Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. Д. Андрианов, В. П. Максимов, П. М. Симонов, Краевые задачи для разностных моделей, *Матем. моделирование и краев. задачи*, 2008, часть 3, 20–23

https://www.mathnet.ru/mmkz1099

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.169
11 декабря 2025 г., 12:46:34

где $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$, $\Gamma(\alpha k + \mu) = \prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma(\alpha_i k + \mu_i)$.

1. *Бейтмен, Г.* Высшие трансцендентные функции [Текст] / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М: Наука, 1973. — Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — 296 с.
2. *Самко, С. Г.* Интегралы и производные дробного порядка и их приложения [Текст] / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. Н. Маричев. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
3. *Колмогоров, А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М: Наука, 1968. — 496 с.
4. *Смирнов, В. И.* Курс высшей математики [Текст] / В. И. Смирнов. — М.: ОГИЗ, 1947. — Т. 5. — 584 с.

Самарский государственный технический университет, г. Самара

andre@ssu.samara.ru

УДК 517.929

А. Д. Андрианов, В. П. Максимов, П. М. Симонов

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Аппроксимация функционально-дифференциальных уравнений как средство эффективной реализации вычислительных процедур, а также моделирование процессов с дискретным временем приводят к необходимости рассмотрения разностных аналогов краевых задач.

В линейном случае разностным уравнением является уравнение

$$x(t+1) = \sum_{i=0}^{t} A(t+1, i)x(i) + f(t+1), \quad t = 0, 1, \ldots, N-1, \quad (1)$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ для любого $t = 0, 1, \ldots, N$.

Обозначим через $x = \{x(0), x(1), \ldots, x(N)\}$ матрицу размером $n \times (N+1)$ со столбцами $x(0), x(1), \ldots, x(N)$. Множество таких матриц обозначим символом M^n_{N+1}.

Уравнение (1) может быть записано в виде $\mathcal{L}x = f$, где $x \in M^n_{N+1}$, $f \in M^n_N$, $\mathcal{L}$ — линейный оператор, действующий из M^n_{N+1} в M^n_N:

$$(\mathcal{L}x)(t) = x(t) - \sum_{i=0}^{t-1} A(t, i)x(i).$$

Линейной краевой задачей для разностного уравнения (1) будем называть задачу

$$\mathcal{L}x = f, \qquad lx = \alpha, \tag{2}$$

где $f \in M_N^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $l : M_{N+1}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный вектор-функционал.

Для линейных краевых задач (2) получены критерии и признаки разрешимости, допускающие эффективную проверку с использованием вычислительных средств. На основе представления задачи (2) с помощью разностной матрицы Грина получены признаки разрешимости квазилинейных краевых задач для уравнения $\mathcal{L}x = Fx$, где $F : M_{N+1}^n \to M_N^n$ — вообще говоря, нелинейный оператор.

Квазилинейной краевой задачей называется система

$$\mathcal{L}x = Fx, \qquad lx = \psi x \tag{3}$$

с нелинейным, вообще говоря, вектор-функционалом $\psi{:}M_{N+1}^n{\to}\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Пусть:*

а) *оператор* $F : M_{N+1}^n \to M_N^n$ *непрерывен, вектор-функционал* $\psi : M_{N+1}^n \to \mathbb{R}^n$ *непрерывен;*

б) *для всех решений семейства задач*

$$\mathcal{L}x = \lambda Fx, \quad lx = \lambda\psi x, \quad \lambda \in [0,\, 1],$$

имеет место общая априорная оценка

$$\|x_\lambda\|_{M_{N+1}^n} \leqslant d < \infty.$$

Тогда исходная краевая задача имеет по крайней мере одно решение $x \in M_{N+1}^n$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* а) *теоремы* 1. *Пусть, далее,* $\det[lx] \neq 0$, *где* X — *фундаментальная матрица уравнения* $\mathcal{L}x = 0$, *а нелинейные операторы* F *и* ψ *удовлетворяют условиям*

$$\lim_{\|x\|_{M_{N+1}^n}\to+\infty} \frac{\|Fx\|_{M_N^n}}{\|x\|_{M_{N+1}^n}} = 0, \qquad \lim_{\|x\|_{M_{N+1}^n}\to+\infty} \frac{|\psi x|_{M_N^n}}{\|x\|_{M_{N+1}^n}} = 0.$$

Тогда задача (3) *имеет по крайней мере одно решение* $x \in M_{N+1}^n$.

