Г. Я. Бомаш, Множества пика для аналитических классов Гельдера, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1987, том 157, 129–136

Г.Я.Бомаш

МНОЖЕСТВА ПИКА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ КЛАССОВ ГЁЛЬДЕРА.

Класс Гёльдера Λ_α порядка α, $0<\alpha\leq 1$, состоит из функций f на окружности $\mathbb{T}$, удовлетворяющих условию

$$|f(\xi_1)-f(\xi_2)|\leq c_f|\xi_1-\xi_2|^\alpha, \qquad \xi_1,\xi_2\in\mathbb{T} .$$

Аналитический класс Гёльдера A^α равен пересечению $\Lambda_\alpha\cap C_A$, где C_A - диск-алгебра (множество функций, непрерывных в замкнутом единичном круге $clos(\mathbb{D})$ и аналитических в открытом круге $\mathbb{D}$). Замкнутое подмножество E окружности $\mathbb{T}$ называется множеством пика для алгебры A^α, если существует функция f, $f\in A^\alpha$, такая что

а) $f|E\equiv 1$;

б) $|f(z)|<1$, если $z\in clos(\mathbb{D})\setminus E$.

По теореме братьев Рисс [5] замкнутое множество E, $E\subset\mathbb{T}$, есть множество пика для диск-алгебры в том и только в том случае, когда мера Лебега $|E|$ множества E равна нулю. Множества пика играют важную роль в теории равномерных алгебр. Множества пика аналитических классов Гёльдера имеют интересные приложения к исследованию сингулярного спектра в модели Фридрихса (см.подробности в [2]). История вопроса изложена в [I] .

В настоящей заметке получены достаточные условия для того, чтобы множество E было множеством пика класса A^α. Полученные условия имеют относительно сложный вид, что связано со спецификой задачи. Основной результат заметки [6] показывает сложность построения содержательных примеров множеств пика.

Автор искренне признателен С.В.Хрущеву за постановку задачи и внимание к работе.

§ I. Формулировки результатов, обсуждение.

Для суммируемой функции u, $u\in L^1(\mathbb{T})$, символ $\tilde{u}$ обозначает преобразование Гильберта функции u. Ядро Пуассона для единичного круга $\mathbb{D}$ и верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ в работе обозначается через $P_z(t)$. Каждой точке z, $z\in\mathbb{D}\setminus\{0\}$, сопоставляется ее радиальная проекция z^* на единичную окружность $\mathbb{T}$: $z^*=\frac{z}{|z|}$. Пространство $BMO(\mathbb{T})$ состоит из функций f, $f\in L^1(\mathbb{T})$, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{|I|}\int_I\left|f(t)-\frac{1}{|I|}\int_I f(s)\,dm(s)\right|dm(t)\leq c_f$$

для любой дуги $I, I\subset\mathbb{T}$.

ТЕОРЕМА I. Пусть функция h, $h\geqslant 0$, заданная на окружности $\mathbb{T}$, удовлетворяет условию $\log h\in BMO(\mathbb{T})$. Тогда внешняя функция f, $|f|=h$, принадлежит A^α в том и только в том случае, когда $h\in\Lambda_\alpha$.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть f - аналитическая функция в круге $\mathbb{D}$ такая, что $\operatorname{Re} f\geqslant 0$ в $\mathbb{D}$. Тогда $f\in A^\alpha$ в том и только в том случае, когда $|f|\in\Lambda_\alpha$.

Требует пояснения связь теоремы I с задачей о множествах пика. Прежде всего, заметим, что каждое множество пика есть множество нулей функции $h(=\mathbb{1}-f)$ из A^α , имеющей неотрицательную вещественную часть. С другой стороны, если $h\in A^\alpha$, $\operatorname{Re} h\geqslant 0$; $h|E\equiv 0$, то $f=(1-\varepsilon h)(1+\varepsilon h)^{-1}\in A^\alpha$ для достаточно малых значений ε, $\varepsilon>0$. Ясно, что $f|E\equiv 1$ и что $|f(z)|<1$ для $z\in\operatorname{clos}(\mathbb{D})\setminus E$. Таким образом, множества пика алгебры A^α совпадают с нуль-множествами функций из A^α , имеющих неотрицательную вещественную часть. В дальнейшем мы будем иметь дело именно с таким описанием множеств пика. Рассмотрим функцию $g(z)=h(z)^{-1}$, где $h\in A^\alpha$, $h|E\equiv 0$, $\operatorname{Re} h\geqslant 0$. Ясно, что $\operatorname{Re} g(z)\geqslant 0$ для $z\in\mathbb{D}$. Хорошо известно, что множество функций с неотрицательной вещественной частью в круге $\mathbb{D}$ совпадает с множеством интегралов Шварца

