Н. Агаханов, П. Кожевников, Д. Терёшин, Д. Фон-дер-Флаасс, XLIX Международная математическая олимпиада, *Квант*, 2008, номер 6, 39–41

XLIX Международная математическая олимпиада

Очередная Международная математическая олимпиада (ММО), проходившая с 10 по 22 июля 2008 года в столице Испании Мадриде, вновь побила рекорд по числу участников и делегаций: в олимпиаде приняли участие 535 юных математиков из 97 стран мира. Олимпиада подарила участникам много ярких впечатлений, новых друзей и свежих математических идей. Экскурсии в Королевский дворец, в знаменитый монастырь Сан Лоренцо дель Эскориал, танцевальное фламенко-шоу, конкурсы и спортивные состязания в свободное время надолго запомнятся школьникам с разных концов света.

На главном школьном математическом соревновании мира Россию представляли выпускники *Владислав Волков* и *Роман Бойкий* из Санкт-Петербурга (ФМШ 239), *Дмитрий Бабичев* из города Долгопрудного (ФМШ 5), *Никита Кудык* из Омска (гимназия 117), *Иван Бажов* из Екатеринбурга (гимназия 9) и *Евгений Горинов* из Кирова (ФМЛ). Руководителями команды были Н.Х.Агаханов, П.А.Кожевников, Д.А.Терёшин, Д.Г.Фон-Дер-Флаас. Наша команда выступила убедительно и ровно, повторив, казалось, неповторимое достижение 2002 года – все шестеро участников из России удостоились медалей высшей пробы. Такого результата не смогла добиться еще ни одна сборная.

Команда России на XLIX Международной математической олимпиаде. Слева направо: В.Волков, Р.Бойкий, Е.Горинов, Н.Кудык, И.Бажов, Д.Бабичев

Задачный вариант олимпиады 2008 года по стилю несколько отличался от вариантов предыдущих двух лет, когда среди шести задач ММО две задачи были достаточно простые, а две – крайне трудными. В этом году вариант был значительно ровнее по трудности задач. Интересно, что самая легкая и самая трудная задачи олимпиады (задачи 1 и 6) – это геометрические миниатюры, предложенные для ММО Россией, причем оба автора – Андрей Гаврилюк и Владимир Шмаров – студенты Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, в недавнем прошлом победители Международной и Всероссийской олимпиад.

Приводим таблицу результатов российских участников (каждая задача оценивается из 7 баллов):

Участник	Баллы по задачам						Сумма баллов	Медаль
	1	2	3	4	5	6		
Волков Владислав	7	7	7	7	7	2	37	золотая
Бабичев Дмитрий	7	7	7	7	7	1	36	золотая
Бойкий Роман	7	4	7	7	7	0	32	золотая
Кудык Никита	7	4	7	7	7	0	32	золотая
Бажов Иван	7	7	1	7	7	2	31	золотая
Горинов Евгений	7	4	6	7	7	0	31	золотая

а также таблицу результатов стран, получивших наивысшие рейтинги в командном зачете:

Рейтинг	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
1	Китай	217	5	1	0
2	Россия	199	6	0	0
3	США	190	4	2	0
3	Южная Корея	188	4	2	0
5	Иран	181	1	5	0
6	Таиланд	175	2	3	1
7	КНДР	173	2	4	0
8	Турция	170	3	1	2
9	Тайвань	168	2	4	0
10	Венгрия	165	2	3	1
11	Япония	163	2	3	1
12	Вьетнам	159	2	2	2
13	Польша	157	2	3	1
14	Болгария	154	2	1	3
15	Украина	153	2	2	2
16	Бразилия	152	0	5	1
17	Перу	141	1	3	2
17	Румыния	141	0	4	2
19	Австралия	140	0	5	1
20	Сербия	139	1	3	0
20	Германия	139	1	2	3

Руководители команды выражают благодарность всем педагогам-наставникам, которые помогли ребятам воплотить свой талант в прекрасные результаты. Благодарим также членов тренерского совета, завершавших подготовку команды на сборах, которые проходили с 23 июня по 13 июля в пансионате «Лисицкий бор» Тверской области (на сборах с командой работали: аспирант Института системного анализа *А.В.Акопян*, педагог ФМЛ 239 из Санкт-Петербурга *С.Л.Берлов*, старший преподаватель МФТИ *И.И.Богданов*, аспирант Математического института РАН *А.И.Гарбер*, аспирант мехмата МГУ *А.А.Глазырин*, профессор Ярославского государственного университета *В.Л.Дольников*, научный сотрудник Петербургского отделения Математического института РАН и преподаватель СПбГУ *Д.В.Карпов*, педагог ФМЛ 239 из Санкт-Петербурга *М.Я.Пратусевич*, программист из Москвы *Г.Р.Челноков*).

