S. V. Kislyakov, Quan Hua Xu, Real interpolation and singular integrals,
Algebra i Analiz, 1996, Volume 8, Issue 4, 75–109

Алгебра и анализ
Том 8 (1996), вып. 4

ВЕЩЕСТВЕННАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

© С. В. Кисляков, Куанхуа Шу

Пусть Q — сингулярный интегральный оператор типа Кальдерона–Зигмунда такой, что $Q^2 = Q$. Положим $\mathcal{H}_1^Q = \{f \in L^1 : Qf = f\}$, $\mathcal{H}_\infty^Q = \{f \in L^\infty : f \perp \mathcal{H}_1^{I-Q^*}\}$. Доказано, что пара $(\mathcal{H}_1^Q, \mathcal{H}_\infty^Q)$ K-замкнута в (L^1, L^∞). Установлена абстрактная теорема о K-замкнутости типа теоремы Вольфа. Показано, что пара $(H^p(\mathbb{T}^2), H^\infty(\mathbb{T}^2))$ K-замкнута в $(L^p(\mathbb{T}^2), L^\infty(\mathbb{T}^2))$ при $0 < p < \infty$. Обсуждаются некоторые ситуации, когда K-замкнутость или близкие условия решают все интерполяционные задачи.

§0. Введение

Пусть (X_0, X_1) — совместимая пара (квази)банаховых пространств, и пусть Y_0, Y_1 — замкнутые подпространства соответственно в X_0 и X_1. Как вычислить пространство $(Y_0, Y_1)_{\theta,p}$ (результат применения метода вещественной интерполяции), если известно пространство $(X_0, X_1)_{\theta,p}$? Более конкретный вопрос: когда верна формула

$$(Y_0, Y_1)_{\theta,p} = (X_0, X_1)_{\theta,p} \cap (Y_0 + Y_1)? \tag{1}$$

Среди случаев, когда это так, видимо, наиболее изучен случай $X_0 = L^1(\mathbb{T})$, $X_1 = L^\infty(\mathbb{T})$, $Y_0 = H^1$, $Y_1 = H^\infty$ ($\mathbb{T}$ — единичная окружность на комплексной плоскости). В многочисленных публикациях, посвященных интерполяции пространств H^p (см., например, [J, P, KX, K, X2, B]), читатель найдет различные подходы к этому результату. Большинство из них ведут в действительности к некоторому более сильному свойству пары (H^1, H^∞), названному в [P] K-замкнутостью. Это свойство может быть определено в терминах, не относящихся непосредственно к теории интерполяции.

Ключевые слова: вещественная интерполяция, K-замкнутость, разложение Кальдерона–Зигмунда, частичный ретракт.

Определение. Пара (Y_0, Y_1) (как выше) называется K-замкнутой в (X_0, X_1), если всякий раз, когда элемент $y \in Y_0 + Y_1$ представлен в виде $y = x_0 + x_1$, $x_i \in X_i$ $(i = 0, 1)$, существует и другое представление $y = y_0 + y_1$, где $y_i \in Y_i$ и $\|y_i\|_{X_i} \leqslant C\|x_i\|_{X_i}$ $(i = 0, 1;\ C$ — константа, не зависящая от участвующих векторов).

Напомним, что интерполяционные пространства вещественного метода $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ определяются в терминах так называемого K-функционала

$$K(x, t, X_0, X_1) = \inf\{\|x_0\|_0 + t\|x_1\|_1 : x_i \in X_i,\ x_0 + x_1 = x\}$$
$$(x \in X_0 + X_1,\ t > 0).$$

Очевидно, что K-замкнутость пары (Y_0, Y_1) означает, что на $Y_0 + Y_1$ K-функционалы, порожденные парами (X_0, X_1) и (Y_0, Y_1), эквивалентны равномерно по t. Поэтому из K-замкнутости вытекает формула (1).

Большинство известных подходов к интерполяции H^p-пространств можно применить в более общих ситуациях. Здесь мы обсудим метод Бургейна [B], целиком основанный на том, что проектор Рисса $\mathbb{P}f = \sum_{n\geqslant 0} \hat{f}(n)z^n$ (т.е. ортогональный проектор пространства L^2 на H^2) является сингулярным интегральным оператором типа Кальдерона–Зигмунда. Точнее, Бургейн рассматривал произвольный оператор Кальдерона–Зигмунда Q, действующий на функции на некотором пространстве (S, μ) однородного типа (предполагалось, что $\mu(S) < +\infty$; точные определения и ссылки будут даны ниже). Если на $L^2(\mu)$ оператор Q — проектор (не обязательно ортогональный), то можно определить шкалу пространств

$$\mathcal{H}_p = \{f \in L^p(\mu) : Qf = f \text{ п.в.}\}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty$$

(так как $L^\infty(\mu) \subset L^2(\mu)$, то для $f \in L^\infty(\mu)$ мы можем считать Qf функцией из $L^2(\mu)$, а не элементом пространства BMO). В [B] показано, что при $1 < p < \infty$ пара $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_p)$ K-замкнута в $(L^1(\mu)\ L^p(\mu))$, а пара $(\mathcal{H}_p, \mathcal{H}_\infty)$ — в $(L^p(\mu), L^\infty(\mu))$. Применив результат Вольфа [W] (см. формулировку в §2), Бургейн вывел отсюда формулу (1) для пары $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_\infty)$:

$$(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_\infty)_{\theta,p} = \{f \in L^{s,p}(\mu) : Qf = f\} \quad (s^{-1} = 1 - \theta,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty). \tag{2}$$

Однако все это оставляет в стороне следующий естественный вопрос, оставшийся в [B] без ответа (см. [B, замечание (ii), с. 173]):

Верно ли, что пара $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_\infty)$ *K-замкнута в* $(L^1(\mu), L^\infty(\mu))$?

Мы дадим положительный ответ на этот вопрос.

Здесь возможны два противоположных подхода. С одной стороны, задачу можно трактовать как вопрос о сингулярных интегралах, а не об интерполяции; тогда естественно искать решение в рамках классического анализа. С другой стороны, можно попытаться на основе уже сделанного Бургейном решить задачу с помощью чисто абстрактных рассмотрений. Например, можно искать для K-замкнутости результат типа теоремы Вольфа — он, разумеется, возместил бы „недостающее звено“. Мы увидим, что могут быть реализованы оба плана.

В §1, после необходимых предварительных сведений, мы описываем прямой подход к сформулированной задаче, основанный на соединении метода Бургейна с двойственностью. При этом подходе не нужна ни теория интерполяции, ни прямые ссылки на *результаты* из [B]. По нашему мнению, метод, изложенный в §1, интересен и сам по себе. В §2 для K-замкнутости доказывается утверждение типа теоремы Вольфа (мы действуем в наиболее общей постановке). Отсюда снова (и независимым образом) получается K-замкнутость пары $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_\infty)$. В том же параграфе приводится еще одно доказательство K-замкнутости — очень короткое, если не брать в расчет „скрытые части“, — а также комментарии по поводу оригинального рассуждения Бургейна. В частности, мы показываем, что это последнее применимо в некоторых новых ситуациях, например к пространству U_A^∞ рядов Тейлора с равномерно ограниченными в круге частичными суммами. В §3 доказано, что пара $(H^p(\mathbb{T}^2), H^\infty(\mathbb{T}^2))$ K-замкнута в $(L^p(\mathbb{T}^2), L^\infty(\mathbb{T}^2))$ при $0 < p < \infty$ ($\mathbb{T}^2$ — двумерный тор). Здесь большую роль играет теорема о K-замкнутости типа вольфовской из §2. Как и в случае пары $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_\infty)$, *интерполяционная* формула $(H^1(\mathbb{T}^2), H^\infty(\mathbb{T}^2))_{\theta,p} = H^{s,p}(\mathbb{T}^2)$, $s^{-1} = 1 - \theta$, не нова (см. [K]). К сожалению, при $n \geqslant 3$ до сих пор не известно ничего о паре $(H^p(\mathbb{T}^n), H^\infty(\mathbb{T}^n))$ $(p < \infty)$. Подчеркнем, что ортогональный проектор $\mathbb{P}_n : L^2(\mathbb{T}^n) \to H^2(\mathbb{T}^n)$ *не является* оператором Кальдерона-Зигмунда при $n \geqslant 2$. Наконец, в §4 мы обсуждаем некоторые ситуации, когда из K-замкнутости следует аналог формулы (1) для *произвольных* интерполяционных функторов, а также приводим некоторые упрощающие замечания о статьях [KX] и [X2-3].

Мы отсылаем читателя к книгам [BL] и [BK] по поводу понятий и результатов из теории интерполяции, используемых в настоящей работе. Символами C, C' и т. д. обозначаются различные постоянные, не зависящие от рассматриваемых в данный момент объектов.

§1. Прямой подход

1.1. Пространства однородного типа и сингулярные интегралы. Под *пространством однородного типа* (S, μ) мы понимаем (квази)метрическое пространство S с борелевской мерой μ, удовлетворяющей следующему условию: $0 < \mu(B(x,2r)) \leqslant C\mu(B(x,r)) < \infty$, $x \in S$, $r > 0$ (как обычно, $B(x,r)$ — это шар радиуса r с центром в точке x). Мы предполагаем также, что функции с ограниченным носителем плотны в $L^1(\mu)$, и что мера μ бесконечна тогда и только тогда, когда квазиметрика пространства S неограничена.

Пусть (S,μ) — пространство однородного типа с квазиметрикой ρ. Линейный непрерывный оператор $T : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ называется *сингулярным интегральным оператором типа Кальдерона–Зигмунда*, если существует измеримая функция K (*ядро* оператора T), определенная на $S \times S$ всюду, кроме диагонали, и такая, что

(а) если $f \in L^2(\mu)$ и $\operatorname{supp} f \subset B(x_0, r)$, то для $x \notin B(x_0, C_1 r)$ имеем

$$(Tf)(x) = \int f(y)K(x,y)d\mu(y);$$

(постоянная $C_1 > 1$ не зависит от f);

(б) $\lim\limits_{r\to\infty} \sup_{\rho(x,y)\geqslant r} |K(x,y)| = 0$ (это условие содержательно лишь в случае $\mu(S) = \infty$);

(в) если $y, y_0 \in S$, то

$$\int\limits_{\rho(x,y_0)>C_2\rho(y,y_0)} |K(x,y) - K(x,y_0)|d\mu(x) \leqslant C_3,$$

и аналогичное условие выполняется с заменой подынтегральной функции на $|K(y,x) - K(y_0,x)|$ (иными словами, требуется условие Хёрмандера по каждой из переменных).

См., например, [CW1, CW2, ST] по поводу пространств однородного типа и основных свойств операторов Кальдерона–Зигмунда в такой ситуации. Напомним только, что такой оператор T действует естественным образом из $L^p(\mu)$ в $L^p(\mu)$ $(1 < p < \infty)$, из $L^1(\mu)$ в $L^{1,\infty}(\mu)$ и из $L^\infty(\mu)$ в BMO.

1.2. Разложение Кальдерона–Зигмунда. Эта хорошо известная процедура будет играть весьма важную роль в дальнейшем. Мы опишем не ее саму, а результат, упомянув некоторые простые свойства, часто не формулируемые явно.

