функция $k(x,y) = Q(x,y,y-x) \in C^{n,\nu}(K \times \Gamma)$. По этой же причине, если для некоторого $\varepsilon > 0$ ядро Q удовлетворяет условию

$$Q(x,y,\xi) = 0 \quad \text{при} \quad |y-x| \geq \varepsilon,\, \xi \in \mathbb{T}, \tag{3.16}$$

то $k(x,y) = Q(x,y,y-x) \in C^{n,\nu}(\overline{D} \times \Gamma)$. В этом случае утверждения теоремы очевидны с $\sigma(y) = 0$ в (3.11).

Указанное замечание позволяет локализовать теорему по отношению к окрестности фиксированной точки $\tau \in \Gamma$. Напомним, что в некоторой окрестности U точки τ контур Γ может быть задан уравнением $x_2 = h(x_1)$ или $x_1 = h(x_2)$ соответственно случаям $e_1(\tau) \neq 0$ или $e_2(\tau) \neq 0$. При этом указанную окрестность можно выбрать в форме (3.3). В силу (3.9) вещественная функция h здесь принадлежит классу $C^{n+1,\mu}$. Можно также считать, что этим уравнением описывается и дуга $\Gamma(\tau,\delta) = \Gamma \cap U(\tau,\delta)$. Покроем контур Γ конечным числом таких окрестностей $U_i = U(\tau_i,\delta_i)$, $i = 1,\ldots,m$ и рассмотрим разбиение единицы $\chi_i(x) \in C_0^\infty(U_i)$, вписанное в это покрытие. Другими словами, функции χ_i неотрицательны, и их сумма тождественно равна 1 на Γ. Выберем еще срезывающую функцию $\chi_i^1(x) \in C_0^\infty(U_i)$, тождественно равную 1 в окрестности носителя функции χ_i. Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$[1 - \chi_i^1(x)]\chi_i(y) = 0 \quad \text{при} \quad |y-x| \geq \varepsilon. \tag{3.17}$$

Запишем

$$Q(x,y,\xi) = \sum_1^m \chi_j^1(x) Q(x,y,\xi)\chi_j(y) + \sum_1^m [1 - \chi_j^1(x)] Q(x,y,\xi)\chi_j(y).$$

В силу (3.17) слагаемые второй суммы удовлетворяют условию (3.16). Поэтому теорему достаточно установить по отношению к каждому слагаемому первой суммы в отдельности. Итак, опуская индекс j в обозначениях, дело сводится к интегралу

$$\phi(x) = \int_\Gamma \chi^1(x) Q(x,y,y-x)\chi(y)\varphi(y)ds_y, \quad x \in D, \tag{3.18}$$

где $\chi, \chi^1 \in C_0^\infty(U)$ в окрестности U вида (3.3) фиксированной точки $\tau \in \Gamma$ и подчинены условию $\chi(y)\chi^1(y) = \chi(y)$.

Пусть U определяется первым равенством в (3.3), так что дуга $\Gamma(\tau) = \Gamma \cap U$ описывается уравнением $y_2 = h(y_1)$, $|y_1 - a| \leq \delta$. Не ограничивая общности можно считать, что $U \cap D$ описывается неравенством $y_2 > h(y_1)$, $|y_1 - a| \leq \delta\}$. В силу равенства $\chi\chi^1 = \chi$ множитель $\chi^1(y)$ можно ввести под знак интеграла (3.18). В частности, обозначая $\chi^1\varphi$ снова через φ, можно считать, что функция φ обращается в нуль в окрестности концов дуги $\Gamma(\tau)$. Продолжим функцию h, определяющую эту дугу, на всю прямую с сохранением ее гладкости до функции $\tilde{h} \in C^{n+1,\mu}(\mathbb{R})$. Данная функция определяет бесконечную кривую $y_2 = \tilde{h}(y_1)$, которую обозначим $\tilde{\Gamma}$. Соответственно область $\tilde{D} = \{y_2 > \tilde{h}(y_1)$ лежит слева от этой кривой, ориентированной параметром y_1, и содержит исходную область D. Продолжая φ нулем на $\tilde{\Gamma}$, интеграл (3.18) можем брать по $\tilde{\Gamma}$. В результате теорема сводится к рассмотренному выше «криволинейному» варианту теоремы 2.3.

Библиографический список

1. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.

2. *Миранда К.* Уравнения с частными производными из эллиптического типа. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.