Руководители команды искренне признательны *Дмитрию Юрьевичу Дойхену* за оказание поддержки в проведении мероприятий по подготовке национальной команды России и ее участия в международных математических соревнованиях.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

1. См. задачу М2112 «Задачника «Кванта».

(Россия)

2. а) Докажите, что неравенство

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\ge 1$$

выполняется для любых отличных от 1 действительных чисел x, y, z таких, что $xyz = 1$.

б) Докажите, что указанное неравенство обращается в равенство для бесконечного числа троек отличных от 1 рациональных чисел x, y, z таких, что $xyz = 1$.

(Австрия)

3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что число n^2+1 имеет простой делитель, который больше чем $2n+\sqrt{2n}$.

(Литва)

4. Найдите все функции f: $(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ (т.е. функции, определенные на множестве всех положительных действительных чисел и принимающие положительные значения) такие, что

$$\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

для любых положительных w, x, y, z, удовлетворяющих равенству $wx = yz$.

(Южная Корея)

5. Пусть n и k – натуральные числа такие, что $k\ge n$, а число $k-n$ четное. Имеются $2n$ лампочек, занумерованных числами 1, 2, …, $2n$, каждая из которых может находиться в одном из двух состояний: *вкл.* (включена) и *выкл.* (выключена). Вначале все лампочки были выключены. Рассматриваются упорядоченные последовательности *шагов*: на каждом шаге ровно одна из лампочек меняет свое состояние на противоположное (с вкл. на выкл. либо с выкл. на вкл.).

Обозначим через N количество последовательностей из k шагов, приводящих к ситуации, в которой все лампочки с 1-й по n-ю включены, а все лампочки с $(n + 1)$-й по $(2n)$-ю выключены.

Обозначим через M количество последовательностей из k шагов, приводящих к ситуации, в которой также все лампочки с 1-й по n-ю включены, все лампочки с $(n + 1)$-й по $(2n)$-ю выключены, но при этом ни одна из лампочек с $(n + 1)$-й по $(2n)$-ю ни разу не меняла своего состояния.

Найдите значение отношения N/M.

(Франция)

6. См. задачу М2115 «Задачника «Кванта».

(Россия)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

2. Сделаем замену $\frac{x}{x-1}=a$, $\frac{y}{y-1}=b$, $\frac{z}{z-1}=c$, где a, b, c не равны 1. Заметим, что x, y, z однозначно выражаются через a, b, c: $x=\frac{a}{a-1}$, $y=\frac{b}{b-1}$, $z=\frac{c}{c-1}$. Условие $xyz = 1$ переписывается в виде

$$(a-1)(b-1)(c-1)=abc \Leftrightarrow a+b+c-1=ab+bc+ca \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(a+b+c-1)=(a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-1=(a+b+c)^2-2(a+b+c)+1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-1=(a+b+c-1)^2.$$

Отсюда вытекает нужное неравенство $a^2+b^2+c^2\ge 1$. Кроме того, из приведенных выкладок ясно, что если $a\ne 1$, $b\ne 1$, $c\ne 1$ и $a+b+c-1=ab+bc+ca$, то неравенство обращается в равенство при условии $a+b+c=1$. Иначе говоря, условие обращения неравенства в равенство для чисел $a\ne 1$, $b\ne 1$, $c\ne 1$ эквивалентно системе

$$\begin{cases}a+b+c=1,\\ ab+bc+ca=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=1-a-b,\\ a+b-a^2-ab-b^2=0.\end{cases}$$

Положим $b=\lambda a$ и подставим в уравнение $a+b-a^2-ab-b^2=0$. Получим $a\left(1+\lambda-a\left(1+\lambda+\lambda^2\right)\right)=0$. Отсюда следует, что при любом λ тройка чисел $a=\frac{1+\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}$, $b=\frac{\lambda+\lambda^2}{1+\lambda+\lambda^2}$, $c=\frac{-\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}$ удовлетворяет системе. Если в качестве λ брать натуральные числа, то, как легко видеть, мы получаем бесконечное количество различных троек рациональных чисел a, b, c, отличных от 1. Соответственно, этим тройкам чисел a, b, c соответствует бесконечное количество различных троек рациональных чисел x, y, z, удовлетворяющих условию.