Пусть T — фиксированный оператор Кальдерона–Зигмунда. Тогда для всякого $\lambda > 0$ и всякой ненулевой функции $g \in L^1(S,\mu)$ существуют множество $\Omega_\lambda \subset S$ и разложение $g = g_0^\lambda + g_1^\lambda$, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) $|g_0^\lambda| \leqslant C\lambda$, $\|g_0^\lambda\|_1 \leqslant C\|g\|_1$, $\|g_1^\lambda\|_1 \leqslant C\int_{\Omega_\lambda} |g|d\mu \leqslant C\|g\|_1$;

(ii) $\mu(\Omega_\lambda) \leqslant C\|g\|_1\lambda^{-1}$; при фиксированном g имеем $\mu(\Omega_\lambda) = o(\lambda^{-1})$, $\lambda \to \infty$;

(iii) $\int_{S\setminus\Omega_\lambda} |Tg_1^\lambda| d\mu \leqslant C\|g_1^\lambda\|_1$.

По поводу доказательства см., например, [CW1]. Следует, однако, отметить, что в [CW1] налагались некоторые дополнительные требования — именно, предполагалось, что выполнено неравенство $\|g\|_1\lambda^{-1} < \mu(S)$ (это несущественно: при нарушении неравенства можно взять $g_0^\lambda = 0$, $\Omega_\lambda = S$), а также, что носитель функции g ограничен. С неограниченным носителем можно поступить, например, так. Сначала обеспечим (i), (ii), (iii) без условия с $o(\lambda^{-1})$ в (ii) и с заменой третьего неравенства в (i), просто на $\|g_1^\lambda\|_1 \leqslant C\|g\|_1$. Для этого представим произвольную функцию $g \in L^1(\mu)$ в виде ряда $g = g_0 + g_1 + g_2 + \ldots$ из функций с ограниченными носителями. Потребуем, чтобы $\|g_0\|_1 \leqslant \|g\|_1$, $\|g_j\|_1 \leqslant \varepsilon_j$ при $j \geqslant 1$ (числа ε_j очень малы). Тогда, положив еще $\varepsilon_0 = 1$, при каждом j можем написать

$$g_j = \varphi_j + \psi_j, \text{ где } \|\varphi_j\|_1,\ \|\psi_j\|_1 \leqslant c\|g_j\|_1,\ |\varphi_j| \leqslant c\sqrt{\varepsilon_j}\lambda;$$
$$\mu(\Omega_{(j)}) \leqslant \frac{c\|g_j\|_1}{\sqrt{\varepsilon_j}\lambda}, \qquad \int\limits_{S\setminus\Omega_{(j)}} |T\psi_j| d\mu \leqslant c\|g_j\|_1.$$

Наконец, определим $g_0^\lambda = \sum_{j\geqslant 0}\varphi_j$, $g_1^\lambda = \sum_{j\geqslant 0}\psi_j$, $\Omega_\lambda = \bigcup_{j\geqslant 0}\Omega_{(j)}$. Легко выбрать числа ε_j так, чтобы эти объекты удовлетворяли нужным оценкам. Теперь займемся условием с $o(\lambda^{-1})$ в (ii). Зафиксируем ε, $0 < \varepsilon \leqslant \|g\|_1$, и выберем λ столь большим, чтобы $\|g\chi_{\{|g|>\lambda\}}\|_1 \leqslant \varepsilon$. После этого произведем вышеописанное разложение функции $g\chi_{\{|g|>\lambda\}}$ по уровню λ:

$$g\chi_{\{|g|>\lambda\}} = \varphi + \psi, \text{ где } |\varphi| \leqslant c\lambda,\ \|\varphi\|_1,\ \|\psi\|_1 \leqslant c\varepsilon,$$
$$\mu(\Omega) \leqslant \frac{c\varepsilon}{\lambda}, \qquad \int\limits_{S\setminus\Omega} |T\psi| d\mu \leqslant c\varepsilon \leqslant c\|g\|_1.$$

Теперь определим искомое разложение для g: $g_0^\lambda = g\chi_{\{|g|\leqslant\lambda\}} + \varphi$, $g_1^\lambda = \psi$, $\Omega_\lambda = \Omega$. Подобными рассуждениями можно обеспечить и неравенство $\|g_1^\lambda\| \leqslant C\int_{\Omega_\lambda} |g| d\mu$.

Проектор Кальдерона–Зигмунда — это, по определению, любой оператор Кальдерона–Зигмунда Q, удовлетворяющий на $L^2(\mu)$ соотношению $Q^2 = Q$.

Лемма 1. *Пусть Q — проектор Кальдерона-Зигмунда. Если $g, Qg \in L^1(\mu)$, то $QQg = Qg$.*

Доказательство. Запишем $g = g_0^\lambda + g_1^\lambda$ (как выше). Тогда $Qg = Qg_0^\lambda + Qg_1^\lambda$. Покажем, что $Qg_1^\lambda \in L^1(\mu)$ и $\|Qg_1^\lambda\|_1 \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Действительно, так как функция g суммируема, из третьей формулы в (i) мы получаем, что $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \|g_1^\lambda\|_1 = 0$. Следовательно, в силу (iii),

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int\limits_{S\setminus\Omega_\lambda} |Qg_1^\lambda| d\mu = 0.$$

Далее,

$$\int\limits_{\Omega_\lambda} |Qg_1^\lambda| d\mu \leqslant \int\limits_{\Omega_\lambda} |Qg| d\mu + \int\limits_{\Omega_\lambda} |Qg_0^\lambda| d\mu \leqslant \int\limits_{\Omega_\lambda} |Qg| d\mu + C\mu(\Omega_\lambda)^{1/2} \|g_0^\lambda\|_2$$
$$\leqslant \int\limits_{\Omega_\lambda} |Qg| d\mu + C'(\lambda\mu(\Omega_\lambda))^{1/2} \|g\|_1^{1/2} \to 0$$

при $\lambda \to \infty$, поскольку $Qg \in L^1(\mu)$ и $\mu(\Omega_\lambda) = o(\lambda^{-1})$ в силу (ii). Теперь, так как $g_0^\lambda \in L^2(\mu)$, мы можем написать $QQg = Qg_0^\lambda + Q(Qg_1^\lambda)$, и второе слагаемое справа стремится к нулю в $L^{1,\infty}(\mu)$ при $\lambda \to \infty$. С другой стороны, $\lim\limits_{\lambda\to\infty} Qg_0^\lambda = Qg$ в $L^{1,\infty}(\mu)$, поскольку $\|g - g_0^\lambda\|_1 \to 0$ (см. третью формулу в (i)). •

Замечание. По дороге мы показали, что если $g, Qg \in L^1(\mu)$, то Qg можно аппроксимировать в $L^1(\mu)$ такой последовательностью функций $y_n \in L^1(\mu) \cap L^2(\mu)$, что $Qy_n = y_n$.

1.3. Описание ситуации. Пусть Q — проектор Кальдерона-Зигмунда. Положим

$$\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_p^Q = \{f \in L^p(\mu) : Qf = f \text{ п.в.}\}, \quad 1 \leqslant p < \infty;$$
$$\mathcal{H}_\infty = \mathcal{H}_\infty^Q = \{f \in L^\infty(\mu) : \int fg d\mu = 0, \text{ если } g \in L^1(\mu) \text{ и } Q^* g = 0\}.$$

(Через Q^* мы обозначаем оператор, сопряженный с Q относительно стандартной *билинейной* двойственности $\langle\varphi, \psi\rangle = \int \varphi\psi d\mu$. Ясно, что Q^* — тоже проектор Кальдерона-Зигмунда.)

Случай $p = \infty$ рассмотрен отдельно, поскольку, вообще говоря, при $f \in L^\infty(\mu)$ функция Qf корректно определена лишь с точностью до аддитивных постоянных. Однако если $\mu(S) < \infty$, то $L^\infty(\mu) \subset L^2(\mu)$, так что множество $Q(L^\infty(\mu))$ состоит из настоящих функций и появляется еще и вариант взять в качестве $\mathcal{H}_\infty$ класс

$$\{f \in L^\infty(\mu) : Qf = f \text{ п.в.}\}.$$

Это ведет к тому же результату — доказательство легко получается из замечания к лемме 1, примененного к оператору $I - Q^*$ вместо Q (заметим, что I — оператор Кальдерона-Зигмунда с ядром $K(x,y) = 0$).

Отметим еще, что если $\mu(S) = \infty$, то $Qf = f$ в BMO для всех f из $\mathcal{H}_\infty$ (достаточно в определении пространства $\mathcal{H}_\infty$ положить $g = a - Q^*a$, где a пробегает множество всех 1-атомов).

Конкретные примеры пространств, укладывающихся в описанную схему, многочисленны. Например, в [B] были упомянуты пространства $H^p(B_n)$ (B_n — шар пространства $\mathbb{C}^n$), в смысле граничных значений, а также соболевские пространства $W^{l,p}(\mathbb{T}^n)$ (рассматриваемые как подпространства пространств L^p на объединении нескольких копий тора $\mathbb{T}^n$). Укажем еще один пример.

Рассмотрим произвольный набор $T_1, \dots, T_k$ операторов Кальдерона-Зигмунда, связанных с пространством однородного типа (S,μ). Тогда пространства $X_p = \{f \in L^p(\mu) : T_j f \in L^p(\mu), 1 \leqslant j \leqslant k\}$ можно рассматривать как $\mathcal{H}_p$. Действительно, вложим X_p в $L^p(\mu) \oplus \dots \oplus L^p(\mu)$ с помощью отображения

$$f \mapsto (f, T_1 f, \dots, T_k f),$$

а затем в качестве Q возьмем проектор

$$Q(f_0, f_1, \dots, f_n) = (f_0, T_1 f_0, \dots, T_k f_0)$$

(и еще определим пространства $\mathcal{H}_\infty$ и X_∞ соответствующим образом). Эта конструкция включает в себя „вещественные" классы Харди $H^p(\mathbb{R}^n)$.

1.4. Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 1. *Пара* $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_\infty)$ *всегда* K*-замкнута в* $(L^1(\mu), L^\infty(\mu))$.

В приведенном ниже доказательстве много внимания уделяется корректному применению формулы $\int (Qg)h\,d\mu = \int g(Q^*h)\,d\mu$ (например, при $g \in L^1(\mu)$, $h \in L^\infty(\mu)$). Мы не накладываем никаких условий на число $\mu(S)$, однако читатель заметит, что при $\mu(S) < \infty$ можно было бы действовать более непосредственно.

Всякий раз, когда какая-нибудь функция h из $L^\infty(\mu)$ лежит еще и в $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, мы условимся применять Q к h как к элементу пространства $L^p(\mu)$ — так что в результате получается настоящая функция.

Следующая лемма хорошо известна. Мы наметим доказательство ради полноты.

