Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

Задачи M2334–M2340, Ф2340–Ф2347,
Kvant, 2014, Number 2, 13–15

https://www.mathnet.ru/eng/kvant1728

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.89
May 18, 2025, 17:24:39

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №2–2014» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2334» или «Ф2340». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача М2334 предлагалась на VI Олимпиаде имени Л.Эйлера, задача М2337а) – на региональном этапе XL Всероссийской олимпиады школьников по математике, задачи М2338, М2340 – на XVII Кубке памяти А.Н.Колмогорова.

Задачи Ф2340, Ф2341, Ф2343–Ф2347 предлагались на Московской физической олимпиаде 2014 года.

Задачи М2334–М2340, Ф2340–Ф2347

М2334. Эксперту предъявили 12 одинаковых на вид монет, среди которых, возможно, есть фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые – тоже, фальшивая монета легче настоящей. У эксперта есть чашечные весы и эталонные монеты: 5 настоящих и 5 фальшивых. Сможет ли он за 4 взвешивания определить количество фальшивых монет среди предъявленных?

О.Нечаева

М2335. По кругу расположены n луночек, одна из которых отмечена. Петя и Вася играют в следующую игру. В начале игры Вася кладет шарик в одну из луночек. Далее за каждый ход Петя называет натуральное число k (числа k могут отличаться на разных ходах), а Вася перемещает шарик из луночки, в которой он находится, на k луночек по часовой либо против часовой стрелки (по своему усмотрению). При каких n Петя может играть так, чтобы через несколько ходов шарик: а) гарантированно попал в отмеченную луночку; б) гарантированно попал либо в отмеченную луночку, либо в одну из соседних с отмеченной луночек?

А.Толпыго

М2336. Даны положительные числа x и y, $x < y$. Для любых чисел a, b, c, принадлежащих отрезку $[x;\ y]$, докажите неравенство

$$\frac{a^2}{bc+xy}+\frac{b^2}{ca+xy}+\frac{c^2}{ab+xy}\geq\frac{a+b+c}{x+y}.$$

Д.Аубекеров (Казахстан)

М2337. Имеются n карточек, на которых написана цифра 1, и n карточек, на которых написана цифра 2. Вася складывает из этих карточек $2n$-значное число. За один ход Петя может поменять местами некоторые две карточки и заплатить Васе 1 рубль. Процесс заканчивается, когда у Пети получается число, делящееся на 11. Какую наибольшую сумму может заработать Вася, если Петя стремится заплатить как можно меньше? Решите задачу: а) для $n = 2013$; б) для любого заданного $n \geq 11$.

П.Кожевников

М2338. Существует ли на плоскости такое множество точек, что внутри любого треугольника площади 1 окажется конечное непустое множество точек из этого множества?

Фольклор

М2339. Дана доска $m \times n$, разбитая на единичные клетки. Сначала в $(m-1)(n-1)+1$ клеток ставится по фишке. Пусть в некоторый момент на доске нашлись четыре клетки, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными краям доски, такие, что ровно в одной из этих клеток стоит фишка; тогда эту фишку можно снять. Докажите, что хотя бы одну фишку не удастся снять с доски путем нескольких описанных операций.

В.Мокин

М2340*. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω (рис.1). Пусть I и J – центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC соответственно. Каждая из окружностей γ_B, γ_D прохо-

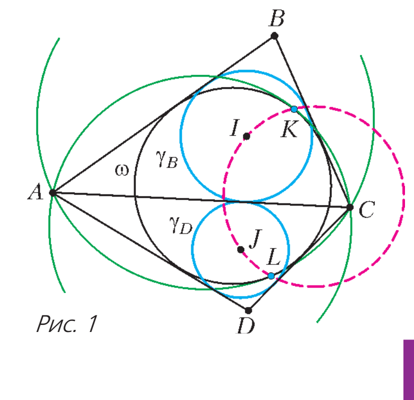


Рис. 1

дит через точки A и C. Эти окружности касаются окружности ω в точках K и L. Докажите, что точки I, J, K, L лежат на одной окружности.

