А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе, Эвристический принцип Л. В. Канторовича, *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2001, том 4, номер 2, 18–28

Сибирский журнал
индустриальной математики
Июль–декабрь, 2001. Том IV, № 2(8)

УДК 513.588

ЭВРИСТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП Л. В. КАНТОРОВИЧА

А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе

Обзор современного состояния исследований в области функционального анализа, развивающих эвристический принцип Л. В. Канторовича. Особое внимание уделено пограничным вопросам теории пространств Канторовича и приложений, булевозначному анализу и субдифференциальному исчислению.

1. О прикладной и чистой математике

Информатика, computer science, вычислительная математика — в очевидном смысле преемники и представители прикладной математики. Термины «чистая» и «прикладная» математика, окруженные постоянными острыми дискуссиями и спорами, не только сохраняются в научном узусе, но и воплощают отчетливые феномены науки. Науковеды и работающие математики, размышляющие о названных предметах, обычно констатируют, что для математики нашей страны в отличие, скажем, от математики американской характерна объединительная тенденция, стремление по возможности выделить и видеть общее, развивать единую математическую культуру и соответствующую инфраструктуру. Для отечественных специалистов разделение и противопоставление чистой и прикладной математики обычно связано со столкновениями, переживаниями или, по меньшей мере, с дискомфортом. В то же время для американских ученых раздельное существование, скажем, Американского математического общества (AMS) и Общества индустриальной и прикладной математики (SIAM) абсолютно естественно.

Обычно редко отдается отчет в том, что распространение подобного рода обстоятельств в общественном процессе связано с позицией и деятельностью конкретных людей.

Л. В. Канторович принадлежит к тем классикам отечественной математики, которые своим личным вкладом утверждали единство прикладной и чистой математики.

2. Curriculum Vitae

Напомним некоторые факты из жизни Леонида Витальевича, чтобы представить хотя бы грубую событийную шкалу отсчета (подробнее см. в [21]).

Л. В. Канторович родился в Санкт-Петербурге в семье врача 19 января 1912 года (6 января по старому стилю). Дарование мальчика проявилось очень рано. Уже в 1926 году в возрасте 14 лет он поступил в Ленинградский университет. Вскоре он стал заниматься в кружке, организованном для студентов Г. М. Фихтенгольцем, а затем и в семинаре, посвященном дескриптивной теории функций. Разумеется, ранние студенческие годы сформировали первую когорту наиболее близких товарищей. В кружке Г. М. Фихтенгольца занимались также Д. К. Фаддеев, И. П. Натансон, С. Л. Соболев, С. Г. Михлин и др., с которыми Леонид Витальевич был дружен всю жизнь.

Закончив ЛГУ в 1930 году, Леонид Витальевич начал педагогическую работу в ленинградских вузах, сочетая ее с интенсивными научными исследованиями. Уже в 1932 году он профессор Ленинградского института инженеров гражданского строительства и доцент ЛГУ. В 1934 году Леонид Витальевич становится профессором своей alma mater. С ЛГУ и Ленинградским отделением МИ АН Леонид Витальевич связан до перехода в Сибирское отделение АН в конце пятидесятых годов.

Основные научные труды в области математики Леонид Витальевич создал именно в свой «ленинградский» период. При этом если в тридцатые годы он публикует больше статей по чистой математике, то сороковые годы для него — время работ по вычислительной математике, где он становится признанным лидером в СССР.

С конца тридцатых годов ярко заявляет о себе Л. В. Канторович-экономист. В 1939 году выходит в свет его знаменитая брошюра «Математические методы организации и планирования производства» [19], ознаменовавшая рождение линейного программирования. В сороковые годы на поверхности научного информационного потока в виде публикаций экономические работы Леонида Витальевича практически не появляются. Однако в его творчестве экономическая проблематика выходит на первый план. Уже в военные годы он завершает работу над первым вариантом книги «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов» [12], принесшей ему в 1975 году Нобелевскую премию.

В 1957 году Леонида Витальевича приглашают на работу во вновь создаваемое Сибирское отделение Академии наук СССР и избирают в первые выборы по СО членом-корреспондентом по Отделению экономики. С этого момента основные публикации Леонида Витальевича относятся к экономике, за исключением «Канторовича и Акилова» — всемирно известного курса функционального анализа [22].

Шестидесятые годы для Леонида Витальевича — время признания. В 1964 году он избран действительным членом АН по Отделению математики, в 1965-м удостоен Ленинской премии. В эти годы он особенно интенсивно развивает и отстаивает свой тезис о взаимопроникновении математики и экономики, тратит громадные усилия на внедрение идей и методов современной науки в практику советской экономики.