$$(\mathcal{H}\mu)(z)=\int_{\mathbb{T}}\frac{t+z}{t-z}\,d\mu(t)$$

неотрицательных мер μ на $\mathbb{T}$. Если $\mu\geqslant 0$, то $\mathcal{H}\mu$ - внешняя функция (см., например, [7] , стр.259). Ее граничные значения существуют почти всюду на $\mathbb{T}$ и вычисляются по формуле

$$(\mathcal{H}\mu)(e^{it})=\frac{d\mu}{dt}(e^{it})+i\tilde{\mu}(e^{it}),$$

где преобразование Гильберта меры μ

$$\tilde{\mu}(e^{it})=-\frac{1}{\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu(e^{is})}{2\operatorname{tg}\frac{s-t}{2}}$$

существует почти всюду на окружности $\mathbb{T}$ в смысле главного значения.

Сказанное приводит нас к следующему критерию.

СЛЕДСТВИЕ 2. Замкнутое подмножество E окружности есть множество пика алгебры A^α в том и только в том случае, когда найдется неотрицательная борелевская мера μ на $\mathbb{T}$ такая, что функция $\left|\frac{d\mu}{dt}(e^{it})+i\tilde{\mu}(e^{it})\right|^{-1}$, определенная почти всюду на $\mathbb{T}$, совпадает почти всюду с функцией класса Λ_α, равной нулю на E.

Доказательство теоремы I опирается на результат Н.А.Широкова [3], содержащий описание модулей граничных значений функций класса A^α.

Достаточное условие принадлежности замкнутого множества E семейству множеств пика дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $E=\operatorname{clos}E\subset\mathbb{T}$ и пусть существуют неотрицательная суммируемая функция u, $u\in L^1(\mathbb{T})$, и положительные постоянные c_1 и c_2 такие, что

1. $u^{-1}\in\Lambda_\alpha$ (I.I)
2. $u^{-1}|E=0$ (I.2)
3. $\int\limits_{\mathbb{T}} u(t)P_z(t)\,dm(t)\le c_1|u(z^*)+i\tilde{u}(z^*)|$ (I.3)

для всех точек z в $\mathbb{D}$, удовлетворяющих неравенству $1-|z|\le c_2|u(z^*)+i\tilde{u}(z^*)|^{-1/\alpha}$. Тогда E — множество пика алгебры A^α.

Если множество E удовлетворяет условиям теоремы 2, то функция $\rho_E^{-\alpha}$ суммируема ($\rho_E(t)\overset{def}{=}\inf\limits_{\xi\in E}|t-\xi|$). В [6] построены множества пика E такие, что $\rho_E^{-\alpha}\notin L^1(\mathbb{T})$. Таким образом, теорема 2 дает лишь достаточные условия для того, чтобы множество было множеством пика. С другой стороны, семейство множеств пика, удовлетворяющих условиям теоремы, достаточно обширно. Оно содержит, например, семейство множеств неединственности классов Жевре G_α (см. [4], [I]). Чтобы увидеть это, достаточно усилить условие (I.3), заменив его более сильным требованием

$$\int\limits_{\mathbb{T}} u(t)\,P_z(t)\,dm(t)\le c_1 u(z^*)\,, \tag{I.4}$$

которое должно выполняться в точках z, удовлетворяющих условию $1-|z|\le c_2\,u(z^*)^{-1/\alpha}$. Простые оценки ядра Пуассона показывают, что из (I.4), (I.I) и (I.2) вытекает принадлежность множества E семейству множеств неединственности для класса G_α (см. [4]).

§ 2. Доказательства.

Сформулируем теорему Широкова в интересующем нас случае классов Гёльдера.

ТЕОРЕМА. Пусть h - неотрицательная функция на $\mathbb{T}$, $d(z)=1-|z|$, $I(z)=\mathbb{T}\cap\{\xi:|\xi-z^*|\le 2d(z)\}$, $M_h(z)=\sup\limits_{\xi\in I(z)} h(\xi)$. Функция h является модулем граничных значений функции класса A^α в том и только в том случае, когда

$$h\in\Lambda_\alpha \tag{2.I}$$

$$I(h,z)\overset{def}{=}\int\limits_{\mathbb{T}}\left|\log\frac{M_h(z)}{h(t)}\right| P_z(t)\,dm(t)\le C_h \tag{2.2}$$

для любой точки z такой, что $d^\alpha(z)\le M_h(z)$.