Лемма 2. *Пусть (S,μ) — пространство однородного типа, $G_0 \in L^1(\mu)$, $G_1 \in L^\infty(\mu)$. Если $TG_0 = TG_1$ для некоторого оператора Кальдерона–Зигмунда T (при $\mu(S) = \infty$ равенство понимается с точностью до аддитивных постоянных), то функция $h = TG_0$ удовлетворяет неравенству $\|h\|_2 \leqslant C\,\|G_0\|_1^{1/2}\|G_1\|_\infty^{1/2}$.*

Доказательство. Рассмотрим следующий максимальный оператор:

$$(M^\# g)(x) = \sup_B \inf_\alpha \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |g-\alpha|^{1/2} d\mu \right)^2,$$

где нижняя грань (внутри) берется по всем постоянным α, а внешняя верхняя грань — по всем шарам B, содержащим x. Очевидно,

$$M^\# h \leqslant \|h\|_{\mathrm{BMO}} \leqslant C\,\|G_1\|_\infty\,;$$

кроме того,

$$\|M^\# h\|_{1,\infty} \leqslant C\|h\|_{1,\infty} \leqslant C\,\|G_0\|_1.$$

Поэтому $\|M^\# h\|_2 \leqslant C\sqrt{\|G_0\|_1\,\|G_1\|_\infty}$. В силу ([ST, с. 33, теорема 3.3]) существует такая постоянная α, что $\|h-\alpha\|_2 \leqslant C_1\sqrt{\|G_0\|_1\,\|G_1\|_\infty}$. Если $\mu(S) = \infty$, немедленно получаем, что $\alpha = 0$ (поскольку $h \in L^{1,\infty}(\mu)$), и все доказано. Предположим, что $\mu(S) < \infty$ (следовательно, равенство $TG_0 = TG_1$ понимается буквально). Тогда

$$\|h\|_{1,\infty} \leqslant C\sqrt{\mu(S)}\|h\|_2 \leqslant C'\sqrt{\mu(S)}\|G_1\|_2 \leqslant C''\|G_1\|_\infty \mu(S).$$

С другой стороны, $\|h\|_{1,\infty} \leqslant C\|G_0\|_1$. Поэтому

$$\|h\|_{1,\infty} \leqslant C\sqrt{\|G_0\|_1\,\|G_1\|_\infty \mu(S)}.$$

Теперь,

$$\begin{aligned}\alpha\mu(S) &\leqslant C(\|h-\alpha\|_{1,\infty}+\|h\|_{1,\infty}) \leqslant C(\mu(S)^{1/2}\|h-\alpha\|_2+\|h\|_{1,\infty})\\ &\leqslant C\sqrt{\|G_0\|_1\,\|G_1\|_\infty\mu(S)}.\end{aligned}$$

Значит,

$$\left(\int_S |\alpha|^2 d\mu\right)^{1/2} = \alpha\sqrt{\mu(S)} \leqslant C\sqrt{\|G_0\|_1\,\|G_1\|_\infty},$$

что завершает доказательство. •

Доказательство теоремы 1. Пусть $f \in \mathcal{H}_1+\mathcal{H}_\infty$, и пусть $f=g+h$, где $g \in L^1(\mu)$, $h \in L^\infty(\mu)$. Положим $\|g\|_1 = a$, $\|h\|_\infty = b$ и обозначим через B_1 (соответственно B_2) замкнутый шар радиуса Aa (соответственно, Ab) в пространстве $\mathcal{H}_1$ (соответственно, $\mathcal{H}_\infty$). Нужно доказать, что $f \in B_1 + B_2$ при некотором $A \geqslant 1$, не зависящем от f, g и h.

Рассмотрим локально выпуклое пространство $L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$, состоящее из всех функций на S, суммируемых на каждом множестве конечной меры (топология задается естественными полунормами). Двойственное пространство $(L^1_{\mathrm{loc}}(\mu))'$ совпадает с $L^\infty_0(\mu)$, пространством всех функций $G \in L^\infty(\mu)$, у которых $\mu(\operatorname{supp} G) < \infty$. Покажем, что множество $B_1 + B_2$ замкнуто в $L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$. Легко видеть, что шар B_2 слабо компактен в $L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$, поэтому достаточно установить, что замкнут шар B_1. Пусть u — предельная точка для B_1. Совсем нетрудно доказать, что $\int_S |u|d\mu \leqslant Aa$, так что достаточно проверить равенство $Qu = u$. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и шар V в S, и пусть V_1 — шар с тем же центром и радиусом, в C раз большим. Число C выберем, исходя из двух условий: $\int_{S\setminus V_1} |u|d\mu < \varepsilon$ и $|Q(w\chi_{S\setminus V_1})(x)| \leqslant \varepsilon$ при всех $x \in V$ и $w \in B_1$ (последнее выполнено при достаточно большом C в силу условия (б) из определения оператора Кальдерона–Зигмунда). Зафиксировав C, найдем такую последовательность $w_n \in B_1$, что $w_n\chi_{V_1} \to u\chi_{V_1}$ в L^1. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} Q(w_n\chi_{V_1}) = Q(u\chi_{V_1})$ (предел в $L^{1,\infty}$). В силу выбора числа C, на шаре V имеем

$$|u - Q(u\chi_{V_1})| \leqslant \sup_n \sup_{x\in V} |Q(w_n\chi_{S\setminus V_1})(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Так как $\|Q(u)-Q(u\chi_{V_1})\|_{1,\infty} \leqslant c\|\chi_{S\setminus V_1}u\|_1 \leqslant c\varepsilon$, то на V вне множества меры не больше $c\sqrt{\varepsilon}$ справедливо неравенство $|u-Q(u)| \leqslant \varepsilon + c\sqrt{\varepsilon}$. Варьируя ε, а затем V, получаем, что $u = Qu$.

Стало быть, если функция f не лежит в $B_1 + B_2$, то найдется такая функция G из $L_0^\infty(\mu)$ (следовательно, из $\bigcap\limits_{0<p\leqslant\infty} L^p(\mu)$), что

$$\left|\int fGd\mu\right| > 1, \quad \sup\left\{\left|\int(b_1+b_2)Gd\mu\right| : b_1 \in B_1,\, b_2 \in B_2\right\} \leqslant 1. \tag{3}$$

Из второго неравенства в (3) выводим, что

$$\|G\|_{L^\infty(\mu)/\mathcal{H}_1^\perp} \leqslant (Aa)^{-1} \quad \text{и} \quad \|G\|_{L^1(\mu)/\mathcal{H}_\infty^\perp} \leqslant (Ab)^{-1};$$

поэтому найдутся две функции, G_0 из $L^1(\mu)$ и G_1 из $L^\infty(\mu)$, такие, что

$$G - G_0 \in \mathcal{H}_\infty^\perp, \qquad G - G_1 \in \mathcal{H}_1^\perp; \tag{4}$$

$$\|G_0\|_1 \leqslant 2(Ab)^{-1}, \qquad \|G_1\|_\infty \leqslant 2(Aa)^{-1}. \tag{5}$$

Наш план — написать что-то вроде

$$\int fGd\mu = \int(Qg+Qh)G\,d\mu = \int(Qg)G_1d\mu + \int hQ^*G_0\,d\mu,$$

а затем применить разложение Кальдерона–Зигмунда к g и G_0. Эти наивные намерения, однако, буквально не реализуются. Поступим следующим образом. Заранее известно, что $f = \varphi + \psi$, где $\varphi \in \mathcal{H}_1$ и $\psi \in \mathcal{H}_\infty$ (хотя нормы функций φ и ψ никак не контролируются). Положив $u = \varphi - g = h - \psi$, мы видим, что $u \in L^1(\mu) \cap L^\infty(\mu) \subset L^2(\mu)$. Пусть $v = (I-Q)u$, тогда $v = -(I-Q)g = (I-Q)h$ (если $\mu(S) = \infty$, то последнее равенство понимается с точностью до аддитивных постоянных). Лемма 2, примененная к $T = I - Q$, дает

$$\|v\|_2 \leqslant C\sqrt{ab}. \tag{6}$$

Теперь воспользуемся разложением Кальдерона–Зигмунда с $\lambda = b$ для функции g:

$$g = g_0 + g_1; \quad |g_0| \leqslant Cb; \quad \|g_0\|_1,\, \|g_1\|_1 \leqslant Ca;$$

$$\mu(\Omega) \leqslant Cab^{-1}; \quad \int\limits_{S\setminus\Omega} |Qg_1| \leqslant Ca.$$

Написав $\varphi = g_0 + g_1 + u$ и вспомнив, что $u \in L^2(\mu)$, получим $\varphi = Q\varphi = Qg_0 + Qg_1 + Qu$, откуда

$$f = Qg_0 + Qg_1 + Qu + \psi. \tag{7}$$

Утверждение 1. *Справедливо включение* $Qg_1 \in L^1(\mu)$, *причем* $\|Qg_1\|_1 \leqslant Ca$.

Доказательство. Мы уже знаем, что $\int_{S\setminus\Omega} |Qg_1| d\mu \leqslant Ca$, так что достаточно оценить интеграл $\int_\Omega |Qg_1| d\mu$. Применив $I - Q$ к обеим частям формулы $\varphi = g_0 + g_1 + u$, найдем $(I-Q)g_0 + (I-Q)g_1 + v = 0$, откуда $Qg_1 = g_1 + (I-Q)g_0 + v$. Теперь, в силу (6) и оценок функций g_0 и g_1, имеем

$$\begin{aligned}\int_\Omega |Qg_1| d\mu &\leqslant \int_\Omega |g_1| d\mu + \mu(\Omega)^{1/2}(C\|g_0\|_2 + \|v\|_2)\\ &\leqslant Ca + C(ab^{-1})^{1/2}[(ab)^{1/2} + (ab)^{1/2}] \leqslant Ca. \bullet\end{aligned}$$

Поскольку $G \in L_0^\infty(\mu)$, утверждение 1 позволяет нам проинтегрировать соотношение (7), умноженное на G:

$$\int fG\, d\mu = \int (Qg_0)G\, d\mu + \int (Qg_1)G\, d\mu + \int (Qu)G\, d\mu + \int \psi G\, d\mu.$$

В первом и третьем слагаемых мы можем перейти к Q^*, используя L^2-двойственность. Во втором слагаемом $Qg_1 \in \mathcal{H}_1$ в силу утверждения 1 и леммы 1, так что можно заменить G функцией G_1 (см. (4)). Снова в силу (4) в четвертом слагаемом можно заменить G функцией G_0. Учитывая, что $Q^*G = Q^*G_0$ (по теореме о биполяре, так как $G - G_0 \perp \mathcal{H}_\infty$)), получаем

$$\int fG\, d\mu = \int g_0 Q^*G\, d\mu + \int (Qg_1)G_1\, d\mu + \int uQ^*G_0\, d\mu + \int \psi G_0\, d\mu. \tag{8}$$

Теперь применим лемму 2 с $T = Q^*$ к G_0 и G_1 (имеем $Q^*G = Q^*G_0 = Q^*G_1$ в силу (4), с обычным соглашением в случае $\mu(S) = \infty$). Учитывая (5), получим

$$\|Q^*G\|_2 \leqslant \frac{C}{A\sqrt{ab}}. \tag{9}$$

Таким образом, два первых члена в правой части формулы (8) имеют порядок $O(1/A)$:

$$\left|\int g_0 Q^* G\, d\mu\right| \leqslant \|g_0\|_2\, \|Q^* G\|_2 \leqslant \frac{C\sqrt{ab}}{A\sqrt{ab}}$$

в силу (9) и оценок функции g_0, а

$$\left|\int (Qg_1) G_1\, d\mu\right| \leqslant \|Qg_1\|_1\, \|G_1\|_\infty \leqslant \frac{Ca}{Aa}$$

в силу (5) и утверждения 1.

Чтобы оценить оставшиеся два члена, применим разложение Кальдерона–Зигмунда с $\lambda = a^{-1}$ к G_0 и Q^*:

$$\begin{gathered} G_0 = w_0 + w_1; \quad |w_0| \leqslant C\, a^{-1}; \quad \|w_0\|_1,\, \|w_1\|_1 \leqslant C(Ab)^{-1}; \\ \mu(\Omega_1) \leqslant Ca(Ab)^{-1}; \quad \int\limits_{S\setminus\Omega_1} |Q^* w_1| \leqslant C(Ab)^{-1}. \end{gathered}$$

Утверждение 2. *Справедливо включение* $Q^* w_1 \in L^1(\mu)$, *причем* $\|Q^* w_1\|_1 \leqslant C(Ab)^{-1}$.

