А. М. Каган, В. П. Паламодов, Неполные экспонентные семейства и несмещенные оценки с наименьшей дисперсией. I, *Теория вероятн. и ее примен.*, 1967, том 12, выпуск 1, 39–50

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том XII | *Выпуск 1*
1967

НЕПОЛНЫЕ ЭКСПОНЕНТНЫЕ СЕМЕЙСТВА И НЕСМЕЩЕННЫЕ ОЦЕНКИ С НАИМЕНЬШЕЙ ДИСПЕРСИЕЙ. I

А. М. КАГАН, В. П. ПАЛАМОДОВ

Введение

Пусть $\{P_\alpha\}$ — произвольное семейство распределений на пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$, зависящее от абстрактного параметра $\alpha \in A$. Если $g(\alpha)$ — несмещенно оцениваемая функция параметра α, а мерой качества различных несмещенных оценок служит их дисперсия, то естественно поставить задачу описания тех $g(\alpha)$, которые допускают наилучшие оценки, т. е. оценки с наименьшей при всех $\alpha \in A$ дисперсией, и самих наилучших оценок. Задача эта полностью решается для так называемых полных относительно достаточных статистик семейств (см. [1]), и ответ, даваемый теоремой Рао — Блекуэла — Колмогорова, в этом случае чрезвычайно прост: всякая функция, зависящая только от достаточных статистик, будет наилучшей несмещенной оценкой своего математического ожидания, а все остальные оценки недопустимы.

Для семейств с неполными достаточными статистиками задача становится существенно более трудной. По-прежнему, в силу теоремы Рао — Блекуэла — Колмогорова, оценки, зависящие не только от достаточных статистик, недопустимы, но могут оказаться недопустимыми уже и функции достаточных статистик (см. [2], [6]).

Настоящая работа посвящена задаче наилучшего несмещенного оценивания для так называемых неполных экспонентных семейств с полиномиальными связями между параметрами. Систематическое изучение этих семейств проведено в монографии [3], и основная теорема нашей работы является ответом на один из вопросов, поставленных там. Редукция исходной статистической задачи к дифференциально-алгебраической ведется по схеме D-метода Виймсана [7] (см. также [2], [3]). В § 1 устанавливается один общий результат о структуре минимального полного класса несмещенных оценок для произвольного семейства распределений; в § 2 описываются изучаемые далее экспонентные семейства; §§ 3, 4 посвящены формулировке и доказательству основной теоремы.

Подчеркнем еще раз, что всюду в работе мерой качества оценок служит их дисперсия, и понятие оптимальности оценки относится к такому выбору меры качества.

Авторы пользуются случаем поблагодарить Ю. В. Линника за постоянное внимание к работе.

§ 1. Структура минимального полного класса несмещенных оценок

Будем писать $g(\alpha) \in M$, если найдется оценка $\tilde{g}(x)$ с условием

$$\mathrm{E}_\alpha \tilde{g}(x) = g(\alpha), \qquad \mathrm{E}_\alpha[\tilde{g}(x) - g(\alpha)]^2 < \infty \tag{1}$$

при всех $\alpha \in A$.

Теорема 1. *Минимальный полный класс (м.п.к.) несмещенных оценок функции $g(\alpha) \in M$ либо пуст, либо состоит из одного элемента, либо бесконечен. Во втором случае единственный элемент полного класса является, очевидно, наилучшей несмещенной оценкой для $g(\alpha)$.*

Доказательству теоремы 1 мы предпошлем лемму.

Лемма 1 (см. [8], стр. 257). *Для того чтобы $\hat{g}(x)$ была наилучшей несмещенной оценкой функции $g(\alpha) \in M$, необходимо и достаточно, чтобы для всякой статистики $\chi(x)$ с условием*

$$\mathrm{E}_\alpha \chi(x) = 0, \qquad \mathrm{E}_\alpha \chi(x)^2 < \infty, \ \alpha \in A, \tag{2}$$

имело место соотношение

$$\mathrm{E}_\alpha(\hat{g}\chi) = 0, \qquad \alpha \in A. \tag{3}$$

Доказательство теоремы 1. Предположим, что м.п.к. несмещенных оценок функции $g(\alpha)$ состоит из конечного числа элементов $\tilde{g}_1(x), \ldots, \tilde{g}_k(x)$, где $k > 1$. Поскольку $\tilde{g}_1(x)$ не является наилучшей несмещенной оценкой для $g(\alpha)$, то по лемме 1 найдется статистика $\chi(x)$ с условием (2), для которой

$$\mathrm{E}_{\alpha_0}(\tilde{g}_1\chi) < 0 \tag{4}$$

при некотором $\alpha_0 \in A$. Рассмотрим статистику

$$g^*(x) = \tilde{g}_1(x) + \varepsilon\chi(x),$$

где $\varepsilon > 0$, которая, очевидно, несмещенно оценивает $g(\alpha)$. Имеем:

$$\mathrm{E}_\alpha[g^*(x) - g(\alpha)]^2 = \mathrm{E}_\alpha[\tilde{g}_1(x) - g(\alpha)]^2 + 2\varepsilon \mathrm{E}_\alpha(\tilde{g}_1\chi) + \varepsilon^2 \mathrm{E}_\alpha \chi^2. \tag{5}$$