В начале семидесятых годов Леонид Витальевич переезжает в Москву, где продолжает заниматься вопросами экономического анализа, не оставляя попыток оказать воздействие на конкретную экономическую практику и процесс принятия экономических решений в народном хозяйстве. Эти годы отмечены известным математическим ренессансом. Хотя Леонид Витальевич не стал вновь доказывать теоремы, его воздействие на математическую жизнь резко возросло в силу новых процессов в московской академической жизни.

3. Научное наследие Л. В. Канторовича

Научное наследие Л. В. Канторовича колоссально. Его исследования в области функционального анализа, вычислительной математики, теории экстремальных задач, дескриптивной теории функций оказали фундаментальное влияние на становление и развитие названных дисциплин. Л. В. Канторович по праву входит в число основоположников современного экономико-математического направления.

Л. В. Канторович — автор более трехсот научных работ, которые при подготовке аннотированной библиографии его сочинений он сам предложил распределить по следующим девяти разделам (хронологический указатель трудов см. в [21]):

(1) дескриптивная теория функций и теория множеств,
(2) конструктивная теория функций,
(3) приближенные методы анализа,
(4) функциональный анализ,
(5) функциональный анализ и прикладная математика,
(6) линейное программирование,
(7) вычислительная техника и программирование,
(8) оптимальное планирование и оптимальные цены,
(9) экономические проблемы плановой экономики.

Столь впечатляющее многообразие направлений исследований объединяется не только личностью Л. В. Канторовича, но и единством его методических установок. Он всегда подчеркивал внутреннее единство своего творчества, взаимопроникновение идей и методов, используемых им при решении самых разнообразных теоретических и прикладных проблем в математике и экономике. Вместе с тем характерной чертой творчества Л. В. Канторовича является его тесная взаимосвязь с наиболее трудными проблемами и самыми перспективными идеями современной ему математики и экономики. Анализ методологии творчества Л. В. Канторовича заслуживает специальных исследований. Ниже мы остановимся коротко лишь на некоторых фундаментальных идеях Л. В. Канторовича, которые, несомненно, следует отнести к лучшим образцам математики и экономики двадцатого столетия.

4. Приближенные методы анализа

Л. В. Канторович начинал свою научную деятельность с весьма абстрактных разделов таких, как дескриптивная теория множеств, теория равномерного приближения и функциональный анализ. Следует подчеркнуть, что в начале тридцатых годов эти направления были, что называется, «с иголочки», наиболее модные, престижные и трудные. Общеизвестен капитальный вклад Л. В. Канторовича в теоретическую математику, внесенный уже его первыми работами в названных областях.

Следует подчеркнуть в то же время, что на математическую жизнь того периода не меньшее (если не большее) влияние оказали его исследования по приближенным методам анализа.

Первые работы Л. В. Канторовича по приближенным методам анализа опубликованы в 1933 году. Им были предложены некоторые методы приближенного решения задачи о конформном отображении круга на односвязную область. Такие методы использовали идею погружения заданной области в некоторое однопараметрическое семейство областей, которое включает первоначальную область в предположении заданности необходимых конформных отображений. Применяя разложение по параметру, Л. В. Канторович получил некоторые явные формулы для приближенного вычисления конформных отображений многосвязных областей. Уже в том же 1933 году один из учителей Л. В. Канторовича, В. И. Смирнов, включил этот метод в теперь уже всемирно известный «Курс высшей математики».

Л. В. Канторович уделял много внимания и прямым вариационным методам. Им был предложен оригинальный метод приближенного решения двумерных уравнений эллиптического типа, основанный на сведении исходной задачи к проблеме минимизации функционала от нескольких функций одного переменного. Этот метод часто называют приведением к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Вариационный метод был развит и в дальнейших работах, выполняемых в связи с прикладными вопросами. Так метод коллокаций был предложен в работе, посвященной расчету балки, лежащей на упругом основании.

Интересные идеи были высказаны Л. В. Канторовичем и в теории механических квадратур, ставшие основой построения численных методов решения общих интегральных уравнений при наличии сингулярности.

Итогом этого периода занятий прикладной математикой стала написанная Л. В. Канторовичем совместно с В. И. Крыловым книга «Методы приближенного решения уравнений в частных производных», выходившая много раз впоследствии в расширенных вариантах под названием «Приближенные методы высшего анализа» [24].

5. Функциональный анализ и прикладная математика

Особое место в математическом творчестве Л. В. Канторовича занимает функциональный анализ. Являясь классиком его общетеоретических разделов таких, в частности, как теория упорядоченных векторных пространств, Л. В. Канторович сделал исключительно много для того, чтобы превратить функциональный анализ в естественный язык вычислительной математики.