Доказательство. Опять, в оценке нуждается лишь число $\int_{\Omega_1} |Q^* w_1| d\mu$. Поскольку $Q^* w_1 = Q^* G - Q^* w_0$, в силу (9) найдем

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega_1} |Q^* w_1| d\mu &\leqslant \mu(\Omega_1)^{1/2} (\|Q^* G\|_2 + C\|w_0\|_2) \\ &\leqslant \left(\frac{Ca}{Ab}\right)^{1/2} (CA^{-1}(ab)^{-1/2} + C(Aab)^{-1/2}) \\ &\leqslant C(Ab)^{-1} \end{aligned}$$

(напомним, что $A \geqslant 1$)). •

Возвращаясь к (8), напишем для двух оставшихся членов

$$\begin{aligned} &\int uQ^* G_0\, d\mu + \int \psi G_0\, d\mu \\ &\quad = \int uQ^* w_0\, d\mu + \int uQ^* w_1\, d\mu + \int \psi w_0\, d\mu + \int \psi w_1\, d\mu \\ &\quad = \int (Qu + \psi) w_0\, d\mu + \int (uQ^* w_1 + \psi w_1) d\mu \overset{\text{def}}{=} \mathrm{I} + \mathrm{II}. \end{aligned}$$

Так как $u = \varphi - g$, то

$$Qu + \psi = \varphi + \psi - Qg = f - Qg = (I - Q)g + h = h - v.$$

В силу (6)

$$|\,\mathrm{I}\,| \leqslant \|v\|_2 \, \|w_0\|_2 + \|h\|_\infty \, \|w_0\|_1 \leqslant C\sqrt{ab}\,\frac{1}{\sqrt{Aab}} + b\frac{C}{Ab} \leqslant \frac{C}{\sqrt{A}}.$$

Наконец, из формулы $u = h - \psi$ получаем

$$\mathrm{II} = \int hQ^* w_1 \, d\mu + \int \psi(w_1 - Q^* w_1) d\mu.$$

В силу утверждения 2 и леммы 1 имеем $Q^*(w_1 - Q^* w_1) = 0$, так что второй интеграл равен нулю (поскольку $\psi \in \mathcal{H}_\infty$). Снова в силу утверждения 2, первый интеграл не превосходит CA^{-1}. Объединяя полученные оценки, придем к неравенству $|\int fG d\mu| \leqslant CA^{-1/2}$, а это противоречит первому неравенству в (3), если A велико. •

В заключении параграфа скажем несколько слов об интерполяции. Напишем формулу (1) применительно к нашему случаю, взяв $p^{-1} = 1 - \theta$ $(1 < p < \infty)$:

$$(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_\infty)_{\theta,p} = L^p(\mu) \cap (\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_\infty) \overset{\text{def}}{=} Xp.$$

Для полноты картины надо убедиться в том, что $X_p = \mathcal{H}_p$. Если $\mu(S) < \infty$, это очевидно. Если же $\mu(S) = \infty$, то это равенство можно доказать следующим образом. Пусть $f \in X_p$, т. е. $f \in L^p(\mu)$ и $f = g + h$, где $g \in \mathcal{H}_1$, $h \in \mathcal{H}_\infty$. Так как $Qh = h$ с точностью до констант, то функция $Qf - f$ постоянна и, значит, равна нулю, поскольку лежит в $L^p(\mu)$. Таким образом, $X_p \subset \mathcal{H}_p$. Покажем, что это включение — на самом деле равенство. Из K-замкнутости следует, что $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_\infty$ — замкнутое (по норме) подпространство суммы $L^1(\mu) + L^\infty(\mu)$. Следовательно, X_p — замкнутое подпространство в $L^p(\mu)$, и нам достаточно доказать, что X_p плотно в $\mathcal{H}_p$. Проверим, что плотным будет уже множество $L^p(\mu) \cap \mathcal{H}_1$. Если это не так, но найдется такая функция f из $L^q(\mu)$ $(q^{-1} + p^{-1} = 1)$, что $Q^* f \neq 0$, но $\int fg d\mu = 0$ для всех $g \in L^p(\mu) \cap \mathcal{H}_1$. Пусть φ — ограниченная функция, сосредоточенная на некотором шаре и имеющая нулевое среднее по этому шару (кратное 1-атома). Тогда $Q\varphi \in L^1(\mu) \cap L^p(\mu)$, так что $0 = \int fQ\varphi d\mu = \int (Q^* f)\varphi d\mu$. Следовательно, функция $Q^* f$ постоянна на любом шаре, а тогда $Q^* f \equiv \mathrm{const}$. Так как $Q^* f \in L^q(\mu)$, то $Q^* f = 0$.

§2. Теорема вольфовского типа для K-замкнутости

2.1. Прежде всего, напомним, в чем состоит теорема Вольфа.

Теорема Вольфа [W]. *Пусть X_1, X_2, X_3, X_4 — совместимые квазибанаховы пространства, причем $X_1 \cap X_4 \subset X_2 \cap X_3$. Пусть $0 < \alpha, \beta < 1$, $0 < p, q \leqslant \infty$. Предположим, что*

$$X_2 = (X_1, X_3)_{\alpha,p}, \qquad X_3 = (X_2, X_4)_{\beta,q}.$$

Тогда

$$X_2 = (X_1, X_4)_{\varphi,p}, \qquad X_3 = (X_1, X_4)_{\psi,q},$$

где $\varphi = \frac{\alpha\beta}{1-\alpha+\alpha\beta}$ и $\psi = \frac{\beta}{1-\alpha+\alpha\beta}$.

Грубая формулировка, которая, возможно, лучше объясняет, как теорема работает, такова: если мы можем „хорошо" интерполировать вещественным методом на двух перекрывающихся интервалах некоторой шкалы, то то же можно делать и на их объединении.

Мы получим утверждение того же типа для K-замкнутости, которое выглядит следующим образом.

Пусть (X_0, X_1) — совместимая пара квазибанаховых пространств, и пусть Y_0, Y_1 — замкнутые подпространства соответственно в X_0 и в X_1. Пусть $0 < \theta < \delta < 1$, $0 < p$, $q \leqslant \infty$. Положим

$$E_0 = (X_0, X_1)_{\theta,p}, \qquad E_1 = (X_0, X_1)_{\delta,q};$$
$$F_0 = (Y_0, Y_1)_{\theta,p}, \qquad F_1 = (Y_0, Y_1)_{\delta,q}.$$

Теорема 2. *При сделанных предположениях, если пара (Y_0, F_1) K-замкнута в (X_0, E_1), а пара (F_0, Y_1) - в (E_0, X_1), то пара (Y_0, Y_1) K-замкнута в (X_0, X_1).*

Замечание. В соответствии с определением K-замкнутости, мы неявно предполагаем, что F_0 — замкнутое подпространство в E_0, а F_1 — в E_1.

Прежде чем переходить к доказательству, отметим, что теорему 1 легко вывести из теоремы 2 и следующих утверждений, установленных в [B].

(а) При $1 < p < \infty$ пара $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_p)$ K-замкнута в $(L^1(\mu), L^p(\mu))$.

(б) При $1 < q < \infty$ пара $(\mathcal{H}_q, \mathcal{H}_\infty)$ K-замкнута в $(L^q(\mu), L^\infty(\mu))$.

(в) При $0 < \alpha < 1$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$ имеет место равенство $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_q)_{\alpha,s} = \{f \in (L^1(\mu), L^\infty(\mu))_{\alpha,s} : Qf = f\}$.

Ниже, в п. 2.3, мы прокомментируем утверждения (а), (б) и (в).

Доказательство теоремы 2. Ясно, что $X_0 \cap X_1 \subset E_0 \cap E_1$. Начнем с доказательства неравенства

$$\|u\|_{E_0/F_0} \leqslant C\|u\|^{1-\theta}_{X_0/Y_0}\|u\|^{\theta}_{X_1/Y_1} \tag{10}$$

для всех $u \in X_0 \cap X_1$ (разумеется, здесь речь идет о нормах классов, порожденных вектором u в соответствующих факторпространствах). Обозначим числа $\|u\|_{X_0/Y_0}$, $\|u\|_{E_0/F_0}$, $\|u\|_{E_1/F_1}$ и $\|u\|_{X_1/Y_1}$ через a, b, c и d соответственно.

Выберем векторы $y_0 \in Y_0$ и $f_1 \in F_1$ таким образом, чтобы

$$\|u - y_0\|_{X_0} \leqslant 2a, \qquad \|u - f_1\|_{E_1} \leqslant 2c.$$

Так как $Y_0 + F_1 \ni y_0 - f_1 = (y_0 - u) + (u - f_1)$, из K-замкнутости пары (Y_0, F_1) вытекает существование таких векторов $\tilde{y}_0 \in Y_0$ и $\tilde{f}_0 \in F_1$, что $y_0 - f_1 = \tilde{y}_0 - \tilde{f}_1$ и

$$\|\tilde{y}_0\|_{X_0} \leqslant C\|y_0 - u\|_{X_0} \leqslant Ca,$$
$$\|\tilde{f}_1\|_{E_1} \leqslant C\|u - f_1\|_{E_1} \leqslant Cc.$$

Очевидно, что элемент $\tilde{u} = u - y_0 + \tilde{y}_0 = u - f_1 + \tilde{f}_1$ удовлетворяет одновременно оценкам $\|\tilde{u}\|_{X_0} \leqslant Ca$ и $\|\tilde{u}\|_{E_1} \leqslant Cc$. По реитерационной теореме (см. [BL]), $E_0 = (X_0, E_1)_{\alpha,p}$, где $\theta = \alpha\delta$; следовательно,

$$b = \|u\|_{E_0/F_0} = \|\tilde{u}\|_{E_0/F_0} \leqslant \|\tilde{u}\|_{E_0} \leqslant C\|\tilde{u}\|^{1-\alpha}_{X_0}\|\tilde{u}\|^{\alpha}_{E_1} \leqslant Ca^{1-\alpha}c^{\alpha}.$$

Аналогичным образом получается неравенство $c \leqslant Cb^{1-\beta}d^{\beta}$, где $\delta = (1-\beta)\theta + \beta$. Значит, $b \leqslant Ca^{1-\alpha}(b^{1-\beta}d^{\beta})^{\alpha}$. Разделив на $b^{(1-\beta)\alpha}$, после несложных вычислений получим (10).

Теперь приступим непосредственно к проверке утверждения теоремы. Пусть вектор y из $Y_0 + Y_1$ представлен в виде $y = x_0 + x_1$, $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$. Положим $a = \|x_0\|_{X_0}$, $b = \|x_1\|_{X_1}$ и рассмотрим произвольное представление $y = \varphi + \psi$, где $\varphi \in Y_0$, $\psi \in Y_1$. Очевидно, для вектора $u = \varphi - x_0 = x_1 - \psi$ справедливы оценки

$$\|u\|_{X_0/Y_0} \leqslant a, \qquad \|u\|_{X_1/Y_1} \leqslant b,$$

откуда, в силу (10), $\|u\|_{E_0/F_0} \leqslant Ca^{1-\theta}b^{\theta}$. Выберем $f_0 \in F_0$ так, чтобы $\|u - f_0\|_{E_0} \leqslant Ca^{1-\theta}b^{\theta}$.