3 (Р.Бойкий).

В решении используется существование бесконечного количества простых чисел p вида $4a+1$ (т.е. дающих остаток 1 при делении на 4), а также то, что -1 является *квадратичным вычетом* по модулю простого p вида $4a+1$ (т.е. для простого p вида $4a+1$ найдется такое целое m, что m^2+1 делится на p).

Докажем, что для каждого простого числа $p>20$ вида $4a+1$ найдется требуемое натуральное n.

Рассмотрим такое целое число m, что $m^2+1\,\vdots\,p$. Эта делимость сохранится, если заменить m на остаток при делении m на p, значит, можно считать, что $m\in\{0,1,2,\ldots,p-1\}$. Кроме того, если $m^2+1\,\vdots\,p$, то и $(p-m)^2+1\,\vdots\,p$. Положим $n=\min\{m,p-m\}$, тогда $n^2+1\,\vdots\,p$ и $0\le n\le\frac{p-1}{2}$.

Запишем n в виде $n=\frac{p-1}{2}-k$, где k – целое число, $0\le k\le\frac{p-1}{2}$. Имеем

$$\left(\frac{p-1}{2}-k\right)^2+1\,\vdots\,p\Rightarrow(p-(1+2k))^2+4\,\vdots\,p\Rightarrow(2k+1)^2+4\,\vdots\,p,$$

а так как $(2k+1)^2+4>0$, то

$$(2k+1)^2+4\ge p \Rightarrow (2k+1)^2 \ge p-4.$$

Проверим, что найденное n удовлетворяет условию задачи:

$$p>2n+\sqrt{2n} \Leftrightarrow p>2\left(\frac{p-1}{2}-k\right)+\sqrt{2\left(\frac{p-1}{2}-k\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p>p-1-2k+\sqrt{p-1-2k} \Leftrightarrow 2k+1>\sqrt{p-1-2k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2k+1)^2+(2k+1)>p,$$

но это неравенство верно, так как по доказанному

$$(2k+1)^2+(2k+1)\ge p-4+\sqrt{p-4}>p-4+\sqrt{20-4}=p.$$

Из приведенных рассуждений вытекает, что чисел n с требуемым свойством бесконечно много. В самом деле, пусть это не так и N – максимальное из чисел, удовлетворяющих условию задачи. Возьмем простое число p вида $4a+1$ такое, что $p>\max\{20, N^2+1\}$. Как мы доказали, для этого p найдется натуральное n, удовлетворяющее условию и такое, что $n^2+1 \,\vdots\, p$. Тогда $n^2+1\ge p>N^2+1$, откуда $n>N$ – противоречие.

4 (Д.Бабичев). *Ответ*: $f(x)=x$ и $f(x)=\frac{1}{x}$.

Пусть $w=x=y=z=a>0$. Тогда из исходного уравнения получаем $\frac{2(f(a))^2}{2f(a^2)}=\frac{a^2+a^2}{a^2+a^2}=1$, откуда для всех $a>0$ выполнено

$$(f(a))^2=f(a^2), \qquad (1)$$

в частности $(f(1))^2=f(1)$ и $f(1)=1$ (так как $f(1)\ne 0$).

Далее, положим $w=x=a>0$, $y=1$, $z=a^2$: $\frac{2(f(a))^2}{f(a^4)+f(1)}=\frac{2a^2}{a^4+1}$. Согласно (1), $f(a^4)=(f(a^2))^2=(f(a))^4$, откуда $\frac{2(f(a))^2}{(f(a))^4+1}=\frac{2a^2}{a^4+1}$. Положив $t=f(a)$, имеем

$$\frac{2t^2}{t^4+1}=\frac{2a^2}{a^4+1} \Leftrightarrow t^2a^4+t^2=a^2t^4+a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^2t^2-1)(a^2-t^2)=0.$$