Из (4) и (5) видно, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ оценка $g^*(x)$ имеет в точке α_0 меньшую дисперсию, чем $\tilde{g}_1(x)$. Построим теперь бесконечную последовательность несмещенных оценок для $g(\alpha)$:

$$g_i^*(x) = \tilde{g}_1(x) + \varepsilon_i\chi(x), \tag{6}$$

где $\varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$.

Так как м.п.к. несмещенных оценок $g(\alpha)$ конечен, найдется такая оценка $\tilde{g}_l(x)$, $1 \leqslant l \leqslant k$, что для бесконечной подпоследовательности $i_1 < i_2 < \ldots$

$$\mathrm{E}_\alpha[\tilde{g}_l(x) - g(\alpha)]^2 \leqslant \mathrm{E}_\alpha[g^*_{i_m}(x) - g(\alpha)]^2, \qquad \alpha \in A. \tag{7}$$

Переходя в (7) к пределу при $m \to \infty$, получим, учитывая минимальность полного класса,

$$E_\alpha[\tilde{g}_l(x) - g(\alpha)]^2 = E_\alpha[\tilde{g}_1(x) - g(\alpha)]^2, \qquad \alpha \in A. \tag{8}$$

Но тогда при достаточно больших m оценка $\tilde{g}_1(x)$ имеет в точке α_0 меньшую дисперсию, чем $g_i^*(x)$, что противоречит (5).

Следовательно, м.п.к. несмещенных оценок $g(\alpha)$ не может состоять из конечного числа элементов, если это число больше 1.

§ 2. Неполные экспонентные семейства

Перейдем теперь к задаче оценивания по результатам n независимых наблюдений над случайной величиной, функция распределения которой $F(x;\alpha)$ имеет по мере Лебега плотность

$$f(x;\alpha) = \exp\{t_0(x) + c_1(\alpha)t_1(x) + \ldots + c_s(\alpha)t_s(x) + c_0(\alpha)\}, \tag{9}$$

где $s \leqslant n$. Положим $\theta_i = c_i(\alpha)$, $i = 1, \ldots, s$, и будем предполагать, что при $\alpha \in A$ точка $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s)$ пробегает всюду плотное подмножество некоторого алгебраического подмногообразия области Ω. Это подмногообразие запишем в виде пересечения $\Omega \cap \Pi$, где Π — алгебраическое многообразие в R^s, которое мы зададим с помощью полиномиальных уравнений связи

$$\begin{gathered} \Pi_1(\theta_1, \ldots, \theta_s) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \Pi_r(\theta_1, \ldots, \theta_s) = 0, \qquad r < s. \end{gathered} \tag{10}$$

Например, если α — многомерный вещественный параметр, а $c_i(\alpha)$ — многочлены, $i = 1, \ldots, s$, то сформулированное выше условие обычно выполняется. Примерами семейств (9) с уравнениями связи (10) служат рассмотренные в [2] семейства плотностей

$$f(x;\ \alpha) = c(\alpha)\exp\{t_0(x) + \alpha t_1(x) + \ldots + \alpha^s t_s(x)\}, \tag{11}$$

где α — вещественный параметр. Уравнения связи для семейства (11) имеют вид

$$\theta_2 - \theta_1^2 = 0, \ldots, \theta_s - \theta_1^s = 0. \tag{12}$$

n-я степень семейства распределений (9), характеризующая распределение выборки $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ из совокупности $F(x;\ \alpha)$, имеет в R^n плотность по мере Лебега

$$f^{(n)}(\mathbf{x};\ \theta) = c(\theta)^n \exp\left\{\sum_1^n t_0(x_i) + \theta_1\sum_1^n t_1(x_i) + \ldots + \theta_s\sum_1^n t_s(x_i)\right\}, \tag{13}$$

где функция $c(\theta)$ определяется условием

$$c(\theta)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{t_0(x) + \theta_1 t_1(x) + \ldots + \theta_s t_s(x)\}\,dx = 1, \qquad \theta \in \Omega \cap \Pi.$$

Достаточными статистиками для семейства (13) служат

$$T_1 = \sum_1^n t_1(x_i), \ldots, T_s = \sum_1^n t_s(x_i).$$

В дальнейшем будем предполагать, что статистики $T_1, \ldots, T_s$ функционально независимы; это заведомо имеет место, если функции $1, t_1(x), \ldots \ldots, t_s(x)$ линейно независимы и непрерывно дифференцируемы по x (см. [4]). Тогда распределение достаточных статистик $T = (T_1, \ldots, T_s)$ задается в R^s плотностью по мере Лебега

$$p(T;\ \theta) = C(\theta) h(T) \exp(\theta_1 T_1 + \ldots + \theta_s T_s), \tag{14}$$

где $h(T) \geqslant 0$, $\theta \in \Omega \cap \Pi$.