Далее, заметим, что, согласно формуле Хольмстедта (см. [BL, §3.6]), пара (Y_0, F_0) будет K-замкнутой в (X_0, E_0) (поскольку $F_0 = (Y_0, F_1)_{\alpha,p}$, $E_0 = (X_0, E_1)_{\alpha,p}$, а пара (Y_0, F_1) K-замкнута в (X_0, E_1) по предположению). Поэтому, написав $Y_0 + F_0 \ni \varphi - f_0 = x_0 + (u - f_0)$, мы можем найти такие векторы $y_0 \in Y_0$, $\tilde{f}_0 \in F_0$, что

$$\begin{aligned} &\varphi - f_0 = y_0 + \tilde{f}_0, \quad y_0 \in Y_0, \ \tilde{f}_0 \in F_0; \\ &\|y_0\|_{Y_0} \leqslant C\|x_0\|_{X_0} = Ca, \\ &\|\tilde{f}_0\|_{F_0} \leqslant C\|u - f_0\|_{F_0} \leqslant Ca^{1-\theta}b^{\theta}. \end{aligned} \tag{11}$$

Подобным же образом, поскольку пара (F_0, Y_1) K-замкнута в (E_0, X_1) по предположению, мы можем модифицировать разложение $F_0 + Y_1 \ni f_0 + \psi = x_1 - (u - f_0)$:

$$f_0 + \psi = \hat{f}_0 + y_1, \quad \hat{f}_0 \in F_0, \ y_1 \in Y_1, \tag{12}$$

где $\|\hat{f}_0\|_{F_0} \leqslant Ca^{1-\theta}b^{\theta}$, $\|y_1\|_{Y_1} \leqslant Cb$. Сложив (11) и (12), придем к формуле $y = \varphi + \psi = y_0 + y_1 + f$, где векторы y_0 и y_1 уже хороши, а $f = \tilde{f}_0 + \hat{f}_0 \in F_0$, $\|f\|_{F_0} \leqslant Ca^{1-\theta}b^{\theta}$.

Для завершения доказательства достаточно заметить, что, по условию, $F_0 \subset (Y_0, Y_1)_{\theta,\infty}$. Следовательно, для всякого $t > 0$ существует представление $f = z + w$, где $z \in Y_0$, $w \in Y_1$ и

$$t^{-\theta}(\|z\|_{Y_0} + t\|w\|_{Y_1}) \leqslant C\|f\|_{F_0} \leqslant C'a^{1-\theta}b^{\theta}.$$

Выбрав $t = ab^{-1}$, получим $\|z\|_{Y_0} \leqslant Ca$, $\|w\|_{Y_1} \leqslant Cb$. •

2.2. Третье доказательство теоремы 1. Это короткое рассуждение напоминает доказательство теоремы 2. Главное отличие состоит в замене неравенства (10) ссылкой на лемму 2. Разумеется, нам опять нужны утверждения (а), (б) и (в).

Пусть $f \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_\infty$, и пусть $f = g + h$, где $g \in L^1(\mu)$, $h \in L^\infty(\mu)$. Положим $a = \|g\|_1$, $b = \|h\|_\infty$ и запишем $f = \varphi + \psi$, где $\varphi \in \mathcal{H}_1$, $\psi \in \mathcal{H}_\infty$. Тогда

$$u = \varphi - g = h - \psi \in L^1(\mu) \cap L^\infty(\mu) \subset L^2(\mu),$$

и для функции $v = (I - Q)u$ получим $\|v\|_2 \leqslant C\sqrt{ab}$ (см. (6)).

Далее, запишем

$$f = (g + v) + (h - v) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f_0 + f_1.$$

Утверждается, что $f_0 \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, $f_1 \in \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_\infty$. Действительно,

$$\begin{aligned} f_0 &= g + v = g + u - Qu = g + (\varphi - g) - Qu \\ &= \varphi - Qu; \\ f_1 &= h - v = h - u + Qu = h - (h - \psi) + Qu \\ &= \psi + Qu, \end{aligned}$$

и осталось лишь вспомнить, что $u \in L^2(\mu)$. Теперь из (а) и (б) вытекает, что

$$\begin{aligned} f_0 &= \tilde{g} + v_1, \quad \text{где } \tilde{g} \in \mathcal{H}_1,\ v_1 \in \mathcal{H}_2,\ \|\tilde{g}\|_1 \leqslant Ca,\ \|v_1\|_2 \leqslant C\sqrt{ab}; \\ f_1 &= \tilde{h} + v_2, \quad \text{где } \tilde{h} \in \mathcal{H}_\infty,\ v_2 \in \mathcal{H}_2,\ \|\tilde{h}\|_\infty \leqslant Cb,\ \|v_2\|_2 \leqslant C\sqrt{ab}. \end{aligned}$$

Следовательно, $f = \tilde{g} + \tilde{h} + s$, где $\tilde{g}$ и $\tilde{h}$ уже хороши, а $s \in \mathcal{H}_2$, причем $\|s\|_2 \leqslant C\sqrt{ab}$. Поскольку в силу (в)

$$\mathcal{H}_2 = (\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_\infty)_{1/2,2} \subset (\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_\infty)_{1/2,\infty},$$

мы можем закончить рассуждение так же, как доказательство теоремы 2. •

2.3. Замечания об оригинальном доказательстве Бургейна. Разумеется, если теорема 1 известна, то утверждение (в) очевидно, а (а) и (б) получаются из формулы Хольмстедта ([BL, §3–6]). Поэтому все приведенные выше подходы эквивалентны. Чтобы читателю было легче сравнивать „истинные длины" трех доказательств теоремы 1, а также судить об их достоинствах и недостатках, мы кратко остановимся на рассуждениях Бургейна, приведших к утверждениям (а), (б) и (в).

Сначала предположим, что (а) и (б) известны. Тогда, как объяснено во введении, на интервалах $[1, p]$ и $[q, \infty]$ интерполяционные свойства шкалы $\mathcal{H}_r$ — такие же, как у шкалы $L^r(\mu)$. Взяв $q < p$ и применив теорему Вольфа, получим (в). Следует отметить, что в действительности доказательство теоремы Вольфа — это довольно длинное (хоть и нетрудное) путешествие в теорию интерполяции (проходящее, например, через классическую теорему о реитерации), в духе приведенного выше доказательства теоремы 2. В зависимости от вкусов, это обстоятельство можно считать желательным или нежелательным, и т. д.

Далее, утверждения (а) и (б) двойственны друг другу (точнее, утверждение (а) для пары $(\mathcal{H}_1^Q, \mathcal{H}_p^Q)$ двойственно утверждению (в) для пары $(\mathcal{H}_{p'}^{I-Q^*}, \mathcal{H}_\infty^{I-Q^*})$). Простое, но важное наблюдение, лежащее в основе этого, впервые было сделано в [P]. Приведем точную формулировку.

Предложение 1. *Пусть (X_0, X_1) — совместимая пара банаховых пространств, причем пересечение $X_0 \cap X_1$ плотно как в X_0, так и в X_1. Пусть Y_0, Y_1 — замкнутые подпространства в X_0 и X_1 соответственно. Тогда пара (Y_0, Y_1) K-замкнута в (X_0, X_1) в том и только в том случае, если пара $(Y_0^\perp, Y_1^\perp)$ K-замкнута в (X_0^*, X_1^*).*

Полезно воспроизвести доказательство утверждения (a), приведенное в статье Бургейна [B]. Мы немного изменим формулировку. В случае $\mu(S) = \infty$ (не рассматривавшемся в [B]) новая формулировка несколько сильнее, чем (a).

Предложение 2. *Пусть $f \in L^1(\mu) + L^p(\mu)$ $(1 < p < \infty)$, и пусть $Qf = f$. Если $f = g + h$, где $g \in L^1(\mu)$, $h \in L^p(\mu)$, то $f = \tilde{g} + \tilde{h}$, где $\tilde{g} \in \mathcal{H}_1$, $\tilde{h} \in \mathcal{H}_p$ и $\|\tilde{g}\|_1 \leqslant C\|g\|_1$, $\|\tilde{h}\|_p \leqslant C\|h\|_p$.*

Замечание. В частности, получаем, что $\{f \in L^1(\mu) + L^p(\mu) : Qf = f\} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_p$. Если $\mu(S) = \infty$, последнее неочевидно.

Доказательство. Пусть $a = \|g\|_1$, $b = \|h\|_p$. Применим к g разложение Кальдерона–Зигмунда, взяв $\lambda = (b^p a^{-1})^{\frac{1}{p-1}}$:

$$g = g_0 + g_1, \quad |g_0| \leqslant C\lambda; \ \|g_0\|_1, \|g_1\|_1 \leqslant Ca;$$
$$\mu(\Omega) \leqslant Ca\lambda^{-1}; \quad \int\limits_{S\setminus\Omega} |Qg_1|\,d\mu \leqslant Ca.$$

Затем запишем $f = Qf = Qg_1 + Q(g_0 + h)$. Утверждается, что функции $\tilde{g} = Qg_1$ и $\tilde{h} = Q(g_0 + h)$ — искомые. Действительно, легко понять, что $\|g_0\|_p \leqslant Cb$, откуда $\|\tilde{h}\|_p \leqslant Cb$. Как и в доказательствах утверждений 1 и 2 в §1, достаточно установить, что $\int_\Omega |Qg_1|\,d\mu \leqslant Ca$. Это получается из формулы $Qg_1 = g_1 + (I - Q)(g_0 + h)$:

$$\int\limits_{\Omega} |Qg_1|\,d\mu \leqslant Ca + (\mu(\Omega))^{\frac{p-1}{p}} \|g_0 + h\|_p \leqslant Ca. \quad \bullet$$

Замечание. В приведенном рассуждении достаточно было бы предположить, что ядро K оператора Q удовлетворяет условию Хёрмандера (условию (в) в §1.2) лишь по переменной, вовлеченной в интегрирование в эвристической формуле $Q(f)(x) = \int K(x,y) f(y)\,d\mu(y)$:

$$\int\limits_{\rho(x,y_0) > C\rho(y,y_0)} |K(x,y) - K(x,y_0)|\,d\mu(x) \leqslant C.$$

В качестве объяснения упомянем, что именно условие Хёрмандера по y дает условие (iii) в разложении Кальдерона–Зигмунда. Другая переменная вступает в игру, когда мы прибегаем к двойственности.

Это обстоятельство позволяет несколько расширить круг приложений. Приведем два примера.

Сначала рассмотрим следующую ситуацию. Пусть (S,μ) — пространство однородного типа, а e — измеримое подмножество в S, причем $0<\mu(e)<\infty$. Зафиксируем некоторый оператор Кальдерона–Зигмунда T и определим пространство

$$X_p=\{f\in L^p(e):Tf\in L^p(S)\}\quad (1\leqslant p\leqslant\infty)$$

(всякую функцию на e мы рассматриваем как функцию на S, равную нулю на $S\setminus e$). Пространство X_p естественным образом можно вложить в прямую сумму $L^p(e)\oplus L^p(S)$.

Предложение 3. *При* $1<p<\infty$ *пара* (X_p,X_∞) *K-замкнута в* $(L^p(e)\oplus L^p(S),L^\infty(e)\oplus L^\infty(S))$.

Доказательство. С помощью предложения 1 перейдем к аннуляторам. Простые вычисления показывают, что при $1<r<\infty$ аннулятор пространства X_r — это следующее подпространство $Y_{r'}$ в $L^{r'}(e)\oplus L^{r'}(S)$:

$$Y_{r'}=\{(-\chi_e T^*\varphi,\varphi):\varphi\in L^{r'}(S)\}.$$

Справедливо и равенство $X_\infty^\perp=Y_1\overset{\text{def}}{=}\{(-\chi_eT^*\varphi,\varphi):\varphi,\ \chi_eT^*\varphi\in L^1(S)\}$, но здесь нужно действовать осторожнее. Именно, начав с Y_1, можно показать с помощью подходящего варианта замечания к лемме 1, что $Y_1^\perp=X_\infty$. Тогда по теореме о биполяре получим $X_\infty^\perp=Y_1$ (этот окольный путь необходим, поскольку, например, заранее не ясно, есть ли вообще в X_∞ ненулевые функции).

