В.А.Гриценко

ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ ШЕСТОЙ СТЕПЕНИ ДЛЯ ЭРМИТОВЫХ МОДУЛЯРНЫХ ФОРМ РОДА 2

Эта работа посвящена изучению эрмитовых модулярных форм, т.е. модулярных форм для неопределенной унитарной группы $SU(n,n)$ над мнимым квадратичным полем. Мы определяем дзета-функцию $Z_F(s)$, отвечающую собственным функциям рода 2 всех операторов Гекке, степени локальных множителей которой равны шести (см. (2.I)). Как было показано в работе автора [5], дзета-функция $Z_F(s)$ для формы F из пространства Маасса (формы, полученные в результате подъема модулярных форм целого веса от одной переменной до эрмитовых модулярных форм рода 2 (см. [II], [6])) совпадает в основном с симметрическим квадратом стандартной дзета-функции соответствующей формы от одной переменной.

В настоящей статье доказано, что введенные дзета-функции "шестой степени" могут быть продолжены на всю комплексную плоскость и удовлетворяют некоторому функциональному уравнению. Доказательство основано на обобщении конструкции Андрианова из работы [I], в которой изучена спинорная дзета-функция (локальная степень равна 4) зигелевых модулярных форм рода 2.

§ I. ЭРМИТОВЫ МОДУЛЯРНЫЕ ФОРМЫ И КОЛЬЦА ГЕККЕ

Пусть $\mathbb{K}=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ - мнимое квадратичное поле, $\mathcal{O}=\mathbb{Z}[i]$ - кольцо целых поля $\mathbb{K}$. Модулярной группой Эрмита рода n называется группа

$$\Gamma_n=\left\{ g\in M_{2n}(\mathcal{O});\ {}^t\bar{g}\,J_n\,g=J_n \right\},\quad \text{где } J_n=\begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{I.I}$$

E_n - единичная матрица порядка n, ${}^tg$ - транспонированная матрица, а черта обозначает комплексное сопряжение. Унитарная группа сигнатуры (n,n) действует на верхней полуплоскости Эрмита рода n

$$\mathcal{H}_n=\left\{ Z\in M_n(\mathbb{C});\ (2i)^{-1}(Z-{}^t\bar{Z})>0 \right\} \tag{I.2}$$

по формуле

$$Z\to g\langle Z\rangle=(AZ+B)(CZ+\mathcal{D})^{-1}\quad \left(g=\begin{pmatrix} A & B \\ C & \mathcal{D}\end{pmatrix}\in U^+(n,n)\right).$$

Голоморфная на $\mathcal{H}_n$ функция F называется эрмитовой модулярной формой веса k, если

$$\det(CZ+\mathcal{D})^{-k} F(g\langle Z\rangle) = F(Z)$$

для любого $g\in\Gamma_n$. Все такие формы образуют конечномерное векторное пространство $\mathfrak{M}_k^n$. Известно (см. [4], [12], [15]), что F обладает разложением Фурье следующего вида

$$F(Z) = \sum_{N\in\mathfrak{N}_n(\mathcal{O})} f(N) e(\operatorname{tr}(NZ))\big(e(z)=\exp(2\pi i z)\big), \tag{I.3}$$

где суммирование ведется по всем полуцелым, неотрицательным эрмитовым матрицам порядка

$$N\in\mathfrak{N}_n(\mathcal{O}) = \left\{(n_{ij})=(\bar{n}_{ji})\geqslant 0;\ n_{ii}\in\mathbb{Z},\ 2n_{ij}\in\mathcal{O},\ 1\leqslant i,j\leqslant n\right\}.$$

Форма называется параболической, если $f(N)\neq 0$ только для $N>0$. Если F - параболическая форма, то

$$|f(N)| = O((\det N)^{\frac{k}{2}}). \tag{I.4}$$

Введем две группы

$$S^n = \left\{ g\in M_{2n}(\mathbb{K});\ {}^t\bar{g}\, J_n\, g = m(g) J_n,\ m(g)>0 \right\},$$
$$S_p^n = \left\{ g\in M_{2n}(\mathcal{O}[p^{-1}])\cap S^n;\ m(g)=p^{\delta},\ \delta\in\mathbb{Z} \right\}, \tag{I.5}$$

где p - простое рациональное и $\mathcal{O}[p^{-1}] = \{ap^b;\ a\in\mathcal{O},\ b\in\mathbb{Z}\}$. Пары (Γ_n, S^n) и (Γ_n, S_p^n) являются парами Гекке, поэтому можно определить кольца Гекке (см. [2], [7])

$$L^n = L_{\mathbb{Q}}(\Gamma_n, S^n), \qquad L_p^n = L_{\mathbb{Q}}(\Gamma_n, S_p^n).$$

Кольца Гекке L^n и L_p^n коммутативны и

$$L^n = \bigotimes_p L_p^n, \tag{I.6}$$

где тензорное произведение берется по всем простым $p\in\mathbb{Z}$.

Определим представление кольца Гекке L^n на пространстве эрмитовых форм $\mathfrak{M}_k^n$. Для $M=\begin{pmatrix} A & B\\ C & \mathcal{D}\end{pmatrix}$ положим

$$(F|_k M)(Z) = m(M)^{nk-n^2}\det(CZ+\mathcal{D})^{-k} F(M\langle Z\rangle).$$

Если $X = \sum a_i \Gamma_n M_i \in L^n$, то функция

$$F|_k X = \sum a_i F|_k M_i \quad (F \in \mathfrak{M}_k^n) \tag{I.7}$$

принадлежит пространству $\mathfrak{M}_k^n$, а $|_k X$ задает представление кольца Гекке на этом пространстве.

В этом параграфе мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА I. Пусть модулярная форма Эрмита рода n веса k

$$F(Z) = \sum_N f(N) \exp(2\pi i \, tr(NZ))$$

является собственной функцией всех операторов Гекке из кольца L_p^n, тогда формальный степенной ряд

$$\sum_{\ell \geq 0} f(p^\ell N) t^\ell \tag{I.8}$$

является рациональной функцией для любой матрицы $N \in \mathfrak{N}_n(\mathcal{O})$.

Доказательство теоремы основано на исследовании поведения многочленов с коэффициентами из кольца Гекке L_p^n при расширении кольца L_p^n до кольца Гекке подходящей параболической подгруппы. Этот метод был применен впервые А.Н.Андриановым в [2] в случае группы $Sp_n(\mathbb{Z})$ (см. также статью автора [7] и цитированную там литературу). Ряды (I.8) теоремы I связаны с "треугольными" параболическими подгруппами

$$\Gamma_{0,n} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & \mathfrak{D} \end{pmatrix} \in \Gamma_n \right\}, \qquad S_{0,p}^n = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & \mathfrak{D} \end{pmatrix} \subset S_p^n \right\},$$

где 0_n – нулевая матрица порядка n. Пара групп $(\Gamma_{0,n}, S_{0,p}^n)$ является парой Гекке, и определено кольцо

$$L_{0,p}^n = L_{\mathbb{Q}}(\Gamma_{0,n}, S_{0,p}^n). \tag{I.9}$$

Кольцо L_p^n можно рассматривать как подкольцо кольца $L_{0,p}^n$. Действительно, для любого элемента $X = \sum a_i \Gamma_n M_i \in L_p^n$ можно так выбрать представители M_i в левых смежных классах, чтобы $M_i \subset S_{0,p}^n$. Тогда отображение

$$\varepsilon : X \longmapsto \sum a_i \Gamma_{0,n} M_i \qquad (M_i \in S_{0,p}^n) \tag{I.10}$$

является гомоморфным вложением кольца L_p^n в кольцо $L_{0,p}^n$.