Ф.Ивлев

Ф2340. Подходящий к станции поезд движется со скоростью v = 36 км/ч. Один из пассажиров поставил чемодан на пол длинного коридора вагона. Но тут поезд начал тормозить, двигаясь до полной остановки равнозамедленно с ускорением, равным по модулю $a = 2\ \text{м/с}^2$. Чемодан при этом стал скользить по полу и прошел до своей полной остановки путь s = 12 м относительно вагона. Определите коэффициент трения между чемоданом и полом, а также модуль максимальной скорости, которую имел чемодан относительно вагона.

М.Ромашка

Ф2341. На горизонтальной поверхности лежит стопка кирпичей так, как показано на рисунке 2. Площадь соприкасающихся участков кирпичей очень мала (много меньше площадей всех граней кирпичей). Все кирпичи однородные и имеют один и тот же вес P = 24 Н. Вычислите, с какой силой каждый кирпич из нижнего ряда давит на поверхность.

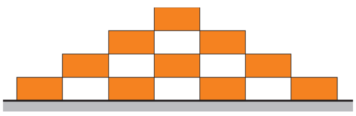


Рис. 2

М.Ромашка

Ф2342. Ванна на ножках в форме прямоугольного параллелепипеда может заполняться водой из крана, а выходит вода из нее через сливное отверстие в дне ванны прямо на пол. Если сливное отверстие закрыто, то при полностью открытом кране первоначально пустая ванна заполнится водой до максимального уровня H_0 за время t_1 = 10 мин. Если кран закрыть и открыть сливное отверстие, то изначально полная водой ванна опорожнится за время t_2 = 20 мин. Каким будет уровень воды в первоначально пустой ванне через t_3 = 5 мин, если одновременно полностью открыть кран и оставить открытым сливное отверстие? Как изменится ответ, если в ванну с открытым сливным отверстием вдобавок к первому крану одновременно подавать воду из второго (точно такого же) полностью открытого крана? Через какое время после начала эксперимента вода начнет переливаться через края ванны в случае работы двух кранов?

Примечание. Решать дифференциальные уравнения аналитически не нужно! Воспользуйтесь компьютером.

Фольклор

Ф2343. В распоряжении школьника Вовы имеется водопроводная вода с температурой 20 °С, чайник мощностью 1,2 кВт и вместительностью 1,5 л, электрокипятильник мощностью 500 Вт, а также большой калориметр, в котором требуется получить 100 л кипятка с температурой 100 °С. Как сделать это за наименьшее время? Вова предложил следующий план действий: нужно налить в калориметр некоторый начальный объем воды V_0, опустить туда включенный кипятильник и одновременно кипятить воду в чайнике, доливая из него в калориметр порции кипятка по мере его готовности. Определите, каким должен быть начальный объем V_0 и за какое время τ удастся получить в калориметре 100 л кипятка, действуя указанным способом. Удельная теплоемкость воды $4200\ \text{Дж/(кг}\cdot{}^\circ\text{С)}$, плотность воды $1\ \text{г/см}^3$. Теплоемкостью калориметра, потерями тепла в окружающую среду и временем, затраченным на наполнение чайника и выливание из него кипятка, можно пренебречь.

М.Ромашка

Ф2344. Знайка решил провести исследования Гей-Люссака для идеального газа, только более аккуратно. Для этих целей он взял цилиндрический сосуд большого объема с поршнем, который мог двигаться практически без трения, вынул поршень и охладил сосуд и поршень до температуры 200 К. Затем он вставил поршень обратно в сосуд так, что внутри оказался охлажденный до той же температуры воздух, обеспечил постоянное давление и провел измерения зависимости объема V газа в сосуде от температуры T. По полученным результатам Знайка построил график (рис.3). Найденная зависимость мало напоминала результаты, полученные Гей-Люссаком. Знайка