Оператор $Q(\psi,\varphi)=(-\chi_e T^*\varphi,\varphi)$ проектирует пространство $L^2(e)\oplus L^2(S)$ на Y_2. Ядро оператора Q есть функция $(-\chi_e(x)K(x,y),0)$ (где K — ядро оператора T^*; напомним, что тождественному оператору отвечает нулевое ядро). Поскольку условие Хёрмандера по переменной y выдерживает умножение функции $K(x,y)$ на $\chi_e(x)$, мы видим, что пара $(Y_1,Y_{p'})$ K-замкнута при $1<p<\infty$, что завершает доказательство. •

В случае, когда $(S,\mu)=(\mathbb{T},m)$ (единичная окружность с нормированной мерой Лебега), $e\subset\mathbb{T}$ — замкнутое множество $(0<m(e)<1)$ и T — проектор Рисса ($Tf=\mathbb{P}f=\sum_{n\geqslant 0}\hat f(n)z^n$), пространство X_p можно интерпретировать как подпространство пространства $H^p(\mathbb{D})$, состоящее из всех функций, которые допускают аналитическое продолжение через $\mathbb{T} \setminus e$ до функции из $H^p(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D})$. При $p = \infty$ получаем пространство функций, аналитических и ограниченных в расширенной комплексной плоскости всюду, кроме множества e.

Теперь обсудим пространство U_A^∞ функций $f = \sum_{n\geqslant 0} \hat{f}(n)z^n$ на $\mathbb{T}$ таких, что

$$\|f\|_{U_A^\infty} = \sup_{n\geqslant 0} \Big\| \sum_{k\geqslant n} \hat{f}(k)z^k \Big\|_\infty < \infty .$$

Положим $R_n f = \sum_{k\geqslant n} \hat{f}(k)z^k$ и рассмотрим оператор $\mathcal{J}f = \{R_n f\}_{n\geqslant 0}$. Тогда $\mathcal{J}$ есть изоморфное вложение пространства U_A^∞ в $L^\infty(l^\infty;\mathbb{T})$ и, в силу теоремы Карлесона–Ханта, еще и пространства $H^p(\mathbb{T})$ в $L^p(l^\infty;\mathbb{T})$ при $1 < p < \infty$.

Предложение 4. *При* $1 < p < \infty$ *пара* $(\mathcal{J}(H^p), \mathcal{J}(U_A^\infty))$, *$K$-замкнута в* $(L^p(l^\infty;\mathbb{T}), L^\infty(l^\infty;\mathbb{T}))$.

Замечание. Разумеется, отсюда вытекают хорошие формулы для K-функционалов, а также соотношение

$$(H^p, U_A^\infty)_{\theta,s} = H^{q,s}, \quad \text{где } \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{p} \quad (1 < p < \infty).$$

Доказательство предложения 4. Хорошо известно (см. [V] и [RRT]), что с пространством U_A^∞ связан некий сингулярный интегральный оператор, действующий из пространства векторнозначных функций $L^p(l^1;\mathbb{T})$ в $L^p(\mathbb{T})$. Мы ограничимся тем, что покажем, как этот оператор возникает в рассматриваемой ситуации, предоставив согласование прочих деталей читателю. Снова перейдем к аннуляторам с помощью предложения 1. Здесь удобней использовать полуторалинейную (гильбертову) двойственность (так что оператор R_n становится самосопряженным). Аннулятор пространства $\mathcal{J}(H^p)$ — это подпространство $Y_{p'} \subset L^{p'}(l^1)$, состоящее из всех последовательностей $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$, для которых $\sum_{n\geqslant 0} R_n f_n = 0$. При $p' = 1$ то же условие определяет аннулятор Y_1 пространства $\mathcal{J}(U_A^\infty)$, $Y_1 \subset L^1(l^1)$. Далее, оператор

$$Q(\{f_n\}_{n\geqslant 0}) = \Big(f_0 - \sum_{n\geqslant 0} R_n f_n, f_1, f_2, \cdots\Big)$$

проектирует пространство $L^p(l^1)$ на Y_p ($p > 1$; отметим, что в сущности непрерывность этого оператора — двойственная форма теоремы Карлесона–Ханта).

Простое преобразование (впервые отмеченное в [V]) превращает Q в оператор, ядро которого удовлетворяет условию Хёрмандера по одной из переменных. Именно, ядро оператора R_n есть функция

$$K_n(z,\zeta)=\frac{z^n\bar{\zeta}^n}{1-z\bar{\zeta}}\,.$$

Преобразование $\{f_n(\zeta)\}_{n\geqslant 0}\mapsto\{\bar{\zeta}^n f_n(\zeta)\}_{n\geqslant 0}$ есть изометрия пространства $L^r(l^1)$ на себя при всех $r>0$. Эта изометрия превращает Q в проектор Q_1, заданный формулой

$$Q_1(\{g_n\}_{n\geqslant 0})=\Big(g_0-\sum_{n\geqslant 0}\int\frac{z^n}{1-z\bar{\zeta}}g_n(\zeta)dm(\zeta),g_1,g_2,\cdots\Big)\,.$$

С точностью до несущественных деталей мы интересуемся ядром оператора

$$\{g_n\}_{n\geqslant 0}\mapsto\sum_{n\geqslant 0}\int\frac{z^n}{1-z\bar{\zeta}}g_n(\zeta)dm(\zeta),$$

действующего из $L^p(l^1)$ в L^p. Это ядро — следующая l^∞-значная функция:

$$(z,\zeta)\mapsto\left\{\frac{z^n}{1-z\bar{\zeta}}\right\}_{n\geqslant 0}\,.$$

Условие Хёрмандера по ζ выглядит так:

$$\int_{\rho(z,\zeta_0)>2\rho(\zeta,\zeta_0)}\sup_n\left|z^n\Big(\frac{1}{1-z\bar{\zeta}}-\frac{1}{1-z\bar{\zeta}_0}\Big)\right|dm(z)\leqslant C,$$

и оказывается не чем иным, как хорошо известным условием Хёрмандера для ядра Коши. •

§3. Пространства $H^p(\mathbb{T}^2)$

Напомним, что $H^p(\mathbb{T}^2)$, $0 < p \leqslant \infty$, — это замкнутая линейная оболочка мономов $z_1^k z_2^l$, $k, l \geqslant 0$, в $L^p(\mathbb{T}^2)$ (при $p = \infty$ замыкание берется в $(*)$-слабой топологии).

Теорема 3. *При* $0 < p < \infty$ *пара* $(H^p(\mathbb{T}^2), H^\infty(\mathbb{T}^2))$ *K-замкнута в* $(L^p(\mathbb{T}^2), L^\infty(\mathbb{T}^2))$.

Доказательство. В статье [X1] доказано, что при $0 < p < r < \infty$ пара $(H^p(\mathbb{T}^2), H^r(\mathbb{T}^2))$ K-замкнута в $(L^p(\mathbb{T}^2), L^r(\mathbb{T}^2))$, так что ввиду теоремы 2 достаточно проверить K-замкнутость пары $(H^2(\mathbb{T}^2), H^\infty(\mathbb{T}^2))$ в $(L^2(\mathbb{T}^2), L^\infty(\mathbb{T}^2))$ (отметим, что после этого мы должны будем еще применить теорему Вольфа, чтобы проверить условия теоремы 2). Перейдем к двойственной задаче с помощью предложения 1. После умножения на $z_1 z_2$ двойственное утверждение примет следующий вид. Обозначим $Y_p = \{f \in L^p(\mathbb{T}^2) : \hat{f}(n,k) = 0 \text{ при } n, k < 0\}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Лемма 3. *Пара* (Y_1, Y_2) *K-замкнута в* $(L^1(\mathbb{T}^2), L^2(\mathbb{T}^2))$.

Доказательство. Пусть $Y_1 + Y_2 \ni f = g + h$, где $g \in L^1(\mathbb{T}^2)$, $h \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Перейдя к свертке с ядром Фейера, мы можем считать f, g и h тригонометрическими полиномами. Нам нужно заменить g и h функциями с примерно такими же нормами, но со спектром, лежащим в дополнении множества $\mathbb{Z}_- \times \mathbb{Z}_-$. Положим $a = \|g\|_1$, $b = \|h\|_2$.

Пусть $P_1 = \mathbb{P} \otimes I$ — проектор Рисса по первой переменной ($\mathbb{P}f = \sum_{n\geqslant 0} \hat{f}(n) z^n$ — одномерный проектор Рисса).

При каждом фиксированном ζ применим разложение Кальдерона–Зигмунда к функции $g(\cdot, \zeta)$ по уровню $\lambda = b^2 a^{-1}$. Получим

$$g = g_0 + g_1; \quad |g_0| \leqslant C b^2 a^{-1}; \quad \int_{\mathbb{T}} |g_0(\cdot,\zeta)|, \int_{\mathbb{T}} |g_1(\cdot,\zeta)| \leqslant C \int_{\mathbb{T}} |g(\cdot,\zeta)|;$$

кроме того, для некоторого множества $\Omega^\zeta \subset \mathbb{T}$ справедливы оценки

$$|\Omega^\zeta| \leqslant Cab^{-2} \int_{\mathbb{T}} |g(\cdot,\zeta)|; \qquad \int_{\mathbb{T}\setminus\Omega^\zeta} |(P_1 g_1)(\cdot,\zeta)| \leqslant C \int_{\mathbb{T}} |g_1(\cdot,\zeta)|.$$

Положив $\Omega = \{(\xi,\zeta) : \xi \in \Omega^\zeta, \zeta \in \mathbb{T}\}$ и проинтегрировав соответствующие неравенства по ζ, получим

$$\|g_0\|_1, \|g_1\|_1 \leqslant Ca, \quad |\Omega| \leqslant Ca^2b^{-2}, \quad \iint_{\mathbb{T}^2\setminus\Omega} |P_1g_1| \leqslant Ca$$

(разумеется, всерьез вопросов об измеримости здесь не возникает). Теперь запишем

$$u \stackrel{\text{def}}{=} (I-P_1)f = (I-P_1)g_1 + (I-P_1)(g_0+h) \tag{13}$$

и заметим, что, поскольку $f \in Y_1$, функция u *аналитична по второй переменной*. Положим

$$\alpha = \max\left(1, ab^{-2}|(I-P_1)g_1|\right) \quad \text{и} \quad \Phi = \exp(-\log\alpha - iH(\log\alpha)),$$

где H — оператор гармонического сопряжения по второй переменной. Тогда функция Φ, а с ней и Φu, аналитична по второй переменной. Введем функцию ψ, $\psi = \Phi u - (I-P_1)(g_0+h)$. Из (13) следует, что коэффициенты Фурье функций ψ и $(I-P_1)g_1$ с индексами из множества $\mathbb{Z}_-\times\mathbb{Z}_-$ одинаковы. Поэтому, написав

$$f = (g_1-\psi) + (g_0+h+\psi) \stackrel{\text{def}}{=} y_0 + y_1,$$

мы видим, что спектры функций y_0 и y_1 не пересекаются с множеством $\mathbb{Z}_-\times\mathbb{Z}_-$.