Так как $a>0$ и $t>0$, отсюда следует, что для каждого $a>0$ выполнено $t=f(a)=a$ или $t=f(a)=\frac{1}{a}$. Предположим, что нашлись положительные a и b, не равные 1 и такие, что $f(a)=a$, $f(b)=\frac{1}{b}$. Тогда положив $w=a$, $x=b$, $y=ab$, $z=1$, получим (с учетом (1))

$$\frac{a^2+\frac{1}{b^2}}{1+(f(ab))^2}=\frac{a^2+b^2}{1+a^2b^2}. \qquad (2)$$

Если $f(ab)=ab$, то из (2) следует

$$\frac{a^2+\frac{1}{b^2}}{1+a^2b^2}=\frac{a^2+b^2}{1+a^2b^2} \Leftrightarrow \frac{1}{b^2}=b^2 \Rightarrow b^4=1 \Rightarrow b=1,$$

что противоречит предположению.

Если же $f(ab)=\frac{1}{ab}$, то из (2) следует

$$\frac{a^2+\frac{1}{b^2}}{1+\frac{1}{a^2b^2}}=\frac{a^2+b^2}{1+a^2b^2} \Rightarrow \frac{a^2b^2}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{1+a^2b^2} \Rightarrow a^4b^2+a^2=$$

$$=a^2+b^2 \Rightarrow b=0 \text{ или } a^4=1,$$

что противоречит предположению.

Таким образом, либо для всех $x>0$ выполнено $f(x)=x$, либо для всех $x>0$ выполнено $f(x)=\frac{1}{x}$. Непосредственно подстановка показывает, что функции $f(x)=x$ и $f(x)=\frac{1}{x}$ подходят.

5 (В.Волков). *Ответ*: 2^{k-n}.

Назовем последовательность из k шагов, меняющую состояние каждой из лампочек 1, 2, …, n нечетное количество раз (и не меняющую состояние лампочек $n+1$, …, $2n$ ни разу), последовательностью I типа; по условию, число таких последовательностей равно M. Назовем последовательность из k шагов, меняющую состояние каждой из лампочек 1, 2, …, n нечетное количество раз, а лампочек $n+1$, …, $2n$ – четное количество раз, последовательностью II типа; по условию, число таких последовательностей равно N. Разобьем лампочки на n пар: в i-ю пару объединим i-ю и $(n+i)$-ю лампочки, $i=1, 2, \ldots, n$. Если на каком-то шаге одна из лампочек некоторой пары изменила состояние, будем говорить, что пара изменила состояние. Рассмотрим последовательность II типа. На каждом из k шагов меняет состояние ровно одна из n пар, причем каждая пара должна изменить состояние нечетное количество раз. Если объявить теперь пары «новыми» лампочками с номерами 1, 2, …, n, то из последовательности II типа получаем соответствующую последовательность I типа.

Докажем, что при таком соответствии каждая последовательность I типа поставлена в соответствие ровно 2^{n-k} последовательностям II типа, – отсюда сразу последует, что $N/M=2^{k-n}$. Зафиксируем последовательность I типа, пусть в ней пара с номером i меняла состояние в $2l_i+1$ шагах ($i\in\{1,2,\ldots,n\}$). Чтобы восстановить последовательность II типа, надо эти $2l_i+1$ шагов разбить на 2 множества – шаги, на которых изменяет состояние i-я лампочка, и шаги, на которых изменяет состояние $(n+i)$-я лампочка, причем в первом множестве должно быть нечетное количество шагов. Всего вариантов такого разбиения 2^{2l_i} (это число равно числу способов разбить множество из $2l_i+1$ элементов на два подмножества, поскольку ровно в одном из подмножеств нечетное число элементов). Такое рассуждение о восстановлении последовательности II типа проведем независимо для $i=1, 2, \ldots, n$. В результате получим, что данная последовательность I типа сопоставлена $2^{2l_1}\cdot 2^{2l_2}\cdot\ldots\cdot 2^{2l_n}=2^{2l_1+2l_2+\ldots+2l_n}$ последовательностям II типа. Заметим, что $(2l_1+1)+(2l_2+1)+\ldots+(2l_n+1)=k$ – общее число ходов, поэтому $2l_1+2l_2+\ldots+2l_n=k-n$, что и требовалось.

Публикацию подготовили
Н.Агаханов, П.Кожевников,
Д.Терёшин, Д.Фон-Дер-Флаасс