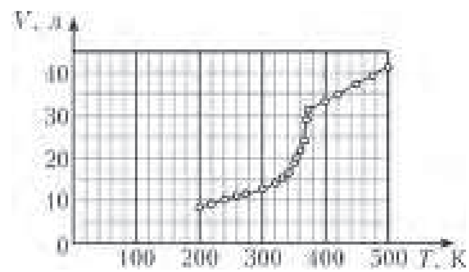


Рис. 3

понял свою ошибку. Он вставил поршень в цилиндр при температуре 200 К, и, очевидно, на дне сосуда при этом оказалось некоторое количество льда, который образовался из воды, сконденсировавшейся при охлаждении воздуха. Оцените массу льда, который оказался в цилиндре у Знайки, если давление в течение опыта было $2\cdot10^5$ Па. Молярная масса воды 18 г/моль.

В.Крыштоп

Ф2345. Два одинаковых вольтметра соединили параллельно, третий вольтметр подключили к этой комбинации последовательно и к концам получившейся цепи присоединили идеальную батарейку. При этом вольтметры показывали 4 В, 4 В и 5 В. Каково напряжение батарейки? Могут ли быть одинаковыми все три вольтметра? Что покажут эти же приборы, если их все соединить последовательно и подключить к той же батарейке? Показания приборов считайте точными.

А.Зильберман

Ф2346. В цепи, схема которой изображена на рисунке 4, по очереди замыкают ключи $K_1 - K_5$, выжидая каждый раз достаточно длительное время до окончания процессов зарядки конденсаторов. Во сколько раз отличаются количества теплоты, выделившиеся в резисторе R после замыкания ключа K_1 и ключа K_5? До

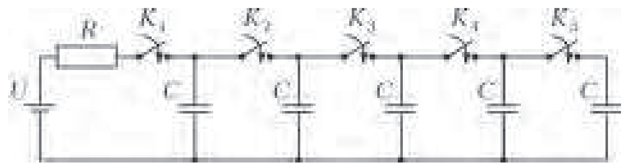


Рис. 4

замыкания каждого из этих ключей все остальные ключи уже были замкнуты. Сопротивления всех проводов и источника тока пренебрежимо малы.

М.Семенов

Ф2347. Тележка высотой $H = 30$ см и длиной $L = 40$ см должна проехать под столом по горизонтальному полу, двигаясь равномерно и прямолинейно (рис.5). К крышке стола снизу прикрепили легкую

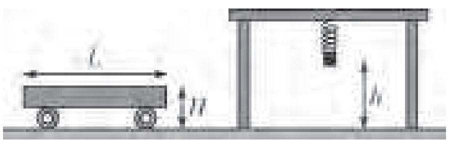


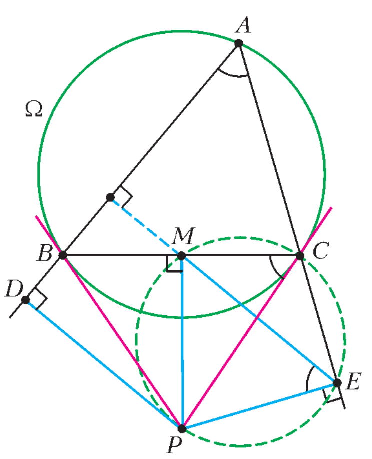
Рис. 5

пружину жесткостью $k = 50$ Н/м. К пружине прицепили маленький груз массой $m = 0{,}4$ кг. При недеформированной пружине груз находился на высоте $h = 42$ см над полом. Затем груз отпустили. С какой минимальной скоростью может двигаться тележка, чтобы она, проехав под столом, не задела груз?

М.Ромашка

Решения задач М2316–М2325, Ф2323–Ф2332

М2316. *Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω. Касательные, проведенные к Ω в точках B и C, пересекаются в точке P. Точки D и E – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые AB и AC. Докажите, что точка пересечения высот треугольника ADE является серединой отрезка BC.*



Пусть M – середина BC. Треугольник BPC равнобедренный ($BP = PC$ как отрезки касательных); значит, его медиана PM является высотой. Так как $\angle PMC = \angle PEC = 90°$, четырехугольник $MCEP$ – вписанный; значит, $\angle MEP = \angle MCP$. Далее, CP – касательная к Ω, поэтому $\angle MCP = \angle BAC$. Получаем, что $\angle MEP = \angle BAC$. Значит, $\angle MEA + \angle BAC = (90° - \angle MEP) + \angle BAC = 90°$, откуда $ME \perp AB$ (см. рисунок). Аналогично доказывается, что $MD \perp AC$. Это и значит, что M – точка пересечения высот треугольника ADE.