Заметим, что если (2.2) выполнено для точек множества $G(c)=\{z\in\mathbb{D}: c\,d^\alpha(z)\le M_h(z)\}$, то (2.2) выполняется (быть может с другой константой) для $z\in G(c')$, где $0<c'<c$. Действительно, пусть $0<c'<c$ и $z\in G(c')\setminus G(c)$. Тогда $c'd^\alpha(z)\le M_h(z)\le c\,d^\alpha(z)$. Выберем точку z' так, чтобы $I(z')\subset I(z)$ и $M_h(z')=M_h(z)=c\cdot d^\alpha(z')$. Мы видим, что $|I(z')|\asymp|I(z)|$ и $I(z')\subset I(z)$. Отсюда следует, что $P_{z'}\asymp P_z$. Но $z'\in G(c)$ и потому $I(h,z')\le C_h$. Заменяя в этом неравенстве ядро $P_{z'}$ на эквивалентное ядро P_z, получим, что $\sup\limits_{z\in G(c')} I(h,z)<\infty$.

ЛЕММА I. Пусть $h\ge 0$, $h\in\Lambda_\alpha$, $\xi\in\mathbb{T}$. Тогда для любой дуги I, $\xi\in I$, $2\|h\|_{\Lambda_\alpha}|I|^\alpha\le h(\xi)$, имеем

$$\frac{1}{2}h(\xi)\le h(z)\le\frac{3}{2}h(\xi) \qquad \text{для всех } z,\ z\in I \tag{2.3}$$

$$\left|\frac{1}{|I|}\int\limits_I \log h\,dm-\log h(\xi)\right|\le\log 2. \tag{2.4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения класса Λ_α имеем

$$h(\xi)-\|h\|_{\Lambda_\alpha}|I|^\alpha \leqslant h(z) \leqslant h(\xi)+\|h\|_{\Lambda_\alpha}|I|^\alpha, \quad z\in I .$$

Отсюда сразу следует (2.3), а затем и (2.4).

ЛЕММА 2. Пусть $h \geqslant 0$ на $\mathbb{T}$. Тогда $h=|f|$ на $\mathbb{T}$ для $f\in A^\alpha$ в том и только в том случае, когда $h\in\Lambda_\alpha$ и существуют постоянные $c_1>0$ и $c_2>0$ такие что

$$\int_{\mathbb{T}} \left| \log \frac{h(z^*)}{h(t)} \right| P_z(t)\, dm(t) \leqslant c_1 \tag{2.5}$$

для всех точек $z\in\mathbb{D}$, удовлетворяющих неравенству $c_2\cdot d^\alpha(z) \leqslant h(z^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h=|f|/\mathbb{T}$, $f\in A^\alpha$ и пусть $c_2\cdot d^\alpha(z)\leqslant h(z^*)$. Если постоянная c_2 достаточно велика, то к интервалу $I(z)$ применима Лемма I, которая показывает, что $M_h(z)\asymp h(z^*)$. Ясно, что $c_2\cdot d^\alpha(z)\leqslant M_h(z)$. По теореме Широкова $I(h,z)\leqslant c_h$. Заменяя в послежнем неравенстве $M_h(z)$ на $h(z^*)$, получаем (2.5).

Пусть теперь выполнено (2.5). По условию $h\in\Lambda_\alpha$. Поэтому если число c_2 в неравенстве $c_2\cdot d^\alpha(z)\leqslant h(z^*)$ достаточно велико, то $h(z^*)\asymp M_h(z)$, что вместе с (2.5) влечет выполнение (2.2) для $z\in G(c_2)$. По теореме Широкова $h=|f|/\mathbb{T}$ для некоторой функции f, $f\in A^\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Пусть $h\in\Lambda_\alpha$ и $\log h \in BMO$. Проверим, что выполнено (2.5). Тогда по лемме 2 доказательство будет закончено. Предположим, что $c\cdot d^\alpha(z)\leqslant h(z^*)$, где число c столь велико, что к интервалу $I(z)$ применима Лемма I, в силу которой

$$\left| \frac{1}{|I(z)|}\int_{I(z)} \log h\, dm - \log h(z^*) \right| \leqslant \log 2 .$$