Будем предполагать, что существует окрестность $\mathcal{T}$ в R^s, в которой функция $h(T)$ положительна и бесконечно дифференцируема. Конечно, можно считать в этом случае, что

$$h_0 < h(T) < h_1, \qquad T \in \mathcal{T}. \tag{15}$$

Нам удобно также считать в дальнейшем, что $\mathcal{T}$ — выпуклая область.

Каждому полиному $Q(T) = Q(T_1, \ldots, T_s) = \sum\limits_{j_1, \ldots, j_s} a_{j_1 \ldots j_s} T_1^{j_1} \ldots T_s^{j_s}$ от достаточных статистик отнесем дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$q(D) = q\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\theta_s}\right) = \sum_{j_1, \ldots, j_s} a_{j_1 \ldots j_s} \frac{\partial^{j_1 + \ldots + j_s}}{\partial\theta_1^{j_1} \ldots \partial\theta_s^{j_s}}.$$

§ 3. Полином от достаточных статистик как наилучшая несмещенная оценка

Мы приступим теперь к выяснению условий, которые накладывает на многообразие Π свойство некоторого (нетривиального) полинома $Q(T)$ от достаточных статистик быть наилучшей несмещенной оценкой для $\mathrm{E}_\theta Q$, $\theta \in \Omega \cap \Pi$. К сожалению, многообразие Π может иметь компоненты, вовсе не пересекающиеся с Ω, и оптимальность $Q(T)$ в классе несмещенных оценок функции $\mathrm{E}_\theta Q$, $\theta \in \Omega \cap \Pi$, никакой информации относительно устройства этих компонент, разумеется, не содержит. Обозначим поэтому через N наименьшее алгебраическое многообразие, для которого $N \cap \Omega = \Pi \cap \Omega$. Если $\Omega = R^s$, то, конечно, $N = \Pi$, но последнее может иметь место и в тех случаях, когда $\Omega \subset R^s$.

Основная теорема. *Для того чтобы полином* $Q(T) \not\equiv \mathrm{const}$ *с условием* $\mathrm{E}_\theta Q^2 < \infty$, $\theta \in \Omega \cap \Pi$, *был наилучшей несмещенной оценкой функции* $\mathrm{E}_\theta Q$ *для экспонентного семейства* (14), $\theta \in \Omega \cap \Pi$, *необходимо и достаточно, чтобы:*

1°. *в пространстве* R^s *переменных* $(\theta_1, \ldots, \theta_s)$ *существовала линейная система координат* $\theta'_1, \ldots, \theta'_s$, *в которой* N *является многообразием общих корней полиномов*

$$R_i(\theta'_{d+1}, \ldots, \theta'_s), \quad i = 1, \ldots, l; \quad 0 \leqslant d \leqslant s;$$

2°. *в соответствующей системе координат* $T'_1, \ldots, T'_s$ *в пространстве* R^s *значений* $(T_1, \ldots, T_s)$ *полином* Q *зависел только от* $T'_1, \ldots, T'_d$.

Другими словами, если $Q(T)$ *— наилучшая несмещенная оценка функции* $E_\theta Q$, $\theta \in \Omega \cap \Pi$, *то* N *— цилиндр, т. е. прямое произведение некоторого линейного подпространства* $L \subset R^s$ *и некоторого множества* $\nu \subset L^\perp$, *а многочлен* $Q(T)$ *постоянен на каждом линейном многообразии, ортогональном к* L.

Отметим сразу же очевидное

Следствие. *Если в условиях основной теоремы* $\Omega = R^s$, *то* Π *— цилиндр.*

Заметим, что постоянство $Q(T)$ на ортогональных к L линейных многообразиях эквивалентно тому, что соответствующий оператор $q(D)$ действует в L, т. е. является многочленом от дифференцирований $\partial / \partial l_1, \ldots, \partial / \partial l_d$ вдоль направлений, лежащих в L.

Доказательство основной теоремы. 1. Достаточность. Пусть условия теоремы выполнены. Не уменьшая общности, можно считать, что уже в исходной системе координат многообразие N задается уравнениями $R_i(\theta_{d+1}, \ldots, \theta_s) = 0$, $i = 1, \ldots, l$, а полином $Q(T)$ зависит только от $T_1, \ldots, T_d$.