В нелинейных краевых задачах динамика переменных описывается уравнением

$$x(t+1) = (Fx)(t), \quad t = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{4}$$

и краевыми условиями

$$\eta x = 0. \tag{5}$$

Здесь $F : M_{N+1}^n \to M_N^n$ и $\eta : M_N^n \to \mathbb{R}^n$ — нелинейные непрерывные операторы. Для исследования таких краевых задач используются схемы с построением и использованием априорных неравенств вида

$$\|x(t)\| \leqslant \mathcal{M}(t, \|x(0)\|). \tag{6}$$

Обозначим через $\varphi(t, \alpha)$ решение задачи Коши

$$x(t+1) = (Fx)(t), \quad t = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1; \quad x(0) = \alpha.$$

Тогда разрешимость краевой задачи (4), (5) эквивалентна разрешимости уравнения

$$\eta(\varphi(\cdot\,, \alpha)) = 0$$

относительно $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Разрешимость этого уравнения можно установить, используя неравенство (6).

Теорема 3. *Пусть*

$$\|x(0) - \eta x\| \leqslant \mu(\|x(\cdot+1)\|, \|x(0)\|), \quad \forall x \in M_{N+1}^n,$$

$$\|\varphi(t, \alpha)\| \leqslant \mathcal{M}(t, \|\alpha\|), \quad \forall t = 0, 1, \ldots, N, \quad \alpha \in \mathbb{R}^n,$$

причем функция $\mu : M_N^1 \times [0, \infty) \to R^1$ *не убывает по каждому аргументу, а функция* $\mathcal{M} : \{0,\ 1,\ \ldots,\ N\} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ *не убывает по второму аргументу.*

Тогда задача (4), (5) *имеет решение, если ограничено множество*

$$\{\delta \geqslant 0 : \delta \leqslant \mu(\mathcal{M}(\cdot+1, \delta), \delta)\}.$$

1. *Андрианов, Д. Л.* Краевые задачи и задачи управления для линейных разностных систем с последействием [Текст] / Д. Л. Андрианов // Известия вузов. Математика. — 1993. — № 5. — С. 3–16.
2. *Андрианов, Д. Л.* Целевое управление и краевые задачи для макроэкономических моделей с последействием [Текст] / Д. Л. Андрианов, В. П. Максимов // Вестник Пермского университета. Экономика — 1995. — Вып. 2. — С. 102–123.

3. *Andrianov, D. L.* Difference equations and the elaboration of computer systems for monitoring and forecasting socio-economic development of the country and territories [Text] / D. L. Andrianov // Proc. of Conf. on Differential and Difference Equations and Applications. — New York: Hindawi Publishing Corporation, 2006. — P. 1231–1237.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №06–01–00744-а), Администрации Пермского края (проект №07–01–96060-р-урал-а) и ЗАО «ПРОГНОЗ»

Пермский государственный университет, г. Пермь

simonov@econ.psu.ru

УДК 517.946

Ж. А. Балкизов

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В данной работе доказывается однозначная разрешимость краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в неограниченной области. Единственность решения доказывается методом от противного, а существование методом разделения переменных (методом Фурье).

В области $D = \{(x,\, y) : 0 < x < \infty,\, 0 < y < b\}$ рассматривается уравнение

$$u_{xxx} - u_{yy} + \mu\, u = 0, \tag{1}$$

которое при $\mu = 0$ рассматривалось во многих работах. Среди последних работ в данном направлении отметим работу [1], где доказана однозначная разрешимость первой краевой задачи для уравнения (1) при $\mu = 0$ в неограниченных областях.

Для уравнения (1) рассмотрим следующую задачу.

Задача А. Требуется найти регулярное в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u_y(x,\, 0) = u(x,\, b) = 0, \quad 0 < x < \infty, \tag{2}$$

$$u(0,\, y) = \varphi(y), \qquad 0 < y < b, \tag{3}$$