Если $F \in \mathfrak{M}_k^n$ – модулярная форма Эрмита рода n и веса k и $X \in L_{0,p}^n$ – произвольный элемент кольца Гекке $L_{0,p}^n$, то функция $F|_k X$ (см. (I.7)) имеет разложение Фурье вида (I.3) (модулярность относительно подгруппы $\Gamma_{0,n}$). Это позволяет определить действие элементов кольца $L^n_{0,p}$ на коэффициентах Фурье

$$f : N \longrightarrow f(N) \qquad (N \in \mathfrak{N}_n(\mathcal{O}))$$

функции F :

$$(F|_k X)(Z) = \sum_{N \in \mathfrak{N}_n(\mathcal{O})} (f|_k X)(N) e(\operatorname{tr}(NZ)) . \tag{I.II}$$

Легко проверить, что элементы

$$\Lambda_+(p) = \Gamma_{0,n} \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & pE_n \end{pmatrix} \Gamma_{0,n} \quad \text{и} \quad \Lambda_-(p) = \Gamma_{0,n} \begin{pmatrix} pE_n & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \Gamma_{0,n} \tag{I.I2}$$

действуют на коэффициенты Фурье следующим образом

$$(f|_k \Lambda^{\ell}_+(p))(N) = f(p^{\ell} N) \quad (\ell \geq 1) \tag{I.I3}$$

и

$$(f|_k \Lambda_-(p))(N) = \begin{cases} f(p^{-1}N), & \text{если } N \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p), \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{I.I4}$$

поэтому ряд (I.8) из теоремы I совпадает с рядом

$$\sum_{\ell \geq 0} (f|_k \Lambda^{\ell}_+(p))(N) t^{\ell} .$$

ЛЕММА I.I. Существует многочлен $Q^{(n)}_p(t)$ с коэффициентами из кольца Гекке L^n_p, делящийся справа на "линейный" множитель $(1 - \Lambda_+(p) t)$ в кольце $L^n_{0,p}[t]$, т.е.

$$Q^{(n)}_p(t) = R_p(t)(1 - \Lambda_+(p) t) \qquad (R_p(t) \in L^n_{0,p}[t]) \tag{I.I5}$$

и

$$\deg Q^{(n)}_p(t) = \begin{cases} 2^n, & \text{если } p \text{ – простое или ветвящееся в } \mathcal{O}, \\ \binom{2n}{n}, & \text{если } p \text{ – разложимо в } \mathcal{O} . \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I.

Пусть

$$Q^{(n)}_p(t) = \sum_i q_{i,p} t^i \qquad (q_{i,p} \in L^n_p)$$

многочлен из леммы I. Положим

$$Q_{p,F}^{(n)}(t) = \sum_i \lambda(q_{i,p}) t^i \in \mathbb{C}[t], \qquad (I.16)$$

где

$$F|_k q_{i,p} = \lambda(q_{i,p}) F.$$

Тогда для любой матрицы $N \in \mathcal{N}_n(\mathcal{O})$

$$Q_{p,F}^{(n)}(t) \cdot f(N) = (f|_k Q_p^{(n)}(t))(N) = \sum_i (f|_k q_{i,p})(N) t^i,$$

поэтому в кольце формальных степенных рядов

$$Q_{p,F}^{(n)}(t)\left(\sum_{\ell \geq 0} f(p^\ell N) t^\ell\right) = \sum_{\ell \geq 0} (f|_k Q_p^{(n)}(t)|_k \Lambda_+^\ell(p))(N) t^\ell =$$

$$= ((f|_k Q_p^{(n)}(t))|_k \sum \Lambda_+^\ell(p) t^\ell)(N) = (f|_k R_p(t))(N).$$

Теорема доказана.

Для доказательства леммы I.I нам потребуются некоторые свойства колец Гекке L_p^n, установленные в [5].

Пусть $\mathbb{Q}_p$ – поле p-адических чисел и

$$\mathbb{K}_p = \mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, \quad \mathcal{O}_p = \mathcal{O} \cdot \mathbb{Z}_p, \quad \Phi_p = (2i)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$$

– соответственно алгебра над $\mathbb{Q}_p$, максимальная решетка в этой алгебре и эрмитова форма на векторном пространстве над $\mathbb{K}_p$ ($2i$ рассматривается как элемент алгебры $\mathbb{K}_p$). Определим унитарную группу G_p^n над алгеброй $\mathbb{K}_p$ и ее максимальную компактную подгруппу U_p^n:

$$G_p^n = \{ g \in GL_{2n}(\mathbb{K}_p);\ g^* \Phi_p g = m(g) \Phi_p,\ m(g) \in \mathbb{Q}_p^\times \},$$

где для матрицы $g = (g_{ij})$ – $g^* = (g_{ji}^\sigma)$, а σ – инволюция алгебры $\mathbb{K}_p$,

$$U_p^n = \{ g \in G_p^n \cap M_{2n}(\mathcal{O}_p);\ m(g) \in \mathbb{Z}_p^\times \}.$$

ЛЕММА I.2. Кольцо L_p^n изоморфно локальному колцу Гекке $L_{\mathbb{Q}}(U_p^n, G_p^n)$.

$$L_p^n \overset{\vee}{\simeq} L(U_p^n, G_p^n).$$

Утверждение леммы вытекает из одноклассности поля (см. теорему 5.30 [I4]).

Для произвольного коммутативного кольца $\mathbb{A}$ положим

$$GL_{2n,n} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & \mathcal{D} \end{pmatrix} \in GL_{2n}(\mathbb{A}) \right\}.$$

Пары $(GL_{2n}(\mathbb{Z}_p), GL_{2n}(\mathbb{Q}_p))$ и $(GL_{2n,n}(\mathbb{Z}_p), GL_{2n,n}(\mathbb{Q}_p))$ – являются парами Гекке, поэтому можно определить кольца

$$H_p^{2n} = L(GL_{2n}(\mathbb{Z}_p), GL_{2n}(\mathbb{Q}_p)) \quad \text{и} \quad H_p^{2n,n} = L(GL_{2n,n}(\mathbb{Z}_p), GL_{2n,n}(\mathbb{Q}_p)).$$

Кольцо H_p^{2n} является подкольцом кольца $H_p^{2n,n}$ (см. (I.I0) и [7]).