Отсюда

$$\int_{\mathbb{T}} \left| \log\frac{h(z^*)}{h(t)} \right| P_z(t)\, dm \leqslant \left| \frac{1}{|I(z)|}\int_{I(z)} \log h\, dm - \log h(z^*) \right| +$$

$$+\int_{\mathbb{T}} \left| \log h - \frac{1}{|I(z)|}\int_{I(z)} \log h \right| P_z(t)\, dm \leqslant \log 2 + \int_{\mathbb{T}} \left| \log h - \frac{1}{I}\int_I \log h \right| P_z(t)\, dm(t).$$

Заметим, что $|I(z)| \asymp 1-|z|$. Стандартные рассуждения (см. [8], стр.226) доказывают ограниченность последнего интеграла, если $\log h \in BMO$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ I: условие $\operatorname{Re} f \geqslant 0$ означает, что $\|\arg f\|_\infty \leqslant \frac{\pi}{2}$. Функция $\log|f| = -(\widetilde{\arg f})$ лежит в BMO как сопряженная к ограниченной функции (см. [8], стр.228). Таким образом, функция $\log|f|$ удовлетворяет условиям теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Достаточно показать, что $h = g^{-1} \in \Lambda_\alpha$. Мы проведем доказательство на прямой $\mathbb{R}$, а не на окружности $\mathbb{T}$, для упрощения записи. Рассмотрим две точки $x, y \in \mathbb{R}$ и интервал $I = (x, y)$. Возможны два случая:

1. $|I| \geqslant \varepsilon \max\{|h(x)|^{1/\alpha}, |h(y)|^{1/\alpha}\}$. В этом случае $|h(x)-h(y)| \leqslant 2\varepsilon^{-1/\alpha}|I|^\alpha$

2. $|I| \leqslant \varepsilon \max\{|h(x)|^{1/\alpha}, |h(y)|^{1/\alpha}\}$. Пусть для определенности максимум равен $|h(x)|^{1/\alpha} \stackrel{def}{=} y_0$. Положим $I_0 = (x-y_0, x+y_0)$. Интервал I_0 содержит интервал I, растянутый в $(1/\varepsilon)$ раз относительно точки x. Поскольку $|h(x)-h(y)| = |g(x)-g(y)||g(x)g(y)|^{-1} \leqslant |g(x)-g(y)||g(x)|^{-2}$, то достаточно показать, что на интервале I норма функции g в пространстве $\Lambda_\alpha(I)$ оценивается величиной $|g(x)|^2$.

Из формулы $|u(s)-u(t)| = |u(s)^{-1}-u(t)^{-1}|\,u(s)u(t)$,

условия $u^{-1} \in \Lambda_\alpha$ и соотношения (2.3) видно, что норма функции u в $\Lambda_\alpha(I_0)$ не превосходит $c \cdot |g(x)|^2$. Для того, чтобы оценить норму функции $\tilde{u}$ рассмотрим разбиение функции u на сумму двух функций: $u_1 = u \cdot \chi_{I_0}$, $u_2 = u - u_1$, где χ_{I_0} - характеристическая функция интервала I_0. Преобразование Гильберта функции u_1 имеет норму в пространстве $\Lambda_\alpha(I)$ не более $\mathrm{const} \cdot |g(x)|^2$ (см. [8], стр.110, мы используем тот факт, что интервал I_0 в фиксированное число раз шире интервала I). Преобразование Гильберта функции u_2 дифференцируемо, ее производная равна

$$(\tilde{u}_2)'(s) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R} \setminus I_0} \frac{u(t)}{(t-s)^2}\, dt .$$

Условие (1.3) обеспечивает оценку этой производной $|(\tilde{u}_2)'(s)| \leqslant c \cdot |g(x)|^{1+1/\alpha}$ для всех $s, s \in I$ (здесь мы снова использовали факт, что интервал I отстоит от множества $\mathbb{R} \setminus I_0$ на расстояние порядка $|I|$. Из оценки производной следует, что $\|\tilde{u}_z\|_{\Lambda_\alpha(I)} \leq c \cdot \max_{s\in I} |\tilde{u}_z'(s)| \cdot |I|^{1-\alpha} \leq const \cdot |g(x)|^2$. Теорема доказана.