Мы утверждаем, что $\|y_0\|_1 \leqslant Ca$, $\|y_1\|_2 \leqslant Cb$ (т. е. y_0 и y_1 дают искомое разложение). Так как, разумеется,

$$\|g_0\|_2 \leqslant C\sqrt{(b^2a^{-1})a} = Cb,$$

то достаточно проверить неравенства $\|\psi\|_1 \leqslant Ca$ и $\|\psi\|_2 \leqslant Cb$. Из (13) получается, что

$$\psi = \Phi[(I-P_1)g_1] - (1-\Phi)[(I-P_1)(g_0+h)]. \tag{14}$$

Начнем с оценки L^2-нормы функции ψ. Поскольку $|\Phi| \leqslant 1$, L^2-норма второго слагаемого в правой части равенства (14) не превосходит $C\|g_0+h\|_2 \leqslant Cb$. Так как $|\Phi[(I-P_1)g_1]| = \min(b^2a^{-1}, |(I-P_1)g_1|)$ (в силу определения функции Φ), то

$$\rho(t) \stackrel{\text{def}}{=} |\{|\Phi[(I-P_1)g_1]| > t\}| \leqslant Cat^{-1}$$

при $t \leqslant b^2a^{-1}$, а в противном случае $\rho(t) = 0$. Следовательно,

$$\|\Phi[(I-P_1)g_1]\|_2^2 = 2\int_0^{b^2a^{-1}} t\rho(t)dt \leqslant Cb^2,$$

и неравенство $\|\psi\|_2 \leqslant Cb$ доказано.

Остается оценить L^1-норму функции ψ. Снова применив (14), найдем

$$\int |\psi| \leqslant \int_{\mathbb{T}^2\setminus\Omega} |(I-P_1)g_1| + Cb^2a^{-1}|\Omega| + \|1-\Phi\|_2\|g_0+h\|_2.$$

В силу оценок, связанных с разложением $g = g_0 + g_1$, первые два слагаемых в правой части имеют порядок a, так что

$$\int |\psi| \leqslant C(a + b\|1-\Phi\|_2).$$

Далее,

$$\|1-\Phi\|_2 \leqslant C(\|\log\alpha\|_2 + \|H(\log\alpha)\|_2) \leqslant C'\|\log\alpha\|_2.$$

Положив $E = \{|(I-P_1)g_1| \geqslant b^2a^{-1}\}$, видим, что $\log\alpha = 0$ на дополнении множества E. Для функции распределения $\sigma(t) = |\{t \in E : |\log\alpha| > t\}|$, очевидно, имеем

$$\sigma(t) \leqslant |\{t \in E : |(I-P_1)g_1| > b^2a^{-1}e^t\}| \leqslant C\frac{a^2}{b^2}e^{-t}.$$

Теперь

$$\|1-\Phi\|_2^2 \leqslant C\int_E (\log\alpha)^2 = 2C\int_0^\infty t\sigma(t)dt \leqslant C\frac{a^2}{b^2}\int_0^\infty te^{-t}dt,$$

и нужная оценка числа $\|\psi\|_1$ получается. •

§4. Частичные ретракции

Пусть (X_0, X_1) и (Y_0, Y_1) — две совместимые пары (квази)банаховых пространств. Пара (Y_0, Y_1) называется *частичным ретрактом* пары (X_0, X_1), если для всякого вектора $y \in Y_0 + Y_1$ найдутся два линейных непрерывных оператора $R: Y_0 + Y_1 \to X_0 + X_1$ и $T: X_0 + X_1 \to Y_0 + Y_1$ такие, что $TRy = y$, R действует одновременно из Y_0 в X_0 и из Y_1 в X_1, а T действует одновременно из X_0 в Y_0 и из X_1 в Y_1, причем нормы $\|R: Y_i \to X_i\|$ и $\|T: X_i \to Y_i\|$ $(i = 1, 2)$ ограничены сверху постоянной C, не зависящей от y. Нас будет главным образом интересовать случай, когда Y_i есть замкнутое подпространство в X_i $(i = 1, 2)$. Если при этом описанное выше свойство имеет место, причем роль оператора R играет естественное вложение суммы $Y_0 + Y_1$ в $X_0 + X_1$, мы говорим, что (Y_0, Y_1) — *ретрактная подпара* пары (X_0, X_1).

Очевидно, что если (Y_0, Y_1) — частичный ретракт пары (X_0, X_1), то интерполяционные задачи для первой пары сводятся к аналогичным задачам для второй. В частности, если (Y_0, Y_1) — ретрактная подпара пары (X_0, X_1), то для *всякого* интерполяционного функтора $\mathcal{F}$ имеем

$$\mathcal{F}(Y_0, Y_1) = \mathcal{F}(X_0, X_1) \cap (Y_0 + Y_1).$$

Вопрос о том, вытекает ли из K-замкнутости пары (Y_0, Y_1) в (X_0, X_1) то, что (Y_0, Y_1) — ретрактная подпара, представляется слишком смелым, чтобы можно было надеяться на положительный ответ. Тем не менее мы проделаем кое-что в положительном направлении. Рассмотрим произвольное пространство с мерой (S, μ) и два замкнутых подпространства $Y_r \subset L^r(\mu)$, $Y_\infty \subset L^\infty(\mu)$, где $0 < r < 1$ — фиксированное число; кроме того, предполагается, что пространство Y_∞ $(*)$-слабо замкнуто. Положим

$$Y_p = L^p(\mu) \cap (Y_r + Y_\infty) \quad \text{при } r < p < \infty.$$

Предположим, что пара (Y_r, Y_∞) K-замкнута в $(L_r(\mu), L_\infty(\mu))$. Возьмем какую-нибудь функцию $f \in Y_1 + Y_\infty$ такую, что $f\chi_{\{|f|>\lambda\}} \in L^1(\mu)$ при всех $\lambda > 0$. В силу K-замкнутости пары (Y_r, Y_∞), для каждого $n \in \mathbb{Z}$ мы можем написать $f = g_n + h_n$, где

$$g_n \in Y_\infty, \qquad |g_n| \leqslant C2^n$$

и

$$h_n \in L^r(\mu), \qquad \|h_n\|_r \leqslant C\Big(\int_{\{|f|>2^n\}} |f|^r d\mu\Big)^{1/r}.$$

Для функций $\varphi_n = g_{n+1} - g_n = h_n - h_{n+1}$ имеем $\varphi_n \in Y_\infty \cap Y_r$ и

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi_n; \tag{15}$$

$$|\varphi_n| \leqslant C2^n, \qquad \|\varphi_n\|_r \leqslant C\Big(\int_{\{|f|>2^n\}} |f|^r d\mu\Big)^{1/r}. \tag{16}$$

(Из (16) легко вывести, что ряд $\sum_{n<0}\varphi_n$ сходится в L^∞, а ряд $\sum_{n\geqslant 0}\varphi_n$ — в L^r, так что сумма ряда в (15) имеет смысл).

Теперь предположим, что φ_n — произвольная последовательность со свойствами (15) и (16) (т. е. не обязательно полученная вышеописанным способом). Обозначив $\Omega_n = \{|f| > 2^n\}$, введем оператор T с помощью формул

$$Tg = \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_n(g)\varphi_n, \quad \text{где } T_n(g) = \frac{1}{\int_{\Omega_n} |f|^r\,d\mu} \int\limits_{\Omega_n} g\overline{\operatorname{sgn}(f)}|f|^{r-1}\,d\mu.$$

Лемма 4. (а) *При условиях* (15) *и* (16) *оператор T оставляет на месте функцию f и отображает $L^p(\mu)$ в Y_p при всех p, $1 \leqslant p < \infty$, а норма $\|T\|_{L^p\to Y_p}$ зависит лишь от p и констант в неравенствах* (16).

(б) *Если, вдобавок,*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-n}|\varphi_n| \leqslant C \quad \text{п.в.}, \tag{17}$$

то T — ограниченный оператор из $L^\infty(\mu)$ в Y_∞.

Прежде чем переходить к доказательству, приведем некоторые приложения.

Следствие 1. *Предположим, что пара (Y_r, Y_∞) K-замкнута в $(L^r(\mu), L^\infty(\mu))$ (число r, $0 < r < 1$, фиксировано). Если мера μ конечна, то при всех p, $1 < p < \infty$, пара (Y_1, Y_p) — ретрактная подпара в $(L^1(\mu), L^p(\mu))$; следовательно, (Y_1, Y_p) — пара Кальдерона.*

Конечность меры μ обеспечивает включение $f\chi_{\{|f|>\lambda\}} \in L^1(\mu)$ для всех функций $f \in Y_1 + Y_\infty$.

В частности, шкала $\{H^p(\mathbb{T}^2)\}$ укладывается в схему следствия 1. Следовательно, $(H^1(\mathbb{T}^2), H^p(\mathbb{T}^2))$ — пара Кальдерона при любом p, $1 < p < \infty$.

О шкале $H^p(\mathbb{T})$ можно сказать больше: можно обеспечить условие (17). Таким образом, получается, что (H^1, H^∞) — ретрактная подпара пары (L^1, L^∞). Этот результат не нов. Он был установлен в [X2]; см. также [X3], где рассматривается более общий случай весовых H^p-пространств. Однако рассуждения в [X2–3] основаны на так называемом „аналитическом разбиении единицы" — довольно сложной технической процедуре. В [KX] та же процедура использовалась для изучения комплексной интерполяции весовых пространств Харди векторнозначных функций на окружности.

Мы утверждаем, что в большинстве случаев лемма 4(б) позволяет избежать этих неприятностей. Действительно, приведенное ниже доказательство леммы 4 недлинно и прозрачно. С другой стороны, неравенство (17) можно обеспечить с помощью *несложной* техники, развитой в [KX] для изучения K-замкнутости в шкале H^p.

Для простоты мы оставим в стороне весовые пространства Харди и покажем, как метод работает в простейшем случае.

Лемма 5. *Для всякой функции $f \in H^r$ $(r < 1)$ и всякого $\lambda > 0$ существует такое разложение $f = g + h$, что*

$$g \in H^\infty, \quad |g| \leqslant C\lambda \min\left(\frac{|f|}{\lambda}, \frac{\lambda}{|f|}\right); \qquad h \in H^r, \quad \int |h|^r \leqslant C \int_{|f|>\lambda} |f|^r .$$

Отложим ненадолго доказательство и покажем, как можно обеспечить условия (15)–(17). Для каждого n применим лемму 5 с $\lambda = 2^n$: $f = g_n + h_n$ и т. д. Как и прежде, положим

$$\varphi_n = g_{n+1} - g_n = h_n - h_{n+1} .$$

Тогда условия (15) и (16), разумеется, выполнены. Что касается условия (17), то, обозначив $e_k = \{2^k < |f| \leqslant 2^{k+1}\}$, найдем в силу леммы 5

$$\begin{aligned}\sum_n 2^{-n}|\varphi_n| &\leqslant C\sum_n 2^{-n}\Bigl(\sum_{k\leqslant n} 2^k\chi_{e_k} + 2^{2n}\sum_{k>n} 2^{-k}\chi_{e_k}\Bigr)\\ &= C\sum_k\sum_{n\geqslant k} 2^{-n}2^k\chi_{e_k} + C\sum_k\sum_{n<k} 2^n 2^{-k}\chi_{e_k}\\ &\leqslant C\sum_k \chi_{e_k} \leqslant C .\end{aligned}$$

Доказательство леммы 5. Ограничимся случаем $r > 1/2$, достаточным для приложений. Как уже отмечалось, мы повторяем одно рассуждение из работ [КХ] и [К] с незначительными изменениями. Определим

$$\alpha = \max\left(1, \left(\frac{|f|}{\lambda}\right)^{1/2}\right) \quad \text{и} \quad F = \frac{1}{\alpha + iH\alpha}$$

(H — оператор гармонического сопряжения). Положим $G = 1 - (1 - F^4)^2$ и проверим, что функции $g = Gf$ и $h = (1 - G)f$ образуют искомое разложение.