ЛЕММА I.3. Пусть p – разложимо в поле $\mathbb{K}$ (т.е. $p = \Pi\overline{\Pi}$ и $(\Pi)_{\mathcal{O}} \neq (\overline{\Pi})_{\mathcal{O}}$), тогда кольцо $L^n_{0,p}$ изоморфно кольцу многочленов над кольцом Гекке $H_p^{2n,n}$ параболической подгруппы $GL_{2n,n}$. Кольцо L_p^n переходит при этом изоморфизме в кольцо многочленов над H_p^n

$$\begin{array}{ccc} L^n_{0,p} & \xrightarrow{\ \rho\ } & H_p^{2n,n}[x^{\pm 1}] \\ \uparrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \uparrow{\scriptstyle \varepsilon'} \\ L_p^n & \xrightarrow{\ \rho\ } & H_p^n[x^{\pm 1}] \end{array}$$

(ε и ε' – вложения колец).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $(\mu, -\mu)$ образ элемента $(2i)^{-1}$ в алгебре $\mathbb{K}_p \simeq \mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p$ и положим $e = (1,0)$, $e^{\sigma} = (0,1) \in \mathbb{K}_p$. Выполним замену переменных с матрицей C $(g \to C^{-1} g C)$

$$C = \begin{bmatrix} e^{\sigma} I_n & -\mu^{-1} e E_n \\ \mu^{-1} e I_n & e^{\sigma} E_n \end{bmatrix}, \text{ где } I_n = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}.$$

Унитарная группа $G_p^{2n,n}$ преобразуется в группу

$$\widetilde{G}_p^{2n,n} = \{(Y,X) \in GL_{2n}(\mathbb{Q}_p) \times GL_{2n,n}(\mathbb{Q}_p);\ {}^tYX = \alpha E_{2n},\ \alpha \in \mathbb{Q}_p^{\times}\}$$

(ср. с [I4] § 2), а группа $\mathcal{U}_p^{2n,n}$ – в группу

$$\widetilde{\mathcal{U}}_p^{2n,n} = \{(\alpha\, {}^t\gamma^{-1}, \gamma);\ \gamma \in GL_{2n,n}(\mathbb{Z}_p),\ \alpha \in \mathbb{Z}_p^{\times}\}.$$

Двойной класс элемента $(\alpha\, {}^tM^{-1}, M) \in \widetilde{G}_p^{2n,n}$ по группе $\widetilde{\mathcal{U}}_p^{2n,n}$ определяется двойным классом $GL_{2n,n}(\mathbb{Z}_p) M\, GL_{2n,n}(\mathbb{Z}_p)$ и порядком δ идеала $(\alpha)_{\mathbb{Z}_p}$ $(\delta = \mathrm{ord}_p\, \alpha)$. Положим

$$\tilde{\mathcal{U}}_p^{2n,n}(\alpha\,{}^tM^{-1},M)\tilde{\mathcal{U}}_p^{2n,n}=(M,\delta)_p\ .$$

При умножении двух двойных классов $(M_1,\delta_1)_p$ и $(M_2,\delta_2)_p$ в кольце Гекке $L(\tilde{\mathcal{U}}_p^{2n,n},\tilde{G}_p^{2n,n})$ отвечающие им двойные классы элементов M_1 и M_2 по $GL_{2n,n}(\mathbb{Z}_p)$ перемножаются как элементы кольца $H_p^{2n,n}$, а их порядки δ_1 и δ_2 складываются. В частности, $(M,0)_p(E_{2n},1)_p=$ $=(M,\delta)_p=(E_{2n},1)_p^{\delta}\ (M,0)_p$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ I.4. Пусть $p=\Pi\bar{\Pi}$ и $(\Pi)_{\mathcal{O}}\neq(\bar{\Pi})_{\mathcal{O}}$, тогда элементы

$$\Delta_\Pi=\Gamma_n\, diag(\Pi,\ldots,\Pi)\Gamma_n\ ,\quad \Delta_{\bar{\Pi}}=\Gamma_n\, diag(\bar{\Pi},\ldots,\bar{\Pi})\Gamma_n\ ,$$

$$T_{i,2n}(\Pi)=\Gamma_n diag(\underbrace{1,\ldots,1}_{i},\ \underbrace{\Pi,\ldots,\Pi}_{n-i},\ \underbrace{p,\ldots,p}_{i},\ \underbrace{\Pi,\ldots,\Pi}_{n-i})\Gamma_n\ (0<i<n)$$

$$T_{2n}(p)=\Gamma_n\, diag(1,\ldots,1,\ p,\ldots,p)\Gamma_n\ ,\quad T_{i,2n}(\bar{\Pi})\quad (0<i<n)$$

алгебраически независимы в кольце L_p^n и вместе с элементами Δ_Π^{-1} и $\Delta_{\bar{\Pi}}^{-1}$ порождают это кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ I.I.

Разберем случай разложимого p . В статье [7] (см. пример I [7]) установлено, что многочлен $S^{2n,n}(t)\in H_p^{2n}[t]$, имеющий образ

$$\Phi_{2n}(S^{2n,n}(t))=\prod_{1\le i_1<\ldots<i_n\le 2n}(1-x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_n}t)$$

при сферическом отображении (см. равенства (3) и (4) статьи [7]), раскладывается на множители в кольце $H_p^{2n,n}[t]$:

$$S^{2n,n}(t)=R(t)(1-p^{\frac{n(n+1)}{2}}\Lambda_+^{2n,n}t)\ .$$

Если ρ - изоморфизм из леммы I.3, то $\rho^{-1}(\Lambda_+^{2n,n})=\Lambda_+(p)\in L_{0,p}^n$ (см. (I.I2)), и в качестве многочлена $Q_p^{(n)}(t)$, удовлетворяющего требованиям леммы I.I, можно взять ρ-прообраз многочлена $S^{2n,n}$:

$$Q_p^{(n)}(t)=\rho^{-1}(S^{2n,n}(p^{-\frac{n(n+1)}{2}}\times t))\ , \qquad (I.I7)$$

где изоморфизм ρ^{-1} сохраняет пермменную t .

Для простых рациональных p , которые остаются простыми или ветвятся в $\mathcal{O}=\mathbb{Z}[i]$, в качестве многочленов $Q_p^{(n)}$ можно взять знаменатели рядов Гекке. Опишем эти многочлены.

Обозначим через $T_n(p^\delta)$ сумму всех различных двойных смежных классов элементов $g \in S_p^n$ с $m(g) = p^\delta$ (см. (I.5))

$$T_n(p^\delta) = \sum_{m(g)=p^\delta} \Gamma_n g \Gamma_n .$$

Формальный степенной ряд

$$Z_p^{(n)}(t) = \sum_{\delta \geq 0} T_n(p^\delta) t^\delta \tag{I.18}$$

называется рядом Гекке.

Эти ряды являются рациональными функциями со знаменателями $Q_p^{(n)}(t)$ степени 2^n, если p – простое или ветвящееся в $\mathcal{O}$ (см. [10]). Образы многочленов $Q_p^{(n)}(t)$ при сферическом отображении имеют следующий вид

$$\Phi_n(Q_p^{(n)}(t)) = \begin{cases} (1 - x_0 t) \prod\limits_{r=1}^{n} \prod\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} (1 - p^{-r} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_r} x_0 t) & (p\text{-простое}) \\ (1 - x_0 t) \prod\limits_{r=1} \prod\limits_{1 \leq i_1 < \ldots \leq i_r \leq n} (1 - (p^{-r} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_r})^2 x_0 t) & (p = 2) . \end{cases}$$

Справедливость разложения (I.15) из леммы I.I для этих многочленов доказывается так же, как и в случае группы $S_{p_n}(\mathbb{Z})$ (см. [2] , [7] и цитированную там литературу). Лемма I.I доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для разложимых p ряд Гекке (I.18) также является рациональной функцией, знаменатель которой приводим. Многочлен (I.17) является неприводимым множителем наибольшей степени, входящим в этот знаменатель (см. [5]).