Пусть $\chi(T)$ — произвольная несмещенная оценка нуля, $\theta \in N \cap \Omega$. Возьмем любую точку $\theta_0 = (\theta_{10}, \ldots, \theta_{s0}) \in N \cap \Omega$, обозначим ω сечение Ω поверхностью $\theta_{d+1} = \theta_{d+1,0}, \ldots, \theta_s = \theta_{s0}$ и положим

$$\psi(T) = \psi(T_1, \ldots, T_d) = \int \chi(T) h(T) \exp(\theta_{d+1,0} T_{d+1} + \ldots$$
$$\ldots + \theta_{s0} T_s)\, dT_{d+1} \ldots dT_s.$$

Тогда из того, что многообразие N вместе с точкой θ_0 содержит точки $(\theta_1, \ldots, \theta_d, \theta_{d+1,0}, \ldots, \theta_{s0})$ при всех $(\theta_1, \ldots, \theta_d)$, и условия $\mathbf{E}_\theta \chi = 0$, $\theta \in N \cap \Omega$, получаем

$$\int \psi(T) \exp(\theta_1 T_1 + \ldots + \theta_d T_d)\, dT_1 \ldots dT_d = 0$$

при всех $(\theta_1, \ldots, \theta_d) \in \omega$.

Следовательно, по теореме единственности для преобразования Лапласа, $\psi(T) = 0$.

Вычислим теперь $\mathbf{E}_{\theta_0}(Q\chi)$, $\theta_0 \in N \cap \Omega$.

Имеем:

$$\mathbf{E}_{\theta_0}(Q\chi) = C(\theta_0) \int Q(T_1, \ldots, T_d)\, dT_1 \ldots dT_d \int \chi(T) h(T) \times$$

$$\times \exp\left(\sum_{j=1}^{s} \theta_{j0} T_j\right) dT_{d+1} \ldots dT_s = C(\theta_0) \int Q(T_1, \ldots, T_d) \times$$

$$\times \exp\left(\sum_{j=1}^{d} \theta_{j0} T_j\right) dT_1 \ldots dT_d \int \chi(T) h(T) \exp\left(\sum_{j=d+1}^{s} \theta_{j0} T_j\right) dT_{d+1} \ldots dT_s =$$

$$= C(\theta_0) \int Q(T) \psi(T) \exp\left(\sum_{j=1}^{d} \theta_{j0} T_j\right) dT_1 \ldots dT_d = 0.$$

По лемме 1 $Q(T)$ является наилучшей несмещенной оценкой $\mathbf{E}_\theta Q$, $\theta \in N \cap \Omega$.

2. Необходимость. Рассмотрим пространство $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\mathscr{T})$ всех бесконечно дифференцируемых функций от T с носителем в $\mathscr{T}$ и обозначим Z пространство преобразований Лапласа функций из $\mathscr{D}$. Пусть J — идеал в Z функций, обращающихся в нуль на $\Omega \cap \Pi$.

Лемма 2. *Если $Q(T)$ — наилучшая несмещенная оценка для* $\mathbf{E}_\theta Q$, $\theta \in \Omega \cap \Pi$, *то оператор $q(D)$ действует в J, т. е. переводит всякую функцию из J в некоторую функцию также из J.*

Доказательство. Пусть $\varkappa(\theta)$ — произвольная функция из J, а $\chi(T)$ — ее прообраз в $\mathscr{D}$. Представим его в виде

$$\chi(T) = \chi_0(T) \cdot h(T). \tag{16}$$

Такое представление возможно вследствие условия (15). Имеем $\mathbf{E}_\theta \chi_0 = 0$, $\theta \in \Omega \cap \Pi$, и, очевидно, $\mathbf{E}_\theta \chi_0^2 < \infty$, $\theta \in \Omega \cap \Pi$; поэтому в силу леммы 1 должно быть $\mathbf{E}_\theta (Q\chi_0) = 0$, $\theta \in \Omega \cap \Pi$. Но

$$\mathbf{E}_\theta (Q\chi_0) = C(\theta) \int_{R^s} Q(T) \chi_0(T) h(T) \exp\left(\sum_{j=1}^{s} \theta_j T_j\right) dT =$$

$$= C(\theta) \int_{R^s} Q(T) \chi(T) \exp\left(\sum_{j=1}^{s} \theta_j T_j\right) dT = C(\theta) \cdot q(D)[\varkappa(\theta)], \tag{17}$$

и так как $C(\theta) > 0$, $\theta \in \Omega \cap \Pi$, то

$$q\varkappa = 0, \qquad \theta \in \Omega \cap \Pi. \tag{18}$$

Итак, $q\varkappa \in J$ и лемма 2 доказана.

Последующая часть работы посвящена описанию многообразий N, для которых существуют нетривиальные дифференциальные операторы $q(D)$ с постоянными коэффициентами, действующие в J, и самих операторов с этим свойством. Такое описание дается в теореме 2, которая вместе с леммой 2 и доказывает основную теорему. Для удобства будем называть пару (N, q) совместной, если оператор q действует в идеале J.