Этапной работой в личном творчестве Л. В. Канторовича и в развитии математики в нашей стране стала его статья «Функциональный анализ и прикладная математика», опубликованная в «Успехах математических наук» в 1948 году [20]. Во введении к ней Л. В. Канторович пишет:

«*Установилась традиция считать функциональный анализ дисциплиной чисто теоретической, далекой от непосредственных приложений, которая в практических вопросах не может быть использована. Цель этой статьи — в известной степени разрушить эту традицию, указать на связь функционального анализа с вопросами прикладной математики, на то, что он может быть полезен и для занимающихся практическими приложениями математики.*

Именно, мы хотим показать, что идеи и методы функционального анализа могут быть использованы для построения и анализа эффективных практических алгоритмов решения математических задач с таким же успехом, как для теоретического исследования этих задач».

Математические идеи, развитые в статье, давно стали классическими: метод конечномерных аппроксимаций, оценки обратного оператора и, конечно же, метод Ньютона — Канторовича известны большинству лиц, получивших современное математическое образование.

Построенная Л. В. Канторовичем общая теория анализа и решения функциональных уравнений, базирующаяся на вариации «исходных данных» — операторов и пространств — привела к оценкам скоростей сходимости и установления самого факта сходимости для ряда методов.

Идея единства функционального анализа и вычислительной математики воплощалась, в частности, в том, что в конце сороковых годов по инициативе Л. В. Канторовича на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского (тогда Ленинградского) университета была организована первая в стране специализация по вычислительной математике. В стенах Новосибирского университета Л. В. Канторович продолжил эту линию, создав и возглавив кафедру вычислительной математики, которая в годы его заведывания обслуживала и курс функционального анализа.

Нельзя не отметить, что развитие линейного программирования как раздела прикладной математики, ориентированного, в первую очередь, на нужды экономической теории, Л. В. Канторович связывал с общей потребностью совершенствования функционально-аналитической техники, связанной с идеями оптимизации. Тут прежде всего речь идет о теории топологических векторных пространств, выпуклого анализа, теории экстремальных задач и т. п.

Важно подчеркнуть, что под воздействием новых видов приложений произошли капитальные изменения в ряде разделов, прежде всего нелинейного функционального анализа.

6. Пространства Канторовича

Главным своим математическим достижением Л. В. Канторович считал создание теории K-пространств в рамках функционального анализа. Эта главная жемчужина его абстрактного идейного наследия заслуживает специального обсуждения. Обратимся к истокам K-пространств.

В истории функционального анализа возникновение теории упорядоченных векторных пространств связывают с именами Г. Биркгофа, Л. В. Канторовича, М. Г. Крейна, Х. Накано, Ф. Рисса, Х. Фрейденталя и др. В настоящее время теория упорядоченных векторных пространств составляет важное математическое направление, фактически один из основных разделов современного функционального анализа. Л. В. Канторовичу принадлежит честь выделения класса порядково полных векторных решеток, называемых ныне пространствами Канторовича, и построения функционального анализа в этом классе. Первой работой Л. В. Канторовича в области упорядоченных векторных пространств была заметка 1935 года в «Докладах Академии наук СССР» [11], в которой он писал: «*В этой заметке я определяю новый тип пространств, которые я называю линейными полуупорядоченными пространствами. Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного общего класса* (*операции, значения которых принадлежат такому пространству*) *как линейные функционалы*».

Здесь Л. В. Канторович сформулировал важную методологическую установку, которую теперь называют принципом Канторовича или, более подробно, принципом переноса для K-пространств. Подчеркнем, что в определение линейного полуупорядоченного пространства была включена аксиома условной порядковой полноты, обозначенная I_6. Таким образом, уже в первой работе Л. В. Канторовича [11] им выделен класс K-пространств, носящих теперь его имя. Изучение K-пространств Леонид Витальевич связал с выяснением области применимости фундаментальной теоремы Хана — Банаха и сформулировал под номером 3 теорему, которая теперь в литературе именуется теоремой Хана — Банаха — Канторовича. В ней фактически утверждается, что в классической теореме о мажорированном продолжении линейного функционала можно реализовать принцип Канторовича, т. е. заменить в теореме Хана — Банаха вещественные числа элементами произвольного K-пространства, а линейные функционалы — операторами со значениями в таком пространстве. Задаче мажорированного продолжения оператора посвящена обширная литература; историю вопроса и обзор различных аспектов можно найти в [28, 29, 37].

Одновременно с введением K-пространств Л. В. Канторовичем были заложены основы теории регулярных операторов. Это было сделано в работе [16], где впервые появились порядковое исчисление регулярных операторов в K-пространствах и знаменитая теорема Рисса — Канторовича. Ф. Рисс [49] в своем знаменитом докладе на Международном математическом конгрессе в Болонье в 1928 г. сформулировал аналогичное утверждение для пространства непрерывных линейных функционалов на векторной решетке $C[a, b]$, вписав тем самым свое имя в число основателей теории упорядоченных векторных пространств.