В заключение приведем пример, показывающий, что от условия (I.3) теоремы 2 отказаться нельзя. Рассмотрим стандартное канторовское множество E, $|E| = 0$, пусть дополнительные интервалы ранга n (таких интервалов равно 2^n штук) имеют длину $\ell_n = (2^n n^{1+\varepsilon})^{-1/1-\alpha}$. Построение такого множества и его свойства можно найти в [4], стр. 275. Положим $u(t) = \rho^{-\alpha}(t)$, где $\rho(t)$ - расстояние от точки $t \in \mathbb{T}$ до E. Функция u удовлетворяет (I.I), (I.2) и условию $u \in L^1(\mathbb{T})$:

$$\int_{\mathbb{T}} u(t)\, dm(t) \leq c \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \ell_n^{1-\alpha} \leq c \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\varepsilon} < \infty .$$

Положим $g(t) = u(t) + i\tilde{u}(t)$, $f(t) = g(t)^{-1}$. Предположим, что $f \in A^\alpha$. По лемме I $|f(z)| \asymp |f(z^*)|$ для точек z: $d(z) = (\varepsilon \cdot |f(z^*)|)^{1/\alpha}$. Следовательно, при таких z имеет место цепочка неравенств:

$$\int_{\mathbb{T}} P_z(t) u(t)\, dm(t) = \operatorname{Re} g(z) \leq |g(z)| \leq c |g(z^*)| . \tag{2.5}$$

Несложно показать, что

$$\int_{\mathbb{T}} P_z(t) u(t)\, dm(t) \geq c \cdot d(z) \int_{|t-z^*| \geq \rho(z^*)} u(t) |t - z^*|^{-2} dm(t) \geq$$

$$\geq c \cdot d(z) \cdot \rho(z^*)^{-2} \int_{\rho(z^*) \leq |t-z^*| \leq 2\rho(z^*)} u(t)\, dm(t) \geq c_1 \cdot d(z) \cdot \rho(z^*)^{-1-\alpha} \log \frac{1}{\rho(z^*)} ,$$

где постоянная c_1 зависит от множества, но не от точки. Таким образом, предположение $f \in A^\alpha$ влечет выполнение неравенств

$$\rho(z^*)^{-1-\alpha} \log \frac{1}{\rho(z^*)} \leq c \cdot |g(z^*)|^{1+1/\alpha} \tag{2.6}$$

для всех точек z^*, $z^* \in \mathbb{T} \setminus E$. Если мы рассмотрим точку z^*, $z^* \in \mathbb{T} \setminus E$, $\operatorname{Im} g(z^*) = 0$ (любой дополнительный к E интервал содержит такую точку), то в ней выполнено неравенство

$$\rho(z^*)^{-1-\alpha} \log \frac{1}{\rho(z^*)} \leq c \rho(z^*)^{-1-\alpha} ,$$

которое приводит к противоречию при выборе достаточно малого дополнительного интервала. Значит $f \notin A^{\alpha}$.

Литература

1. D y n ' k i n E.M. Peak sets for Lipschitz classes. - Lecture Notes in Math., 1984, v.1043, p.544-546.
2. F a d d e e v L.D., P a v l o v B.S. Zero sets of operator functions with a positive imaginary part. - Lecture Notes in Math., 1984, vol.1043, p.124-128.
3. Ш и р о к о в Н.А. Модуль аналитических функций, гладких вплоть до границы. - Препринт ЛОМИ, Р-7-82, Л., 1982.
4. H r u š č e v S.V. Sets of uniqueness for the Gevrey classes. - Ark.för math., 1977, v.15, N 2, p.235-304.
5. R i e s z F., R i e s z M. Uber Randwerte einer analytischen Funktion. - Quatriéme Congrés des Math.Scand., Stockholm, 1916, p.27-44.
6. Ё р и к к е Б. О множествах пика для гёльдеровских классов (опровержение гипотезы Е.М.Дынькина). - Наст.сборник, с.45-54.
7. H r u š č e v S.V., N i k o l ' s k i i N.K., P a v l o v B.S. Unconditional bases of exponentials and of reproducing kernels. - Lecture Notes in Math., 1981, v.864, p.214-335.
8. Г а р н е т т Дж. Ограниченные аналитические функции. М., 1984.

G.Ya.Bomash. Peak sets for analytic Hölder classes.

Summary

A closed subset E of the unit circle $\mathbb{T}$ is called a peak set for the analytic Hölder class A^{α}, $0<\alpha<1$, if there exists a function f in A^{α} such that $f|E\equiv 1$ and $|f(z)|<1$ for $z\in \operatorname{clos}\mathbb{D}\setminus E$. It is proved that E is a peak set for A^{α} if and only if there exists a nonnegative Borel measure μ on $\mathbb{T}$ such that $\left|\frac{d\mu}{dt}(e^{it})+i\tilde{\mu}(e^{it})\right|^{-1}$ coincides almost everywhere on $\mathbb{T}$ with a function in Λ_{α} vanishing on E. A sufficient condition for a set to be a pick set is also obtained.