§ 4. Описание совместных пар

Пусть $\mathscr{P}$ — кольцо всех многочленов с комплексными коэффициентами от переменных $\theta_1, \ldots, \theta_s$. Обозначим I идеал в этом кольце, образованный всеми многочленами, обращающимися в нуль на $\Omega \cap \Pi$.

Теорема 2. *Для того чтобы пара (N, q) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы $N = L \times \nu$, где L — некоторое линейное подпространство в R^s, а ν — некоторое подмножество в $L^\perp$, причем оператор q действует в L.*

Доказательство. Достаточность очевидна, поскольку всякий оператор, действующий в L, переводит бесконечно дифференцируемые функции, равные нулю на $L \times \nu$, в функции, обладающие тем же свойством. Перейдем к доказательству необходимости. Тривиальный случай $N = R^s$ исключим из рассмотрения. Согласно известному свойству вещественных алгебраических многообразий (см., например, [9]) многообразие N обладает подмногообразием N_*, удовлетворяющим условиям:

1. для каждой неприводимой компоненты N' многообразия N $\dim N' > \dim (N' \cap N_*)$,

2. множество $N_0 = N \diagdown N_*$ в окрестности каждой своей точки является регулярным аналитическим многообразием некоторой размерности d; точнее, существуют вещественные многочлены $f_1, \ldots, f_{s-d} \in I$, градиенты которых в этой точке линейно независимы.

Для каждой точки $\theta \in R^s$ обозначим $\mathscr{H}_\theta$ пространство всех аналитических в окрестности θ функций. Если $\theta \in N$, то через J_θ обозначим подпространство в $\mathscr{H}_\theta$, образованное функциями, равными нулю на N.

Лемма 3. *Если $\theta \in N_0$, то всякую функцию $\varphi \in J_\theta$ можно записать в виде*

$$\varphi = f_1\psi_1 + \ldots + f_{s-d}\psi_{s-d}, \tag{19}$$

где $f_1, \ldots, f_{s-d}$ — многочлены, определенные выше, а функции $\psi_1, \ldots, \psi_{s-d}$ принадлежат $\mathscr{H}_\theta$.

Доказательство. Выберем область $U \subset C^s$, содержащую точку θ, в которой градиенты многочленов $f_1, \ldots, f_{s-d}$ остаются линейно независимыми. В этой окрестности точки мы можем ввести невырожденную систему координат $(f_1, \ldots, f_{s-d}, \tau_1, \ldots, \tau_d)$, где $\tau_i = \tau_i(z)$ — некоторые аналитические функции z. Пусть $\varphi(z)$ — произвольная функция из J_θ. По условию, она обращается в нуль при вещественных z, принадлежащих поверхности $f_1(z) = \ldots = f_{s-d}(z) = 0$; следовательно, она обращается в нуль на этой поверхности при всех $z \in U$. Поэтому в некоторой, быть может, меньшей окрестности $U \subset C^s$ она может быть записана в виде (19) с $\psi_1, \ldots, \psi_{s-d} \in \mathscr{H}_\theta$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если пара (N, q) совместна, то для любой точки $\theta \in N_0 \cap \Omega$ оператор $q(D)$ переводит пространство J_θ в себя.*

Доказательство. Напомним, что через Z мы обозначили пространство преобразований Лапласа функций из $\mathscr{D}(\mathscr{T})$, а через J — подпространство в Z, образованное функциями, равными нулю на $\Omega \cap \Pi$. Покажем, что пространство Z плотно в $\mathscr{H}_\theta$. Заметим, что в пространстве $\mathscr{D}(\mathscr{T})$ определена операция умножения на любую функцию вида $\exp(z, \xi)$, $z \in C^s$, а также определено действие любого дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Поэтому в пространстве Z определены операции сдвига и умножения на многочлен. Пространство Z, очевидно, нетривиально, т. е. содержит функцию $e(z) \not\equiv 0$. Подходящий сдвиг e' этой функции отличен от нуля в точке θ. Пусть φ — произвольная функция из $\mathcal{H}_\theta$. Частное φ / e' аналитично в некоторой окрестности точки θ; следовательно, мы можем построить последовательность многочленов g_α, равномерно сходящуюся к φ / e' в некоторой области $U \subset C^s$, содержащей θ. В таком случае последовательность функций $g_\alpha e' \in Z$ равномерно сходится к φ в U.

Пусть теперь φ — произвольная функция из J_θ. Запишем ее в виде (19) и для каждой функции ψ_i построим последовательность функций $\psi_i^\alpha \in Z$, равномерно сходящуюся к ψ_i в некоторой области $U \subset C^s$, содержащей θ. Функции $\varphi^\alpha = \sum_1^{s-d} f_i \psi_i^\alpha$ принадлежат J, поскольку все $f_i \in J$, и сходятся равномерно к φ в U. По предположению, пара (N, q) совместна; следовательно, каждая функция $q(D)\varphi^\alpha$ обращается в нуль на $N \cap \Omega$. Согласно известному свойству равномерно сходящихся последовательностей аналитических функций, функции $q(D)\varphi^\alpha$ равномерно сходятся к $q(D)\varphi$ на любом компакте $K \subset U$. Отсюда вытекает, что функция $q(D)\varphi$ равна нулю на N в окрестности θ, т. е. $q(D)\varphi \in J_\theta$. Тем самым лемма доказана.