В последующих работах Л. В. Канторовича и многочисленных его последователей было дано систематическое построение теории и разнообразные приложения к вопросам теории функций и функционального анализа. Теории векторных решеток и ее обширным приложениям посвящено большое количество монографий (см. [1, 6, 22, 23, 25, 26, 28, 34, 35, 39, 41, 47, 48, 50, 52, 54]). Отметим также обзорные статьи [2–4], в каждой из которых имеется богатая библиография.

Эвристический принцип переноса, выдвинутый Л. В. Канторовичем в связи с концепцией K-пространства, находил позже многочисленные подтверждения в исследованиях как самого автора (см. [13–18, 42]), так и его последователей [7, 23]. По существу, этот принцип оказался одной из тех стержневых идей, которые, играя организующую роль в становлении нового направления, привели в конечном итоге к глубокой и изящной теории K-пространств, богатой разнообразными приложениями. Уже в начальный период развития теории предпринимались попытки формализации указанных эвристических соображений. На этом пути появились так называемые теоремы о сохранении соотношений, которые утверждают, что если некоторое высказывание, включающее конечное число функциональных соотношений, доказано для вещественных чисел, то аналогичный факт автоматически оказывается верным и для элементов K-пространства (см. [7, 23]). В то же время оставался совершенно неясным внутренний механизм, управляющий феноменом сохранения соотношений, границы его применимости, а также общие причины многих аналогий и параллелей с классической теорией функций. Глубина и универсальность принципа Канторовича были объяснены в рамках булевозначного анализа (см. [9, 30]).

7. Булевозначный анализ

Булевозначным анализом называют раздел функционального анализа, использующий специальную теоретико-модельную технику — булевозначные модели теории множеств. Любопытно, что создание булевозначных моделей не было связано с теорией упорядоченных векторных пространств. Необходимые для этого языковые и технические средства окончательно сформировались в рамках математической логики уже к 1960-му году. Однако все еще не было той генеральной идеи, которая впоследствии вдохнула жизнь в созданный математический аппарат, привела к бурному прогрессу в теории моделей. Такая идея пришла с открытием П. Дж. Коэна, установившем в 1963 году абсолютную неразрешимость (в точном математическом смысле) классической проблемы континуума. Именно в связи с осмыслением метода форсинга П. Дж. Коэна возникли булевозначные модели теории множеств, создание которых принято связывать с именами П. Вопенки, Д. Скотта и Р. Соловэя.

Булевозначный статут понятия K-пространства установлен в начале 70-х годов Е. И. Гордоном (см. [10]). Основной его результат утверждает, что *любое расширенное K-пространство есть интерпретация поля вещественных чисел в подходящей булевозначной модели.* Более подробно, пусть B — полная булева алгебра, а $\mathcal{R}$ — поле вещественных чисел в булевозначной модели, построенной на основе B. Тогда с $\mathcal{R}$ вполне определенным способом связано расширенное K-пространство $\mathcal{R}{\downarrow}$, база которого изоморфна исходной булевой алгебре B. При этом оказывается, что любая теорема (в рамках аксиоматики Цермело — Френкеля с аксиомой выбора) о вещественных числах имеет свой аналог для K-пространства $\mathcal{R}{\downarrow}$, причем перевод одних теорем в другие осуществляется посредством точно определенных стандартных процедур, т. е. по сути дела алгоритмически. Тем самым установка Л. В. Канторовича «элементы K-пространства суть обобщенные числа» обретает в булевозначном анализе четкую математическую формулировку. С другой стороны, эвристический принцип переноса, игравший вспомогательную, наводящую роль во многих исследованиях в добулевозначной теории K-пространств, превращается в рамках булевозначного анализа в точный исследовательский метод. Подробное изложение теории булевозначных моделей, а также разнообразных их приложений можно найти в [30, 32, 36, 40, 53].

8. Континуум-проблема Кантора

С принципом Л. В. Канторовича — «элементы K-пространства суть обобщенные числа» — перекликается одна из самых драматических страниц математики XX столетия, связанная со знаменитой проблемой континуума. Ключевую идею, лежащую в основе решения континуум-проблемы, можно осмыслить как поиск обобщенных чисел специального вида, после чего решение проблемы континуума сводится к построению специфического мира множеств — универсума. Более того, в этом универсуме имеются не только обобщенные числа, но и обобщенные математические объекты любой природы, столь же специфические, как и обобщенные числа. Указанное обстоятельство (более выразительно, но менее точно) можно высказать следующим образом: в некоторых K-пространствах, элементы которых рассматриваются как обобщенные числа, нарушается гипотеза континуума.