П.Кожевников

М2317. *Существует ли такое натуральное n, что число $\overline{anb}$ делится на $\overline{ab}$ для любых: а) ненулевых; б) ненулевых четных; в) нечетных цифр a и b? (Здесь через $\overline{x\ldots y}$ обозначено число, получаемое приписыванием друг к другу десятичных записей чисел x, …, y.)*

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

а), б) Предположим, что такое число n существует. Тогда $\overline{2n4}\,\vdots\,24\,\vdots\,8$ и $\overline{4n8}\,\vdots\,48\,\vdots\,8$. Но разность $\overline{4n8} - \overline{2n4}$ не делится на 8, поскольку имеет тройку последних цифр 004 или 204 (если n состоит из одной цифры).

в) Вначале докажем следующую известную **лемму**: *пусть N – натуральное число, не делящееся на 2 и на 5; тогда существует число, записываемое одними единицами, которое делится на N.*

Действительно, рассмотрим $N+1$ чисел вида $1, 11, 111, \ldots, \underbrace{11\ldots1}_{N+1}$. Выберем два из них, $\underbrace{11\ldots1}_{k}$ и $\underbrace{11\ldots1}_{l}$, $k > l$, дающие один и тот же остаток при делении на N. Тогда разность $\underbrace{11\ldots1}_{k} - \underbrace{11\ldots1}_{l} = \underbrace{11\ldots1}_{k-l} \cdot 10^l$ делится на N. Так как НОД$(N,10) = 1$, то $\underbrace{11\ldots1}_{k-l}$ делится на N.

Перейдем к решению задачи. Пусть T – множество всех натуральных чисел, меньших 100 и не делящихся ни на 2, ни на 5. Пусть N равно произведению всех чисел множества T.

Найдем такое s, что число $m = \underbrace{11\ldots1}_{s}$ делится на N, и покажем, что $n = \underbrace{77\ldots7}_{s} = 7m$ удовлетворяет условию задачи. Пусть a и b – некоторые нечетные цифры. Тогда число

$$\overline{anb} = \overline{an0} - 10a + \overline{ab} = 10\left(a\left(10^s - 1\right) + n\right) + \overline{ab}$$

делится на $\overline{ab}$ одновременно с числом

$$10\left(a\left(10^s - 1\right) + n\right) = 10\,(a \cdot \underbrace{99\ldots9}_{s} + \underbrace{77\ldots7}_{s}\,) =$$

$$= 10m\,(9a + 7).$$

Если $\overline{ab}$ не делится на 5, то по построению число m делится на $\overline{ab}$. Если $\overline{ab} = 5k$, где k не делится на 5, то m делится на k, а значит, $10m\,(9a+7)$ делится на $5k$. Наконец, если $\overline{ab}$ делится на 25, то имеется единственная возможность: $a = 7$, $b = 5$. В таком случае $10m\,(9a+7) = 700m$ делится на $\overline{ab} = 75$ (так как m делится на 3).

В.Сендеров

М2318. *На окружности отметили n точек, разбивающие ее на n дуг. Окружность повернули вокруг центра на угол $2\pi k/n$ (при некотором натуральном k), в результате чего отмеченные точки перешли в n новых точек, разбивающих окружность на n новых дуг. Докажите, что найдется новая дуга, которая целиком лежит в одной из старых дуг. (Считается, что концы дуги ей принадлежат.)*

Мы будем считать, что радиус окружности равен 1, а поворот происходил по часовой стрелке. Если две новые точки лежат на одной старой дуге, то новая дуга