§ 2. ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ ШЕСТОЙ СТЕПЕНИ И РЯДЫ ДИРИХЛЕ

В этом параграфе мы определим дзета-функции, отвечающие модулярным формам Эрмита рода 2, степень локальных множителей которых равна 6.

Введем стандартные элементы колец Гекке L_p^2 :

$$T_p = \Gamma_2 diag(1,1,p,p) \Gamma_2 , \quad T_{1,p} = \Gamma_2 diag(1,p,p^2,p) \Gamma_2 ,$$

$$T_\Pi = \Gamma_2 diag(1,\Pi,p,\Pi) \Gamma_2 \quad (p = \Pi\overline{\Pi}), \qquad \Delta_q = \Gamma_2 q E_4 \Gamma_2 .$$

ЛЕММА 2.I. Многочлены $Q_p^{(2)}(t)$, являющиеся знаменателями ряда Гекке (I.18) (p – простое и $p=2$), и многочлен (I.17) (p – разложимо) имеют следующие коэффициенты:

I. p – простое в $\mathbb{K}\left(\left(\frac{-4}{p}\right) = -1\right)$

$$Q_p^{(2)}(t) = 1 - T_p t + (p T_{1,p} + p(p^3 + p^2 - p + 1)\Delta_p) t^2 - p^4 \Delta_p T_p t^3 + p^8 \Delta_p^2 t^4 ;$$

2. $p=2$

$$Q_2^{(2)}(t)=1-(T_2-3\Delta_{1+i})t+(2T_{1+i}^2-8\Delta_{1+i}(T_2+\Delta_{1+i})t^2-(4\Delta_{1+i})^2(T_2-3\Delta_{1+i})t^3+$$
$$+(4\Delta_{1+i})^4t^4;$$

3. $p=\Pi\bar{\Pi}$ $\left(\left(\frac{-4}{p}\right)=1\right)$

$$Q_p^{(2)}(t)=1-T_pt+(pT_\Pi T_{\bar{\Pi}}-p^4\Delta_p)t^2-(p^3(T_\Pi^2\Delta_{\bar{\Pi}}+T_{\bar{\Pi}}^2\Delta_\Pi)-$$
$$-2p^4\Delta_pT_p)t^3+p^4\Delta_p(pT_\Pi T_{\bar{\Pi}}-p^4\Delta_p)t^4-p^8\Delta_p^2T_pt^5+p^{12}\Delta_p^3t^6.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые два многочлена вычислены в работе [10]. Пусть $\omega=\Phi_4\circ\rho$ – композиция изоморфизма ρ, построенного в лемме I.3, и сферического отображения кольца Гекке полной линейной группы GL_4 (см. [7] формула (3)). Тогда

$$\omega(Q_p^{(2)}(t))=\prod_{1\leq i<j\leq 4}(1-p^{-3}x_ix_jxt),$$

$$\omega(\Delta_{\bar{\Pi}})=x,\qquad \omega(\Delta_\Pi)=p^{-10}xx_1x_2x_3x_4,$$

$$\omega(T_{\bar{\Pi}})=p^{-1}xs_1(x_1,\dots,x_4),\quad \omega(T_\Pi)=p^{-6}xs_3(x_1,\dots,x_4),$$
$$\omega(T_p)=p^{-3}xs_2(x_1,\dots,x_4),$$

где s_i – i-я элементарная симметрическая функция от переменных x_1, x_2, x_3, x_4. Этих соотношений достаточно для завершения доказательства леммы.

Пусть $F\in\mathfrak{M}_k^2$ – модулярная форма Эрмита веса k, являющаяся собственной функцией всех операторов Гекке из кольца $L(\Gamma_2,S^2)$ (см. (I.7)). Заменим в многочленах $Q_p^{(2)}(t)$ элементы колец Гекке на соответствующие собственные значения (см. (I.17)). Полученные многочлены обозначим через $Q_{p,F}^{(2)}(t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Бесконечное произведение

$$Z_F(s)=\prod_{p\text{-простое}\in\sigma}(1-p^{k-2-s})^{-2}Q_{F,p}^{(2)}(p^{-s})^{-1}\prod_p Q_{F,p}^{(2)}(p^{-s}),\tag{2.I}$$

где первое произведение берется по всем простым $p\in\mathbb{Z}$, которые остаются простыми в $\mathbb{K}=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, а второе – по всем остальным простым $p\in\mathbb{Z}$, назовем дзета-функцией эрмитовой модулярной формы F.

Из оценки (I.4) коэффициентов Фурье модулярных форм легко следует, что дзета-функция $Z_F(s)$ определена в некоторой правой полуплоскости.

ТЕОРЕМА 2. Пусть F – параболическая модулярная форма Эрмита рода 2 и веса k, являющаяся собственной функцией всех операторов Гекке. Предположим, что ее коэффициент Фурье $f(E_2)\neq 0$, тогда в некоторой правой полуплоскости справедливо разенство

$$f(E_2)Z_F(s)=L\left(s-k+2,\left(\frac{-4}{\cdot}\right)\right)(1-2^{2k-4-2s})\zeta(2s-2k+4)$$

$$\zeta(s-k+3)\sum_{m\geq 1} f(mE_2)m^{-s},$$

где $f(N)$ – коэффициент Фурье формы f с номером N (см. (I.3)), а $\left(\frac{-4}{\cdot}\right)$ – квадратичный характер мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$.

Для доказательства теоремы необходимо вычислить в явном виде разложения многочленов $Q_p^{(2)}(t)$ в кольце Гекке $L_{0,p}^2$ параболической подгруппы $\Gamma_{0,2}$ (см. (I.9)). Положим для краткости

$$\Gamma_0=\Gamma_{0,2}$$

и введем стандартные элементы кольца $L_{0,p}^2$:

$$\Gamma_0(a,b,c,d)\Gamma_0=\Gamma_0\,diag(a,b,c,d)\Gamma_0,$$

$$Tr\left(\Gamma_0\begin{bmatrix}A & B\\ C & \mathcal{D}\end{bmatrix}\Gamma_0\right)=\Gamma_0\begin{bmatrix}A' & B\\ C & \mathcal{D}\end{bmatrix}\Gamma_0+\Gamma_0\begin{bmatrix}\overline{A} & \overline{B}\\ \overline{C} & \overline{\mathcal{D}}\end{bmatrix}\Gamma_0,$$

$$\Delta_p=\Gamma_0(p,p,p,p)\Gamma_0,\ \Lambda_-(p)=\Gamma_0(p,p,1,1)\Gamma_0,\ \Lambda_+(p)=\Gamma_0(1,1,p,p)\Gamma_0.$$