Введем следующее новое определение. Пусть V — открытое регулярное аналитическое многообразие в R^s произвольной размерности, а θ — некоторая точка. В окрестности θ можно ввести невырожденную систему координат (η, τ), в которой η и τ суть аналитические функции θ, таким образом, что многообразие $\eta = 0$ совпадает с V в окрестности θ. Скажем, что дифференциальный оператор q действует в V в окрестности θ, если, будучи записан в системе координат (η, τ), он не содержит дифференцирований по η в каждой точке V, принадлежащей некоторой окрестности θ. Легко убедиться в том, что это свойство оператора q и многообразия V не зависит от выбора системы координат (η, τ). Центральное место в доказательстве теоремы 2 занимает

Лемма 5. *Если пара (N, q) совместна, то оператор q действует в многообразии $N_0 \cap \Omega$ в окрестности каждой его точки.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $\theta \in N_0 \cap \Omega$ и выберем в ее окрестности систему координат (η, τ), удовлетворяющую описанным выше условиям. Записав оператор q в этой системе координат, мы получим оператор $q(\eta, \tau, D_\eta, D_\tau)$, имеющий, вообще говоря, переменные коэффициенты. Пусть q_0 главная часть этого оператора, т. е. сумма его членов наивысшего порядка m. Пусть μ — старший порядок производных по η, входящих в q_0, в точке $(0, 0)$. Предположим, что $\mu > 0$. Выполнив подходящие линейные замены переменных η и отдельно переменных τ, мы приведем оператор q к виду

$$q = a(\eta, \tau) \frac{\partial^m}{\partial \eta_1^\mu \partial \tau_1^{m-\mu}} + \ldots, \tag{20}$$

где $a(0,0) \neq 0$. Рассмотрим соответствующую граничную задачу

$$
\begin{gathered}
q(\eta, \tau, D_\eta, D_\tau) u(\eta, \tau) = 1, \\
u\Big|_{\eta_1=0} = \ldots = \frac{\partial^{\mu-1} u}{\partial \eta_1^{\mu-1}}\Big|_{\eta_1=0} = 0, \\
u\Big|_{\tau_1=0} = \ldots = \frac{\partial^{m-\mu-1} u}{\partial \tau_1^{m-\mu-1}}\Big|_{\tau_1=0} = 0.
\end{gathered} \tag{21}
$$

Заметим, что поскольку $\mu \geqslant 1$, среди краевых условий содержится условие $u|_{\eta_1=0} = 0$. Так как члены, пропущенные в (20), либо содержат дифференцирования по η_1 порядка ниже μ, либо имеют общий порядок меньше m, то к задаче (21) применима теорема 5.1.1′ из [5], согласно которой эта задача имеет решение $u \in \mathscr{H}_\theta$. В силу условия $u|_{\eta_1=0} = 0$ это решение принадлежит J_θ. В то же время из первого соотношения (21) вытекает, что $q(D)u \notin J_\theta$. Тем самым мы пришли к противоречию с леммой 4, из которого следует, что $\mu = 0$.

Итак, мы установили, что оператор q_0 не содержит дифференцирований по η в каждой точке многообразия $N_0 \cap \Omega$, т. е. действует в этом многообразии в окрестности каждой его точки. Поэтому этот оператор переводит J_θ в себя. Следовательно, разность $q - q_0$, являющаяся оператором порядка меньше m, также переводит J_θ в себя. Применяя к нему те же рассуждения, мы установим, что его главная часть также действует в $N_0 \cap \Omega$, и т. д. В итоге мы приходим к выводу, что сам оператор q действует в многообразии $N_0 \cap \Omega$ в окрестности каждой его точки.

Сейчас мы уклонимся в сторону, с тем чтобы изучить совокупность всех многообразий, в которых действует данный оператор q. Обозначим F пучок всех регулярных аналитических многообразий, проходящих через начало координат, таких, что оператор q действует в них в окрестности этого начала. Отметим следующие простые свойства пучка F.

I. Если $V \in F$, а $V' \supset V$ — регулярное аналитическое многообразие, то $V' \in F$.

II. Если $V, V' \in F$, причем размерность V' равна $s-1$, а многообразие V не касается V' в нуле, то пересечение $V \cap V'$ также принадлежит F.

III. Если $V \in F$, то для любой точки $\theta \in V$, достаточно близкой к началу координат, многообразие $V - \theta$ также принадлежит F.