Говорят, что множество A имеет мощность континуума или что оно континуально, если A находится во взаимнооднозначном соответствии с отрезком числовой прямой $[0, 1]$. Гипотеза континуума утверждает, что любое несчетное подмножество отрезка $[0, 1]$ континуально. Проблема же континуума состоит в том, верна или нет гипотеза континуума.

Гипотеза континуума была впервые высказана Г. Кантором в 1878 году. Он был убежден, что континуум-гипотеза является теоремой и всю жизнь тщетно пытался ее доказать. Но при этом он создал мощный метод количественного анализа понятия бесконечности, открыв исчисление мощностей и теорию трансфинитных порядковых чисел.

В 1900 году в Париже состоялся II Международный конгресс математиков. На нем выступил Давид Гильберт со своим знаменитым докладом «Математические проблемы». Он сформулировал 23 проблемы, решение которых, по его мнению, девятнадцатое столетие завещало двадцатому. Этот доклад сыграл выдающуюся роль для развития математики XX века.

Проблема континуума была сформулирована первой в докладе Д. Гильберта (см. [33]). Оставаясь нерешенной десятилетиями, она порождала глубокие исследования в основаниях математики [38, 40]. Важнейший итог более чем полувековых исследований по проблеме континуума можно сформулировать так: *гипотеза континуума не может быть ни доказана, ни опровергнута в рамках теории множеств, т. е. гипотеза континуума является независимой теоретико-множественной аксиомой.*

Исторически это утверждение было установлено в два этапа: в 1939 году Курт Гёдель [8] установил, что гипотеза континуума совместна с аксиомами теории множеств, а в 1963 году Поль Дж. Коэн [38] доказал, что отрицание гипотезы континуума также совместно с аксиомами теории множеств.

Оба результата устанавливаются путем построения соответствующих моделей, т. е. построением универсума множеств и интерпретации теории множеств в этом универсуме. Говоря о теории множеств, подразумеваем аксиоматическую теорию Цермело — Френкеля, причем мир множеств, где разворачивается эта теория, называют универсумом фон Неймана. Подход Гёделя основан на подходящем «усечении» универсума фон Неймана. Точнее, он вводит универсум конструктивных множеств, являющихся частью универсума фон Неймана. Гёдель установил, что конструктивные множества образуют модель для теории Цермело — Френкеля и в этой модели имеет место континуум-гипотеза. Следовательно, отрицание гипотезы континуума недоказуемо в теории Цермело — Френкеля.

Подход Коэна в некотором смысле является противоположным: он основан на расширении универсума фон Неймана, но при этом новые множества добавляются с должной осторожностью. Метод Коэна, названный форсингом, можно описать на языке булевозначного анализа. Это обнаружили П. Вопенка, Д. Скотт и Р. Соловэй в 1965 году (см. [30, 36]).

Метод форсинга в булевозначном варианте состоит из двух частей — общей и специальной. Общая часть — конструкция булевозначного универсума и интерпретация в нем теоретико-множественных утверждений. Специальная часть состоит в построении специфической булевой алгебры, а значит, и соответствующего K-пространства так, чтобы обеспечить нужные свойства изучаемого объекта (подробности см. в [30, 38, 40]).

9. Теория мажорируемых операторов

Характерное для творчества Л. В. Канторовича разнообразие интересов сочетается с идейной целостностью. Не удивительно поэтому, что уже в своих ранних работах Л. В. Канторович обращается к приложениям теории полуупорядоченных пространств в численных методах. Он предложил математический аппарат, в рамках которого метод мажорант, восходящий к Коши, обретает свою естественную и законченную форму. Для этой цели им были введены фундаментальные понятия векторного пространства, нормированного элементами векторной решетки, и линейного оператора в таких пространствах, мажорируемого линейным положительным или сублинейным возрастающим оператором [13, 16, 17, 42]. Развитие этого направления имело двоякую мотивировку — теоретическую, обусловленную развитием общей теории операторов в K-пространствах (см. [11, 14–16]) и прикладную, связанную с приближенными методами анализа (см. [13, 17, 42]).