ЛЕММА 2.2. В кольце многочленов $L_{0,p}^2[t]$ многочлен $Q_p^{(2)}(t)$ распадается в произведение трех множителей

$$Q_p^{(2)}(t)=(1-\Lambda_-(p)t)R_p(t)(1-\Lambda_+(p)t).$$

Если $p=\Pi\overline{\Pi}$ – разложимо в кольце $\mathcal{O}\left(\left(\frac{-4}{p}\right)=1\right)$, то

$$R_p(t)=(1-\Gamma_0(1,p,p,1)\Gamma_0 t+(Tr(\Gamma_0(p\Pi,\overline{\Pi},\Pi,p\overline{\Pi})\Gamma_0)+$$

$$+pE_p+(p^3+p^2+p-p^4)\Delta_p)t^2+\left(Tr\left(\Gamma_0\begin{bmatrix}p & 0 & 0 & a\overline{\Pi}\\ 0 & p^2 & ap\Pi & 0\\ 0 & 0 & p^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & p\end{bmatrix}\Gamma_0\right)-\right.$$

$$\left.-p^4\Delta_p\Gamma_0(1,p,p,1)\Gamma_0\right)t^3+p^5\Delta_p(E_p+p\Delta_p+\Delta_p-p^2\Delta_p)t^4,$$

где

$$E_p=\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{Z}(\mathrm{mod}\,p)\\(a,b)\neq(0,0)}}\Gamma_0\begin{bmatrix}p&0&a&b\bar\Pi\\0&p&b\Pi&0\\0&0&p&0\\0&0&0&p\end{bmatrix}+\sum_{\substack{c,a,b\in\mathbb{Z}(\mathrm{mod}\,p)\\(a,b)\neq(0,0)\\\varepsilon=\mathrm{tr}\,\Pi}}\begin{bmatrix}p&0&\varepsilon ca&a\Pi+bc\bar\Pi\\0&p&a\bar\Pi+bc\Pi&\varepsilon b\\0&0&p&0\\0&0&0&p\end{bmatrix},$$

Если p - простое в $\mathcal{O}((\frac{-4}{p})=-1)$, то

$$R_p(t)=1-\Gamma_0(1,p,p,1)\Gamma_0 t+(p\sum_{\substack{X={}^t\bar X\\X\,\mathrm{mod}\,p\\\mathrm{rang}_p X\leq 1}}\Gamma_0\begin{bmatrix}pE_2&X\\0&pE_2\end{bmatrix}+p^2(p-1)\Delta_p)t^2;$$

Если $p=2$ - ветвится в $\mathcal{O}$, то

$$R_2(t)=1-(\Gamma_0(1,2,2,1)\Gamma_0+G_2-3\Delta_{1+i})t+$$

$$+(6\Delta_2-2G_2\Delta_{1+i}+2F_2+2\Gamma_0\begin{bmatrix}1+i&0&0&1\\0&2(1+i)&2i&0\\0&0&2(1+i)&0\\0&0&0&1+i\end{bmatrix}\Gamma_0-2\Delta_{1+i}\Gamma_0(1,2,2,1)\Gamma_0)t^2-$$

$$-16\Delta_2(G_2-\Delta_{1+i})t^3,$$

где

$$G_2=\Gamma_0\begin{bmatrix}1-i&0&0&1\\0&1+i&1&0\\0&0&1-i&0\\0&0&0&1+i\end{bmatrix}\Gamma_0,\quad F_2=\sum_{\substack{X\,\mathrm{mod}\,2\\{}^tX=X\in M_2(\mathbb{Z})\\\mathrm{rang}_2X=1\\\beta\in\mathbb{Z}(\mathrm{mod}\,2)}}\Gamma_0\begin{bmatrix}2E_2&X+\beta\begin{pmatrix}0&1+i\\1-i&0\end{pmatrix}\\0&2E_2\end{bmatrix}.$$

Доказательство леммы в случае простого p и $p=2$ легко получить непосредственными вычислениями. Для разложимого p явный вид многочлена $R_p(t)$ можно получить, применяя изоморфизм ρ из леммы I.3 к разложению многочлена $S^{4,2}(t)$, полученному в примере 3 работы [7].

ЛЕММА 2.3. Пусть $F\in\mathfrak{M}_k^2$, $f(N)$ - коэффициент Фурье формы F и $f(E_2)\neq 0$. Тогда действие коэффициентов многочлена $R_p(t)$ на коэффициенты f (см. (I.II)) описывается следующими формулами

$$(f|_k(1-\Lambda_-(p)t)R_p(t))(E_2)=$$

$$=\begin{cases}(1-p^{2k-4}t^2)(1-p^{k-2}t)(1-p^{k-3}t)f(E_2) & \text{, если } \left(\frac{-4}{p}\right)=1, \\ (1-p^{k-2}t)(1-p^{k-3}t)f(E_2)\text{, если } \left(\frac{-4}{p}\right)=-1, \\ (1-2^{k-3}t)f(E_2)\text{, если } p=2. \end{cases}$$

Доказательство леммы сводится к вычислению гауссовых сумм различных типов.

ЗАМЕЧАНИЕ. Действие многочлена $R_p(t)$ на коэффициенты f при $p=2$ существенно зависит от выбора матрицы N . В частности,

$$(f|_k(1-\Lambda_-(2)t)R_2(t))\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}=(1-2^{k-3}t)(1-2^{k-4}t)f\left(\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}\right).$$

Для доказательства теоремы 2 достаточно повторить последовательно для всех простых p рассуждения, использованные для доказательства теоремы I, и принять во внимание результат леммы 2.3.

§ 3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

В этом параграфе мы построим интегральное представление ряда Дирихле, исследованного в теореме 2. Точнее, ряд Дирихле

$$\mathcal{D}_F(s)=\sum_{m\geq 1} f(mE_2)m^{-s} \tag{3.I}$$

будет получен как интеграл по некоторой поверхности от исходной модулярной формы F (см. (3.2)). Эта поверхность обладает достаточно богатой группой автоморфизмов (ср. с [I] , где исследован случай зигелевых модулярных форм), поэтому можно перейти к интегралу (см. (3.7)), в ядро которого входит ряд Эйзенштейна относительно дискретной подгруппы группы $SO(1,4)$, и получить аналитическое продолжение ряда $\mathcal{D}_F(s)$, а, следовательно, и голоморфное продолжение дзета-функции $Z_F(s)$ модулярной формы F на всю комплексную s -плоскость.

Рассмотрим поверхность

$$\mathbb{P}=\{X+iyE_2;\ X\in M_2(\mathbb{C}),\ \ {}^t\overline{X}=X,\ tr(X)=0,\ y>0\}$$

лежащую в верхней полуплоскости Эрмита $\mathcal{H}_2$. Пусть

$$\mathfrak{X}(\mathbb{C})=\{X\in M_2(\mathbb{C}),\ {}^t\overline{X}=X,\ tr(X)=0\},$$

$$\mathfrak{X}(\mathcal{O}) = M_2(\mathcal{O}) \cap \mathfrak{X}(\mathbb{C}) .$$

Абелева группа $\mathfrak{X}(\mathcal{O})$ действует на поверхности $\mathbb{P}$ как группа сдвигов по X, и параболическая форма $F \in \mathfrak{M}_k^2$ инвариантна относительно этих сдвигов. Рассмотрим интеграл

$$I(s) = \int_{\mathbb{P}/\mathfrak{X}(\mathcal{O})} F(X + iyE_2)\, y^{s-1}\, dX\, dy , \tag{3.2}$$

где dX - обычный евклидов объем. Так как $F(Z)$ является параболической формой веса k, то $y^{k/2} |F(X+iyE_2)|$ экспоненциально убывает при $y \to \infty$ и ограничена на всей поверхности, коэффициенты Фурье $f(N) = O((\det N)^{k/2})$ (см. (I.4)), следовательно, в рассматриваемом интеграле можно заменить F на ее разложение Фурье и перейти к почленному интегрированию в области $\operatorname{Re} s > k+1$.