Первое свойство очевидно, третье следует из того, что коэффициенты оператора q постоянны. Докажем второе свойство. Пусть $f(\theta)$ — некоторая аналитическая в окрестности нуля функция с отличным от нуля в начале координат градиентом, такая, что множество, где $f = 0$, совпадает в окрестности нуля с многообразием V'. Так как по условию вектор $\operatorname{grad} f(0)$ не нормален к V в начале координат, уравнение $f = 0$, рассматриваемое в V, определяет регулярное аналитическое подмногообразие в V, очевидно, совпадающее с $V \cap V'$. Далее, из того же свойства вектора $\operatorname{grad} f(0)$ следует, что в окрестности нуля можно выбрать систему координат (η, τ), $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_k)$ таким образом, что множество, где $\eta_1 = 0$, совпадает с V', а множество, где $\eta_2 = \ldots = \eta_k = 0$, совпадает с V. Тогда согласно условию оператор $q(\eta, \tau, D_\eta, D_\tau)$ при $\eta = 0$ не содержит дифференцирований ни по η_1, ни по $\eta_2, \ldots, \eta_k$, т. е. действует в $V \cap V'$ в окрестности нуля, что и требовалось доказать.

Пусть L — некоторое минимальное многообразие из пучка F, т. е. такое многообразие, что ни одно из подмногообразий $V \subset L$, отличных от L, не принадлежит F. Покажем, что L — линейное подпространство. Действительно, если это не так, то в любой окрестности начала координат найдется точка $\theta \in L$, в которой касательное к L пространство не совпадает с касательным к L пространством в нуле. Следовательно, многообразие $L - \theta$ можно вложить в регулярную аналитическую поверхность V размерности $s - 1$, которая не касается L в нуле. Согласно свойствам I и III эта поверхность принадлежит F. А в силу II пересечение $L \cap V$ также принадлежит F, что противоречит минимальности L. Итак, L — линейное подпространство в R^s.

Лемма 6. *Каждая поверхность $V \in F$ в окрестности начала координат имеет вид $\bigcup (L + \theta)$, где $\theta \in V$.*

Доказательство. Для каждой точки $\theta \in V$ обозначим T_θ линейное подпространство в R^s такое, что линейное многообразие $T_\theta + \theta$ является касательным к V в точке θ. Заметим, что каждое подпространство T_θ содержит L при достаточном малом $|\theta|$. Действительно, если это не так, то, применяя рассуждения, предшествующие лемме, мы придем к противоречию с предположением о минимальности L. Отсюда, в частности, следует, что подпространство T_0, касательное к V в нуле, является объединением линейных многообразий $L + \theta$, $\theta \in T_0$. Пусть $\pi : R^s \to T_0$ — операция ортогонального проектирования на T_0. Пусть $V' \subset V$ — столь малая окрестность нуля, что отображение $\pi : V' \to T_0$ бирегулярно.

Для каждого $y \in T_0$ положим $\mathscr{L}_y = V' \cap \pi^{-1}(L + y)$. При достаточно малом $|y|$ $\mathscr{L}_y$ есть регулярное подмногообразие в V'. Зафиксируем одно из таких многообразий $\mathscr{L}_y$, выберем произвольную точку $\theta \in \mathscr{L}_y$ и вектор τ, касающийся $\mathscr{L}_y$ в этой точке. Мы имеем $\pi(\theta) = y$, а $\pi(\tau) \in L + y$. Покажем, что вектор $\sigma = \theta + \pi(\tau) - y$, принадлежащий $L + \theta$, совпадает с τ. Действительно, разность $\tau - \sigma$ принадлежит ядру π, т. е. лежит в подпространстве $T_0^\perp$. С другой стороны, поскольку $\sigma \in L + \theta \subset T_\theta + \theta$, оба вектора τ и σ касаются многообразия V' в точке θ. Отсюда $\tau - \sigma \in T_\theta - \theta$, что в сочетании с включением $\tau - \sigma \in T_0^\perp$ влечет равенство $\tau = \sigma$ (в силу выбора окрестности V').

Таким образом, мы установили, что любой вектор τ, касающийся $\mathscr{L}_y$ в точке θ, принадлежит $L + \theta$. Следовательно, многообразие, касательное к $\mathscr{L}_y$ в точке θ, совпадает с $L + \theta$. Отсюда $\mathscr{L}_y = (L + \theta) \cap V'$, откуда вытекает, что многообразие V' является объединением линейных многообразий $(L + \theta) \cap V'$, $\theta \in V'$, что и требовалось доказать.