Приблизительно говоря, идею мажорирования можно выразить следующим образом. Если рассматриваемый оператор (или рассматриваемое уравнение) мажорируется другим оператором (уравнением), называемым мажорантой, то свойства последней имеют существенное влияние на свойства исходного оператора (уравнения). Таким образом, операторы или уравнения, имеющие «хорошие» мажоранты, должны иметь «хорошие» свойства. Идейную сторону своего подхода Леонид Витальевич описывает в заметке 1936 года [13] следующими словами:

«При доказательстве существования решения различных классов функциональных уравнений в анализе весьма часто применяется способ последовательных приближений; при этом доказательство сходимости этих приближений основывается на том, что данное уравнение может быть мажорировано некоторым уравнением простого вида. Такого рода доказательства встречаются в теории бесконечных систем линейных уравнений и в теории интегральных и дифференциальных уравнений. Рассмотрение полуупорядоченных пространств и операций в них позволяет с большой легкостью развить в абстрактной форме полную теорию функциональных уравнений упомянутого вида».

В последующие годы многие авторы изучали различные частные случаи решеточно нормированных пространств и классы мажорируемых операторов. Однако эти исследования проводились в рамках и в духе теории векторных и нормированных решеток. Без преувеличения можно сказать, что мажорируемые операторы как самостоятельный объект исследования на полвека выпали из поля зрения специалистов. Вследствие этого важнейшие структурные свойства мажорируемых операторов были получены лишь в последнее время.

В начале 80-х годов в теории векторных решеток произошли определенные качественные изменения. Возникли новые методы исследования, область приложений существенно расширилась и обогатилась. Принципиально новые идеи проникли из других разделов математики. Все это привело к возможности углубленного изучения мажорируемых операторов и к формированию самостоятельной теории мажорируемых операторов. Основные результаты о мажорируемых операторах и разнообразных их приложениях, полученные в последние двадцать лет и демонстрирующие определенную зрелость теории, изложены в монографии [45], где имеется также обширная библиография и исторический комментарий.

10. Пространства Банаха — Канторовича

Мы уже отмечали, что в связи с задачами прикладного характера Л. В. Канторович в 1936 году вводит понятие абстрактно нормированного пространства, т. е. векторного пространства, нормированного элементами векторной решетки [13]. Полные по абстрактной норме пространства стали называть пространствами типа B_K. Несколько раньше Г. Курепа [44] рассматривал «espaces pseudodistanciés», т. е. пространства с метрикой, принимающей значения из упорядоченного векторного пространства. Первые применения векторных норм и метрик были связаны с методом последовательных приближений в численном анализе, см. [13, 23, 42, 43, 51]. В последующем появились и другие применения векторных норм (см., например, [1, 6, 28]).

Таким образом, само введение пространств типа B_K, называемых теперь пространствами Банаха — Канторовича, имело как абстрактные корни, так и основательную прикладную мотивацию. Метод мажорант, в общей форме построенный Леонидом Витальевичем в пространствах Банаха — Канторовича, получил существенное развитие в его собственных исследованиях и в работах его учеников и последователей, заняв видное место в арсенале теоретических средств вычислительной математики.

Стоит подчеркнуть, что именно в статье Л. В. Канторовича [16] впервые появилась необычная аксиома разложимости для векторной нормы. В последующих исследованиях других авторов эта аксиома часто опускалась как несущественная, и ее глубокий смысл был обнаружен только в связи с булевозначным анализом (см. [27, 28]).

Прогресс в исследованиях по булевозначному анализу показал, что подобный перевод (перенос, трансляция), изготовляющий из известных фактов новые теоремы, возможен не только для K-пространств, но и практически для всех объектов, так или иначе с ними связанных для пространств типа B_K, различных классов линейных и нелинейных операторов, операторных алгебр и т. п. Отметим, что принцип Канторовича для пространств типа B_K (с точностью до элементарных оговорок) реализован в [28, 30, 45] в следующем виде: *простран-*

ство Банаха — Канторовича допускает погружение в подходящую булевозначную модель теории множеств, превращаясь в банахово пространство. Иначе говоря, пространство типа B_K — это булевозначная интерпретация банахова пространства. При этом именно необычная, считавшаяся надуманной аксиома разложимости нормы, введенная Л. В. Канторовичем, и обеспечивает возможность такого погружения.

11. K-пространства и выпуклый анализ

Абстрактные идеи Л. В. Канторовича в области теории K-пространств оказались, как это ни парадоксально, тесно связанными с идеями линейного программирования и приближенных методов анализа. Обращаясь к идейным установкам теории K-пространств в последней математической работе, которая была опубликована посмертно в «Сибирском математическом журнале» и которую Л. В. Канторович заканчивал непосредственно перед своей кончиной, он отмечал:

«*При развитии теории функциональных пространств одна сторона реальной действительности оказалась в ней на некоторое время упущенной. Для практических объектов, наряду с алгебраическими и другими соотношениями, большое значение имеет соотношение сравнения. Простое сравнение, имеющее место между всеми объектами, упорядочение, имеет обедненный характер, например, можно все виды упорядочить по их весу, но это мало что дает. Гораздо более естественным является упорядочение, которое для тех случаев, когда это естественно, оно определяется или фиксируется, а в других случаях оставляется неопределенным* (*частичное упорядочение или полуупорядочение*)*. Например, два набора продуктов несомненно следует считать сравнимыми и первый бо́льшим второго, если в нем каждого продукта больше, соответственно, чем во втором. Если же часть больше в одном, часть больше в другом, то можно сравнение не фиксировать. Так в свое время была построена теория полуупорядоченных пространств и, прежде всего, теория K-пространств, определенных выше. Она получила разнообразные применения как в теоретических вопросах анализа, так и в построении некоторых прикладных методов, например теории мажорант в связи с интенсивным изучением метода последовательных приближений. В то же время полностью ее возможности до сих пор еще не раскрыты. Недооценено также и значение этой ветви функционального анализа для экономики. Между тем, в экономике соотношения сравнения и сопоставления играют исключительную роль и уже при возникновении K-пространств было ясно, что при анализе экономики они найдут свое место и дадут полезные плоды.*

Теория K-пространств имеет и другое значение — их элементы могут использоваться как числа. В частности, при построении пространств типа Банаха в качестве нормы могут вместо чисел использоваться элементы такого пространства, конечномерного или бесконечномерного. Такая нормировка объектов является гораздо более точной. Скажем, функция нормируется не своим максимумом на всем интервале, а десятком чисел — максимумами ее на частях этого интервала».

Подчеркнем, что в приведенном фрагменте Л. В. Канторович отмечает неразрывную связь K-пространств с теорией неравенств и экономической проблематикой. Стоит также указать, что идеи линейного программирования имманентны теории K-пространств в следующем строго математическом смысле [29, 31, 46]: *выполнение в абстрактной математической структуре любого из принятых вариантов формулировок принципа двойственности с неизбежностью приводит к тому, что исходный объект является K-пространством.*

12. Заключение

Л. В. Канторович по праву считается одним из основоположников математико-экономического направления. Открытое им линейное программирование изменило лицо экономической науки. Леониду Витальевичу хватило не только таланта выдающегося математика, но и интеллектуальной решимости бороться за признание своих экономико-математических теорий. Идеи и методы, вызревшие в рамках линейного программирования, положили начало глубоким математическим исследованиям, вышли далеко за пределы экономических приложений и используются в самых разнообразных сферах человеческой деятельности.

Удивительно прозорливым оказалось положение Л. В. Канторовича о том, что элементы K-пространства суть обобщенные числа. Эвристический принцип Канторовича нашел блестящее подтверждение в рамках современной математической логики. K-Пространства, утвердившиеся в качестве новой равноправной модели вещественной прямой, навсегда вошли в сокровищницу мировой науки.

Уходят в прошлое годы общения с Л. В. Канторовичем, время его максимального вклада в науку и жизнь. Но все отчетливее становятся масштабы его личности и унифицирующих идей, устремленных в будущее.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Акилов Г. П., Кутателадзе С. С.* Упорядоченные векторные пространства. Новосибирск: Наука, 1978.

2. *Бухвалов А. В.* Порядково ограниченные операторы в векторных решетках и пространствах измеримых функций // Математический анализ. Т. 26. М.: ВИНИТИ, 1988. (Итоги науки и техники). С. 3–63.

3. *Бухвалов А. В., Векслер А. И., Гейлер В. А.* Нормированные решетки // Математический анализ. Т. 18. М.: ВИНИТИ, 1980. (Итоги науки и техники). С. 125–184.

4. *Бухвалов А. В., Векслер А. И., Лозановский Г. Я.* Банаховы решетки — некоторые банаховы аспекты теории // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, № 2. С. 137–183.

5. *Владимиров Д. А.* Булевы алгебры. М.: Наука, 1969.

6. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961.

7. *Вулих Б. З.* Введение в теорию конусов в нормированных пространствах. Калинин: Изд-во Калинин. гос. ун-та, 1977.

8. *Гёдель К.* Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств // Успехи мат. наук. 1948. Т. 8, № 1. С. 96–149.

9. *Гордон Е. И.* К теоремам о сохранении соотношений в K-пространствах // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 5. С. 55–65.

10. *Гордон Е. И.* Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K-пространства // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237, № 4. С. 773–775.

11. *Канторович Л. В.* О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций // Докл. АН СССР. 1935. Т. 4, № 1. С. 11–14.

12. *Канторович Л. В.* Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР, 1959.

13. *Канторович Л. В.* Об одном классе функциональных уравнений // Докл. АН СССР. 1936. Т. 4, № 5. С. 211–216.