Функция $\exp(2\pi i\, \mathrm{tr}(NZ))$ является характером компактной группы $\mathfrak{X}(\mathbb{C})/\mathfrak{X}(\mathcal{O})$, поэтому

$$\int_{\mathfrak{X}(\mathbb{C})/\mathfrak{X}(\mathcal{O})} \exp(2\pi i\, \mathrm{tr}(NX))\, dX = \begin{cases} 1 , & \text{если } N = mE_2 \ (m \in \mathbb{Z}), \\ 0 , & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$I(s) = \int_{y>0} \sum_{m \geq 1} f(mE_2) \exp(-4\pi m y)\, y^{s-1}\, dy =$$

$$= (4\pi)^{-s}\, \Gamma(s) \sum_{m \geq 1} f(mE_2)\, m^{-s} .$$

Область $\mathbb{P}/\mathfrak{X}(\mathcal{O})$ является фундаментальной областью параболической подгруппы некоторой арифметической подгруппы группы $SO(1,4)$. Опишем $SO(1,4)$ (точнее, ее универсальную накрывающую) как группу матриц второго порядка над телом кватернионов (см. [16]).

Пусть $\mathbb{H}$ - тело гамильтоновых кватернионов и τ - инволюция первого рода

$$\tau : a + bi + cj + dk \longmapsto a - bi + cj + dk \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}) .$$

Рассмотрим группу, сохраняющую косоэрмитову форму $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$S_{\mathbb{H}}^{\tau} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{H}) ; \begin{pmatrix} \alpha^\tau & \gamma^\tau \\ \beta^\tau & \delta^\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Группа $S_{\mathbb{H}}^{\tau}$ действует на полупространстве

$$\mathbb{H}^{+} = \{ w = x + yi + zj + tk \ ; \ \ y > 0 \} ,$$

как группа дробно-линейных преобразований

$$\sigma : w \mapsto \sigma\langle w\rangle = (\alpha w + \beta)(\gamma w + \delta)^{-1} \ \left(\sigma = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in S_{\mathbb{H}}^{\tau} , \ w \in \mathbb{H}^{+} \right).$$

Из легко проверяемого тождества

$$\sigma . \begin{pmatrix} w^{\tau} & w \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\langle w\rangle^{\tau} & \sigma\langle w\rangle \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma w^{\tau} + \delta & 0 \\ 0 & \gamma w + \delta \end{pmatrix}$$

следует, что

$$y(\sigma\langle w\rangle) = y \, |\gamma w + \delta|^{-1} , \tag{3.3}$$

где $|w| = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ – кватернионная норма, а

$$\Delta(\sigma, w) = |\gamma w + \delta| \quad \left(\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right) \tag{3.4}$$

является фактором автоморфности.

Пусть

$$\varphi : a + bi + cj + dk \longmapsto \begin{bmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

гомоморфизм тела кватернионов в множество комплексных матриц второго порядка. Напомним, что $|w| = \det \varphi(w)$. Положим

$$\psi(w) = \varphi(w) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (w \in \mathbb{H})$$

$$\Psi(\sigma) = \begin{bmatrix} \varphi(\alpha) & \varphi(\beta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \varphi(\gamma) & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \varphi(\delta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad \left(\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in S_{\mathbb{H}}^{\tau} \right).$$

Обозначим через $\mathcal{O}_{\mathbb{H}}$ – порядок собственно целых кватернионов

$$\mathcal{O}_{\mathbb{H}} = \{ a + bi + cj + dk \ ; \ a, b, c, d \in \mathbb{Z} \} .$$

Тогда группа

$$\Gamma_{\mathbb{H}} = S_{\mathbb{H}}^{\tau} \cap M_2(\mathcal{O}_{\mathbb{H}})$$

является арифметической подгруппой группы $S_{\mathbb{H}}^{\tau}$ с фактор-пространством конечного объема.

ЛЕММА 3.I. Справедливы следующие утверждения:

I) ψ отображает $\mathbb{H}^+$ на поверхность $\mathbb{P}$,

2) $\overline{\Psi}(S_{\mathbb{H}}^{\tau}) \subset SU(2,2)$,

3) $\overline{\Psi}(\Gamma_{\mathbb{H}}) \subset \Gamma_2$ (см. (I.I)),

4) $\overline{\Psi}(\sigma) < \psi(w) > = \psi(\sigma < w >)$ $(\sigma \in S_{\mathbb{H}}^{\tau},\ w \in \mathbb{H}^+)$,

5) $\Delta(\sigma, w) = j(\overline{\Psi}(\sigma), \psi(w))$ (см. (3.4)),

где $j(g,Z) = \det(CZ + \mathcal{D})$ для $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & \mathcal{D} \end{pmatrix} \in SU(2,2),\ Z \in \mathcal{H}_2$ (см. (I.2)).

Для доказательства пункта 2 достаточно заметить, что
$\varphi(\alpha^{\tau}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^t \overline{\varphi(\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Остальное – очевидно.

Из леммы следует, что сужение модулярной формы $\mathbb{F}$ на поверхность $\mathbb{P}$ является автоморфной формой относительно группы $\Gamma_{\mathbb{H}}$: если

$$\widetilde{\mathbb{F}}(w) = \mathbb{F}(\psi(w)) \qquad (w \in \mathbb{H}^+), \tag{3.6}$$

то

$$\widetilde{\mathbb{F}}(\sigma < w >) = \Delta(\sigma, w)^k\, \widetilde{\mathbb{F}}(w) \qquad (\sigma \in \Gamma_{\mathbb{H}}),$$

так как

$$\mathbb{F}(\psi(\sigma < w >)) = \mathbb{F}(\overline{\Psi}(\sigma) < \psi(w) >) = j(\overline{\Psi}(\sigma), \psi(w))^k\, \mathbb{F}(\psi(w)) =$$
$$= \Delta(\sigma, w)^k\, \widetilde{\mathbb{F}}(w).$$

Введем параболическую подгруппу группы $\Gamma_{\mathbb{H}}$

$$\Gamma_{\mathbb{H}}^{\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & \beta \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix},\ \beta^{\tau} = \beta \in \mathcal{O}_{\mathbb{H}} \right\}.$$

Из леммы 3.I следует, что

$$\mathbb{P}/\mathcal{X}(\mathcal{O}) \simeq \Gamma_{\mathbb{H}}^{\infty} \setminus \mathbb{H}^+.$$

Перепишем интеграл (3.2) в терминах группы $S_{\mathbb{H}}^{\tau}$

$$I(s) = \int\limits_{\Gamma_{\mathbb{H}}^{\infty} \setminus \mathbb{H}^+} y^k\, \widetilde{\mathbb{F}}(w)\, y(w)^{s+3-k}\, y^{-4}\, dx\, dy\, dz\, dt,$$