Завершение доказательства теоремы 2. В R^s выберем систему координат так, чтобы подпространства L и $L^\perp$ стали координатными и разобьем переменные θ на две группы $\theta' = (\theta_1, \ldots, \theta_d)$ и $\theta'' = (\theta_{d+1}, \ldots$ $\ldots, \theta_s)$ так, чтобы подпространство $\theta' = 0$ совпало с $L^\perp$ (и, следовательно, подпространство $\theta'' = 0$ совпало с L). Через ν_0 обозначим ортогональную проекцию множества $N_0 \cap \Omega$ на $L^\perp$, а через $\nu \subset L^\perp$ наименьшее алгебраическое многообразие, содержащее ν_0, т. е. многообразие общих корней всех многочленов от θ'', равных нулю на ν_0. Покажем, что $N = L \times \nu$.

Заметим, что множество $L \times \nu$ является алгебраическим многообразием, поскольку оно является множеством общих корней в R^s всех многочленов от θ'', обращающихся в нуль на ν. Пусть $f(\theta) \in \mathscr{P}$ — произвольный многочлен, равный нулю на $L \times \nu$. В силу свойства множества N_* он равен нулю на множестве $N \cap \Omega$ и, следовательно, обращается в нуль на N, так как по построению N есть наименьшее алгебраическое многообразие, содержащее $N \cap \Omega$. Отсюда вытекает включение $N \subset L \times \nu$.

Установим обратное включение. Пусть f — произвольный многочлен, равный нулю на N. Пусть θ_0'' — произвольная точка множества ν_0, а θ_0 — точка вида (θ', θ_0''), принадлежащая $N_0 \cap \Omega$. Из лемм 5 и 6 следует, что многообразие $N_0 \cap \Omega$ содержит многообразие $(L + \theta_0) \cap U$, где U — некоторая окрестность точки θ_0. Так как многочлен f равен нулю на N_0, он равен тождественно нулю на $(L + \theta_0) \cap U$ и, следовательно, на всем линейном многообразии $L + \theta_0$. Поэтому каждый многочлен $f_i(\theta'')$ в разложении $f(\theta) = \Sigma\theta'^i f_i(\theta'')$ равен нулю в точке θ_0''. Таким образом, все многочлены $f_i(\theta'')$ обращаются в нуль на ν_0, и, следовательно, равны нулю на ν, откуда получаем, что исходный многочлен f равен тождественно нулю на $L \times \nu$. Тем самым мы установили включение $L \times \nu \subset N$, а с ним и равенство $N = L \times \nu$.

По условию, многообразие L принадлежит пучку F; следовательно, оператор q, будучи записан в системе координат (θ', θ'') не содержит дифференцирований по θ'' в начале координат. Так как переменные θ' и θ'' выражаются через исходные координаты линейно, коэффициенты оператора $q(D_{\theta'}, D_{\theta''})$ постоянны. Поэтому он не содержит дифференцирований по θ'' ни в одной точке R^s. Тем самым доказательство теоремы 2 закончено.

Поступила в редакцию
13.5.66

ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Леман, Проверка статистических гипотез, М., Изд-во «Наука», 1964.

[2] А. М. Каган, Ю. В. Линник, Несмещенное оценивание для неполных экспонентных семейств, Trans. IV Prague Conference on Inform. Theory, Statist. Decision Functions, Random Processes, в печати.

[3] Ю. В. Линник, Статистические задачи с мешающими параметрами, М., Изд-во «Наука», 1966.

[4] Е. Б. Дынкин, Необходимые и достаточные статистики для семейства распределений вероятностей, Успехи матем. наук, **VI**, 1 (1951), 68—90.

[5] Л. Хермандер, Линейные дифференциальные уравнения с частными производными, М., Изд-во «Мир», 1965.

[6] A. M. Kagan, Yu. V. Linnik, C. R. Rao, A characterization of the normal law by an admissibility of a sample mean. Sankhya, **A27**, 2—3—4 (1965), 405—406.

[7] R. A. Wijsman, Incomplete sufficient statistics and similar tests, Ann. Math. Statist., 29, 4 (1958), 1028—1045.

[8] C. R. Rao, Linear statistical inference and its applications, N. Y., Wiley, 1965.

[9] H. Whitney, Elementary structure of real algebraic varieties, Ann. Math., **66**, 3, (1957), 545—556.

INCOMPLETE EXPONENTIAL FAMILIES AND UNBIASED MINIMUM VARIANCE ESTIMATES. I

A. M. KAGAN, V. P. PALAMODOV (LENINGRAD, MOSCOW)

(Summary)

Exponential family (9) of distributions on R^1 with polynomial relations (10) between the natural parameters $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_s$ is considered. The problem of unbiased estimation based on an independent sample of size $n \geqslant 3$ from that population is investigated.

The main result of the paper formulated as the basic theorem gives necessary and sufficient conditions for an arbitrary polynomial of sufficient statistics to be the best unbiased estimator of its expectation. This theorem solves one of the problems posed by Yu. V. Linnik in [3]. The original statistical problem is reduced (Lemma 2) to a differential-algebraic one by means of D-method due to Wijsman [7]. Some other results (Theorems 1 and 2) have an independent interest.