14. *Канторович Л. В.* О некоторых классах линейных операций // Докл. АН СССР. 1936. Т. 3, № 1. С. 9–13.

15. *Канторович Л. В.* Общие формы некоторых классов линейных операторов // Докл. АН СССР. 1936. Т. 3, № 9. С. 101–106.

16. *Канторович Л. В.* К общей теории операций в полуупорядоченных пространствах // Докл. АН СССР. 1936. Т. 1, № 7. С. 271–271.

17. Канторович Л. В. О функциональных уравнениях // Труды ЛГУ. 1937. Т. 3, № 7. С. 17–33.

18. *Канторович Л. В.* О проблеме моментов для конечного интервала // Докл. АН СССР. 1937. Т. 14, № 9. С. 531–536.

19. *Канторович Л. В.* Математические методы организации и планирования производства. Л.: Изд-во ЛГУ, 1939.

20. *Канторович Л. В.* Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, № 6. С. 89–185.

21. *Канторович Леонид Витальевич. Библиографический указатель / Под. ред.* С. С. Кутателадзе. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2001.

22. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.

23. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
24. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз, 1962.
25. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. М.; Л.: Физматгиз, 1962.
26. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы. Метод положительных операторов. М.: Наука, 1985.
27. *Кусраев А. Г.* О пространствах Банаха — Канторовича // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 2. С. 100–110.
28. *Кусраев А. Г.* Векторная двойственность и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1985.
29. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы. Теория и приложения. Новосибирск: Наука, 1992.
30. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Булевозначный анализ. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999.
31. *Кутателадзе С. С.* О выпуклом анализе в модулях // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 4. С. 118–128.
32. *Манин Ю. И.* Доказуемое и недоказуемое. М.: Наука, 1999.
33. *Проблемы Гильберта* / Под общ. ред. П. С. Александрова. М.: Наука, 1969.
34. *Aliprantis Ch. D., Burkinshaw O.* Locally Solid Riesz Spaces. N. Y.: Acad. Press, 1978.
35. *Aliprantis Ch. D., Burkinshaw O.* Positive Operators. N. Y.: Acad. Press, 1985.
36. *Bell J. L.* Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory. N. Y. e. a.: Clarendon Press, 1985.
37. *Buskes G.* The Hahn—Banach Theorem Surveyed Warszawa: Inst. Mat., 1993. (Dissssertationes Mathematicae; 327).
38. *Cohen P. J.* Set Theory and the Continuum Hypothesis. N. Y.: W. A. Benjamin Inc., 1966.
39. *Fremlin D. H.* Topological Riesz Spaces and Measure Theory. Cambridge: Univ. Press, 1974.
40. *Jech T. J.* Lectures in Set Theory with Particular Emphasis on the Method of Forcing. Berlin: Springer–Verl., 1971.
41. *Jonge De, Van Rooij A. C. M.* Introduction to Riesz Spaces. Amsterdam: Math. Centrum, 1977.
42. *Kantorovich L. V.* The method of successive approximation for functional equations // Acta Math. 1939. V. 71. P. 63–97.
43. *Kollatz L.* Funktionalanalysis und Numerische Mathematik. Berlin: Springer–Verl., 1964.
44. *Kurepa G.* Tableaux ramifiés d'ensembles, Espaces pseudodistanciés // C. R. Acad. Sci. 1934. V. 198. P. 1563–1565.
45. *Kusraev A. C.* Dominated Operators. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000.
46. *Kutateladze S. S.* Nonstandard tools for convex analysis // Math. Japonica. 1996. V. 43, N 2. P. 391–410.
47. *Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.* Riesz Spaces. V. 1. Amsterdam; London: North-Holland, 1971.
48. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices. Berlin e. a.: Springer–Verl., 1991.
49. *Riesz F.* Sur la décomposition des opérations fonctionnelles // Atti Congresso Internaz. Bologna, 1928. V. 14. Bologna, 1930. P. 143–148.
50. *Schaefer H. H.* Banach Lattices and Positive Operators. Berlin e. a.: Springer-Verl., 1974.
51. *Schröder J.* Das Iterationsverfahren bei allgemeinierem Abshtandsbegriff // Math. Z. 1956. V. 66. P. 111–116.
52. *Schwarz H.-V.* Banach Lattices and Operators. Leipzig: Teubner, 1984.
53. *Takeuti G.* Two Applications of Logic to Mathematics. Tokyo; Princeton: Iwanami; Princeton Univ. Press, 1978.
54. *Zaanen A. C.* Riesz Spaces. V. 2. Amsterdam: North-Holland, 1983.

г. Владикавказ
Северо-Осетинский гос. университет
г. Новосибирск
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: sskut@math.nsc.ru

Статья поступила 11 октября 2001 г.