где $y^{-4} dx\, dy\, dz\, dt$ – инвариантный элемент объема на $\mathbb{H}^+$, а функция $y^k\, \widetilde{\mathbb{F}}(w)$ инвариантна относительно действия $w \to \sigma < w >$ для $\sigma \in \Gamma_{\mathbb{H}}$ (см. (3.6) и (3.3)). В последнем интеграле перейдем к фундаментальной области группы $\Gamma_{\mathbb{H}}$ (метод Ранкина) и получим

$$(4\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{m\geq 1} f(mE_2)m^{-s} = \int\limits_{\Gamma_H\setminus \mathbb{H}^+} \tilde{F}(w)E(w, s-k+3)\, y^{k-4} d^* w, \qquad (3.7)$$

где

$$E(w,s) = y^s \sum_{\sigma\in\Gamma_H^\infty\setminus\Gamma_H} \Delta(\sigma, w)^{-s}$$

– ряд Эйзенштейна группы Γ_H .

Полученное интегральное представление позволяет продолжить дзета-функцию $Z_F(s)$ (см. теорему 2) на всю s -плоскость, так как такое продолжение допускает ряд Эйзенштейна E (см. [9]). Однако голоморфное продолжение ряда $E(w,s)$ легко получить и непосредственно, используя подходящие тэта-функции.

ЛЕММА 3.2. Функция

$$H(w,s) = \pi^{-2s}\Gamma(s-1)\Gamma(s)\zeta(s)\zeta(s-1)\zeta(2s-2)(1-2^{2-2s})E(w,s)$$

может быть продолжена до функции мероморфной на всей комплексной s -плоскости. Она голоморфна всюду, исключая, быть может, простые полюса в точках s = 0,I,2,3, и удовлетворяет функциональному уравнению

$$H(w,s) = H(w, 3-s).$$

В фундаментальной области Γ_H на $\mathbb{H}^+$ и любом компакте s -плоскости выполняется неравенство

$$|s(s-1)(s-2)(s-3)H(w,s)| < C y(w)^\lambda,$$

где константы C и λ зависят лишь от компакта.

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Ряд $E(w,s)$ можно разложить в ряд Фурье по $\frac{1}{2}(w+w^\tau)$, коэффициенты которого нумеруются векторами трехмерной решетки. Можно доказать, что коэффициенты Фурье зависят лишь от нормы вектора. В частности, в коэффициенты ряда Дирихле $E(iy,s)$ входит количество представлений числа суммой трех квадратов.

2. Из явного вида коэффициентов Фурье следует, что множитель $\pi^{-\frac{s-1}{2}}\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)\zeta(s-1)$ не является необходимым для голоморфности функции $H(w,s)$.

3. Метод доказательства леммы 3.2 переносится на случай конгруэнц-подгрупп группы Γ_H .

4. Приводимое ниже интегральное представление (см. (3.I2)) напоминает интегральное представление рядов Эйзенштейна для

группы $Sp_2(\mathbb{Z})$, построенное Маассом в [13] (см. ~~также [8]~~).

Введем некоторые обозначения:

$$M[N] = {}^t N M N$$

для матриц M и N соответствующих размеров; если

$$a = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \in \mathbb{H}, \quad \text{то} \quad \tilde{a} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$$

- строка длины 4,

$$m(a) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\beta & \alpha & -\delta & \gamma \\ -\gamma & \delta & \alpha & -\beta \\ -\delta & -\gamma & -\beta & \alpha \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \tag{3.8}$$

- гомоморфизм тела $\mathbb{H}$ в $M_4(\mathbb{R})$. Если

$$w = x + yi + zj + tk \in \mathbb{H}^+ \qquad (y > 0),$$

то

$$w' = x + zj + tk .$$

Определим вещественную положительно определенную квадратичную форму R_w на пространстве $\mathbb{R}^8$

$$R_w(\tilde{d}, \tilde{c}) = R_w[{}^t(\tilde{d}, \tilde{c})] = |cw' + d| + |c| y^2,$$

где $c, d \in \mathbb{H}$, а $w \in \mathbb{H}^+$. Заметим, что

$$R_w = \begin{bmatrix} E_4 & m(\bar{w}') \\ m(w') & |w| E_4 \end{bmatrix} \text{ и } R_w(\tilde{d}, \tilde{c}) = |cw + d|, \text{ если } dc^{\tau} = cd^{\tau}. \tag{3.9}$$

Положим

$$S = \begin{bmatrix} 0_4 & m(-i) \\ m(i) & 0_4 \end{bmatrix},$$

тогда

$$i S[{}^t(\tilde{d}, \tilde{c})] = dc^{\tau} - cd^{\tau} . \tag{3.10}$$

Для произвольного $w \in \mathbb{H}^+$ и $\tau = u + iv \in H_1$ $(u, v \in \mathbb{R},\ v > 0)$ определим тета-функцию

$$\vartheta(w, \tau) = \sum_{(\tilde{d}, \tilde{c}) \in \mathbb{Z}^8} \exp\left(-\frac{\pi v}{y} R_w(\tilde{d}, \tilde{c}) + i\pi u S[{}^t(\tilde{d}, \tilde{c})]\right).$$

ЛЕММА 3.3. Для любого $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$

$$\vartheta(w, \sigma\langle\tau\rangle) = |a_3'\tau + a_4|^4 \vartheta(w,\tau).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость равенства для элемента $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ следует из (3.10). Если $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то равенство следует из формулы суммирования Пуассона:

$$\frac{v}{y} R_w > 0, \quad \det\left(-\frac{v}{y} R_w + iuS\right) = (u^2+v^2)^4,$$

$$\left(-\frac{v}{y}R_w + iuS\right)^{-1} = -\frac{v'}{y}\begin{bmatrix} |w|E_4 & -m(\bar{w}') \\ -m(w') & E_4 \end{bmatrix} + iu'S, \text{ где } u'+iv' = -\frac{1}{\tau}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Уберем константу $1\ ((\tilde{d},\tilde{c})=(0,0))$ из тета-ряда $\vartheta(w,s)$. С этой целью определим ряд

$$\theta(w,\tau) = L(v^2\vartheta(w,\tau)) - 2v^2\vartheta(w,\tau),$$

где $L = -v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)$ – оператор Лапласа. Легко проверить, что

$$\int_0^1\int_0^\infty \theta(w,\tau)v^{s-3}\,du\,dv = s(3-s)\pi^{-s}\Gamma(s)y^s \sum_{\substack{c,d\in\mathcal{O}_H \\ cd^\tau = dc^\tau \\ (c,d)\neq 0}} |cw+d|^{-s}. \tag{3.11}$$

Из элементарных свойств целых кватернионов следует, что ряд, стоящий в правой части последнего равенства, совпадает с точностью до множителя $\zeta(s)\zeta(s-1)(1-2^{2-2s})$ с рядом $E(w,s)$.

Функция $\theta(w,\tau)$ инвариантна относительно преобразований $\tau \longrightarrow \sigma(\tau)$ при $\sigma\in SL_2(\mathbb{Z})$, поэтому в левой части (3.11) можно перейти к интегрированию по фундаментальной области $\mathfrak{D}_1 = SL_2(\mathbb{Z})\setminus H_1$. В результате получаем

$$s(3-s)\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(s)\zeta(s-1)(1-2^{2-2s})E(w,s) \int_{SL_2(\mathbb{Z})\setminus H_1} \theta(w,\tau)E_{SL_2}(\tau,2s-2)\,d^*\tau, \tag{3.12}$$

где

$$E_{SL_2}(\tau,s) = v^{\frac{s}{2}} \sum_{\sigma\in\left\{\begin{bmatrix}\pm1 & b \\ 0 & \pm1\end{bmatrix}\right\}\setminus SL_2(\mathbb{Z})} |c\tau+d|^{-s}$$

– ряд Эйзенштейна группы $SL_2(\mathbb{Z})$.

Хорошо известно, что функция

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)E_{SL_2(\mathbb{Z})}(\tau,s)$$

голоморфна на всей s-плоскости за исключением полюсов первого порядка в точках $s=0$ и $s=2$, инвариантна относительно замены $s \to 2-s$ и не превосходит $const \cdot v^{\lambda}$, если τ принадлежит фундаментальной области $\mathcal{D}_1$, а s лежит в произвольном фиксированном компакте $\mathbb{C}$-плоскости. Для завершения доказательства леммы 3.2 нужно оценить тета-ряд $\theta(w,s)$.

Для любого $w \in \mathbb{H}^+$

$$R_w \geqslant \frac{y^2}{|w|+1} E_8 ,$$

но

$$|\theta(w,\tau)| \leqslant c_1 v^2 \sum_{(d,c)\in \mathbb{Z}^8\setminus\{(0,0)\}} exp\left(-\frac{\pi v}{2y} R_w(d,c)\right),$$

следовательно, функция $\theta(w,\tau)$ мажорируется тета-функцией $\theta^8\left(\frac{vy}{2(|w|+1)}\right)-1$, где $\theta(\alpha)=\sum_n exp(-\pi\alpha n^2)$. $|\theta(\alpha)-1| \leqslant c_2\alpha^{-1/2} exp\left(-\frac{\pi\alpha}{2}\right)$, а $|w|\geqslant 1$ в фундаментальной области Γ_H на $\mathbb{H}^+$. Отсюда получаем

$$|\theta(w,\tau)| \leqslant v^2 c_0 \, exp\left(-\frac{c_3 v}{y}\right),$$

поэтому интеграл (3.12) определен на всей $\mathbb{C}$-плоскости. Лемма 3.2 доказана.

Собирая вместе результаты теоремы 2 и (3.7) и принимая во внимание лемму 3.2 и тот факт, что функция $\tilde{F}(w)$ экспоненциально убывает при $w \to i\infty$, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $F \in \mathfrak{M}_k^2$ – параболическая модулярная форма Эрмита рода 2 и веса k, являющаяся собственной функцией всех операторов Гекке, и $f(E_2) \neq 0$. Тогда функция

$$Z_F^*(s) = \pi^{-3s}\Gamma(s)\Gamma(s-k-3)\Gamma^2\left(\frac{s-k+3}{2}\right)\left(\pi^{-\frac{s-k+2}{2}}\Gamma\left(\frac{s-k+2}{2}\right)\zeta(s-k+2)\right)Z_F(s)$$

голоморфна на всей s-плоскости, кроме, быть может, простых полюсов в точках $s\in\{k-3, k-2, k-1, k\}$, и удовлетворяет функциональному уравнению

$$Z_F^*(2k-3-s) = Z_F^*(s).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Множитель $\pi^{-\frac{s-k+2}{2}}\Gamma\left(\frac{s-k+2}{2}\right)\zeta(s-k+2)$ не является необходимым для голоморфности $Z_F^*(s)$ (см. замечание 2 к лемме 3.2).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Утверждение теоремы 3 может быть распространено на все параболические модулярные формы Эрмита (без условия $f(E_2)\neq 0$). С этой целью можно ввести ряды Дирихле $\sum_{\{N\}} \sum_{m\geq 1} f(mN)m^{-s}$,

где первая сумма берется по всем представителям из различных орбит, на которые распадается множество матриц $N\in\mathcal{N}_2(\mathcal{O})$ фиксированного определителя относительно действия группы $SL_2(\mathcal{O})$. Интегральное представление таких рядов получается интегрированием по модифицированным поверхностям $\mathbb{P}_N$ (ср. с [I]).

В настоящее время автором получены более общие результаты, поэтому мы рассмотрим в дальнейшем случай произвольных форм в значительно более общем контексте.

Литература

I. А н д р и а н о в А.Н. Эйлеровы произведения, отвечающие модулярным формам Зигеля рода 2. - Успехи мат.наук, 1974, т.29, № 3, с.43-II0.

2. А н д р и а н о в А.Н. О разложении многочленов Гекке для симплектической группы рода n . - Мат.сб., 1977, т.104, № 3, с.390-427.

3. B o r e l A. Automorphic L-functions. - Proc.Symp.Pure Math., vol.33; Amer.Math.Soc., Providence, R.I., 1979, part 2, p.27-62.

4. B r a u n H. Der Basissatz für hermitische Modulformen. - Abh.math.Sem.der Univ.Hamburg, 1955, Bd 19, N 3, S.134-148.

5. Г р и ц е н к о В.А. Пространство Маасса для $SU(2,2)$ Операторы Гекке и дзета-функции. - Препринт ЛОМИ, 1985, Р-7-85. 23 с.

6. Г р и ц е н к о В.А. Построение эрмитовых модулярных форм рода 2 по параболическим формам рода I. - В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций.6. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1985, т.144, с.5I-67.

7. Г р и ц е н к о В.А. Параболические расширения кольца Гекке полной линейной группы. - В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций 7. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1986, т.154, с. 36-45.

8. Г р и ц е н к о В.А. Аналитическое продолжение симметрических квадратов. - Мат.сб., 1978,т.107, № 3, с.323-346.

9. Х а р и ш - Ч а н д р а. Автоморфные формы на полупростых группах Ли. М., 1971. 246 с.
10. H i n a T., S u g a n o T. On the local Hecke series of some classical groups over $\mathfrak{p}$-adie fields. - J.Math.Soc. Japan, 1983, vol.35, N 1, p.133-152.
11. K o j i m a H. An arithmetic of hermitian modular forms of degree two. - Invent.Math., 1982, vol.69, N 2, p.217-227.
12. K r i e g A. Modular forms on half-spaces of quaternions. - Lecture Notes in Math., 1985, vol.1143, p.1-203.
13. M a a s s H. Dirichletsche Reihen und Modulformen zweiten Grades. - Acta Arith., 1973, vol.24, N 3, p.225-238.
14. S h i m u r a G. Arithmetic of unitary groups. - Ann.Math., 1964, vol.79, N 2, p.369-409.
15. S h i m u r a G. The arithmetic of automorphic forms with respect to a unitary group. - Ann.Math., 1978, vol.107, N 4, p.569-605.
16. T a k a h a s h i R. Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz generalisés. - Bul.Soc.Math. de France, 1963, t.91, N 3, p.289-433.