Действительно, g и h аналитичны (поскольку таковы f и G), и остается лишь проверить оценки. Ясно, что $|F| \leqslant \alpha^{-1}$, поэтому $|G| \leqslant C|F|^4 \leqslant C\alpha^{-4}$. Отсюда получается требуемая оценка для g. С другой стороны,

$$|1 - F| = \frac{|\alpha - 1 + iH(\alpha - 1)|}{|\alpha + iH(\alpha)|} \leqslant \frac{|\alpha - 1|}{\alpha} + \frac{|H(\alpha - 1)|}{\alpha}.$$

Замечая, что $\alpha = 1$ на множестве $\{|f| \leqslant \lambda\}$ и пользуясь ограниченностью оператора H в пространстве L^{2r}, получаем

$$\int |h|^r \leqslant C \int |f|^r |1 - F|^{2r} \leqslant C \int\limits_{|f|>\lambda} |f|^r + C\lambda^r \int |H(\alpha - 1)|^{2r}$$
$$\leqslant C \int\limits_{|f|>\lambda} |f|^r + C\lambda^r \int |\alpha - 1|^{2r} \leqslant C \int\limits_{|f|>\lambda} |f|^r.$$

Тем самым доказательство леммы 5 завершено. •

Доказательство леммы 4. Равенство $Tf = f$ ясно в любом случае. Мы начнем с более простого утверждения (б). Положим $e_k = \{2^k < |f| \leqslant 2^{k+1}\}$.

(i). Оператор T непрерывен из L^∞ в Y_∞. В силу $(*)$-слабой замкнутости пространства Y_∞, достаточно доказать, что

$$\sum_n |T_n(g)|\,|\varphi_n| \leqslant C\|g\|_\infty, \quad \forall\, g \in L^\infty.$$

Вспомнив, что $|f| > 2^n$ на Ω_n, получим

$$|T_n(g)| \leqslant \|g\|_\infty \frac{\int_{\Omega_n} |f|^r |f|^{-1}}{\int_{\Omega_n} |f|^r} \leqslant \|g\|_\infty 2^{-n}.$$

Значит, в силу (17)

$$\sum_n |T_n(g)|\,|\varphi_n| \leqslant \|g\|_\infty \sum_n 2^{-n}|\varphi_n| \leqslant C\|g\|_\infty.$$

(ii). Оператор T непрерывен из L^1 в Y_1. Здесь мы используем лишь (16) (а не (17)). Имеем

$$\begin{aligned}
\int |Tg| &\leqslant C\sum_n |T_n(g)|2^{(1-r)n}\int|\varphi_n|^r \\
&\leqslant C\sum_n |T_n(g)|2^{(1-r)n}\int_{\Omega_n}|f|^r \\
&\leqslant C\sum_n 2^{(1-r)n}\int_{\Omega_n}|g|\,|f|^{r-1} \\
&\leqslant C\sum_n 2^{(1-r)n}\sum_{k\geqslant n}2^{-(1-r)k}\int_{e_k}|g| \\
&= C\sum_k\sum_{n\leqslant k}2^{(1-r)n}2^{-(1-r)k}\int_{e_k}|g| \\
&\leqslant C\sum_k\int_{e_k}|g| = C\|g\|_1,
\end{aligned}$$

и все доказано.

Переходим к доказательству утверждения (а). L^1-непрерывность оператора T проверяется как выше. Мы покажем, что T непрерывен в L^p, если p — натуральное число (этого, конечно, хватит). Зафиксируем $g \in L^p$ (с натуральным p). Пусть $\alpha_n = \int_{\Omega_n}|f|^r$. Отметим, что $\alpha_n \approx \sum_{k\geqslant n}2^{rk}\mu(e_k)$. Пусть $q = p'$ — показатель, сопряженный с p. В силу неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned}
|T_n(g)| &\leqslant C\alpha_n^{-1}\sum_{k\geqslant n}2^{-(1-r)k}\mu(e_k)^{1/q}\left(\int_{e_k}|g|^p\right)^{1/p} \\
&\leqslant C\alpha_n^{-1/p}\left(\sum_{k\geqslant n}2^{-(p-r)k}a_k\right)^{1/p},
\end{aligned}$$

где $a_k = \int_{e_k} |g|^p$. Из (16) и того, что $\alpha_m \geqslant \alpha_n$ при $m \leqslant n$, получаем

$$\begin{aligned}
\int |Tg|^p &\leqslant p! \int \sum_{n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_p} \prod_{j=1}^{p} |T_{n_j} g| |\varphi_{n_j}| \\
&\leqslant C \sum_{n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_p} \prod_{j=1}^{p} |T_{n_j} g| \cdot \prod_{j=1}^{p-1} 2^{n_j} \cdot \int |\varphi_{n_p}| \\
&\leqslant C \sum_{n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_p} 2^{-rn_p} \prod_{j=1}^{p} 2^{n_j} \Bigl(\sum_{k \geqslant n_j} 2^{-(p-r)k} a_k \Bigr)^{1/p} \\
&\leqslant C \sum_k a_k = C \|g\|_p^p \quad \text{(см. лемму 6 ниже).}
\end{aligned}$$

Это и есть L^p-непрерывность оператора T. Поэтому остается убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 6. *Пусть* $0 < r < 1$, p *— натуральное число и* $a_k \geqslant 0$ $(k \in \mathbb{Z})$. *Положим*

$$\beta_n(r,p) = \Bigl(\sum_{k \geqslant n} 2^{-(p-r)k} a_k \Bigr)^{1/p}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$I_p \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_p} 2^{-rn_p} \prod_{j=1}^{p} 2^{n_j} \beta_{n_j}(r,p) \leqslant C \sum_k a_k .$$

Доказательство. Это ясно при $p = 1$ (ср. с (ii) в доказательстве леммы 4 выше). Пусть теперь $p \geqslant 2$. Предположим, что лемма 6 верна для $p - 1$ при всех r, $0 < r < 1$, и всех $a_k \geqslant 0$, и докажем ее для p.

В силу неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned}
I_p &= \sum_{n_p} 2^{(1-r/p)n_p} \beta_{n_p}(r,p) \cdot 2^{-r/q n_p} \sum_{n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_{p-1} \leqslant n_p} \prod_{j=1}^{p-1} 2^{n_j} \beta_{n_j}(r,p) \\
&\leqslant \Bigl[\sum_{n_p} 2^{(p-r)n_p} \beta_{n_p}(r,p)^p \Bigr]^{1/p} \\
&\quad \times \Bigl[\sum_{n_p} 2^{-rn_p} \Bigl(\sum_{n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_{p-1} \leqslant n_p} \prod_{j=1}^{p-1} 2^{n_j} \beta_{n_j}(r,p) \Bigr)^q \Bigr]^{1/q} \stackrel{\text{def}}{=} A \cdot B.
\end{aligned}$$

Число A легко оценить с помощью приема, использованного в случае $p = 1$:

$$A = \left[\sum_{n_p} 2^{(p-r)n_p} \sum_{k \geqslant n_p} 2^{-(p-r)k} a_k\right]^{1/p} \leqslant C\Big(\sum_k a_k\Big)^{1/p}.$$

Чтобы оценить B, выберем s так, чтобы $0 < s < 1$ и $ps < r/2$, и положим $t = 1 - s$. Тогда при фиксированном n_p получим (снова в силу неравенства Гёльдера)

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_{p-1} \leqslant n_p} \prod_{j=1}^{p-1} 2^{n_j} \beta_{n_j}(r,p)\Big)^q \\
&\quad \leqslant \Big(\sum_{n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_{p-1} \leqslant n_p} \prod_{j=1}^{p-1} 2^{psn_j}\Big)^{q/p} \cdot \Big(\sum_{n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_{p-1} \leqslant n_p} \prod_{j=1}^{p-1} 2^{qtn_j} \beta_{n_j}(r,p)^q\Big) \\
&\quad \leqslant C 2^{psn_p} \sum_{n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_{p-1} \leqslant n_p} \prod_{j=1}^{p} 2^{qtn_j} \beta_{n_j}(r,p)^q .
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
B^q &\leqslant C \sum_{n_p} 2^{-(r-ps)n_p} \sum_{n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_{p-1} \leqslant n_p} \prod_{j=1}^{p-1} 2^{qtn_j} \beta_{n_j}(r,p)^q \\
&\leqslant C \sum_{n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_{p-1}} 2^{-(r-ps)n_{p-1}} \prod_{j=1}^{p-1} 2^{qtn_j} \beta_{n_j}(r,p)^q .
\end{aligned}$$

Однако

$$\begin{aligned}
\beta_{n_j}(r,p)^q &= \Big(\sum_{k \geqslant n_j} 2^{-(p-r)k} a_k\Big)^{1/(p-1)} \\
&\leqslant 2^{-[(1-r/2)/(p-1)]n_j} \beta_{n_j}(r/2, p-1) .
\end{aligned}$$

Заметим, что, благодаря выбору числа s,

$$u = qt - \frac{1-r/2}{p-1} - 1 = \frac{1}{p-1}\Big(\frac{r}{2} - ps\Big) > 0;$$

поэтому при $n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_{p-1}$ имеем

$$2^{-(r-ps)n_{p-1}} \prod_{j=1}^{p-1} 2^{(u+1)n_j} \leqslant 2^{-(r/2)n_{p-1}} \prod_{j=1}^{p-1} 2^{n_j}.$$

Собирая вместе предыдущие оценки и используя индукционное предположение для $p-1$ (и с $r/2$ вместо r), найдем

$$\begin{aligned} B^q &\leqslant C \sum_{n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_{p-1}} 2^{-(r-ps)n_{p-1}} \prod_{j=1}^{p-1} 2^{(u+1)n_j} \beta_{n_j}(r/2, p-1) \\ &\leqslant C \sum_{n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_{p-1}} 2^{-(r/2)n_{p-1}} \prod_{j=1}^{p-1} 2^{n_j} \beta_{n_j}(r/2, p-1) \\ &\leqslant C \sum_k a_k. \end{aligned}$$

Вместе с оценкой числа A это доказывает лемму 6. •

Пусть (S, μ) — пространство однородного типа (как в §1). Обозначим через $H^1_{\mathrm{at}}(S)$ соответствующее атомическое пространство Харди. Идею доказательства леммы 4 можно применить к доказательству следующего результата.

Предложение 5. *При* $1 < p < \infty$ *пара* $(H^1_{\mathrm{at}}(S), L^p(S))$ *— частичный ретракт пары* $(L^1(S), L^p(S))$.

Доказательство. Как показано в [MS1], на S можно ввести эквивалентную квазиметрику d так, чтобы пространство (S, d, μ) стало нормальным пространством, однородным порядка α в смысле работы [MS1]. Считаем, что S изначально наделено именно такой квазиметрикой. Пусть $0 < \beta < \alpha$. Обозначим через Lip_β пространство функций на (S, d), удовлетворяющих условию Липшица порядка β. Для $x \in S$ через $\mathrm{Lip}_\beta(x)$ обозначим подкласс класса Lip_β, состоящий из всех функций ψ таких, что при некотором $r > \mu(\{x\})$

$$\operatorname{supp} \psi \subset B(x, r), \qquad \|\psi\|_\infty \leqslant r^{-1} \quad \text{и} \quad \|\psi\|_{\mathrm{Lip}_\beta} \leqslant r^{-1-\beta}.$$

Для $f \in L^1(S)$ определим *большую максимальную функцию* f^* следующим образом:

$$f^*(x) = \sup \left\{ \left| \int_S f \psi \, d\mu \right| : \psi \in \mathrm{Lip}_\beta(x) \right\}.$$

В [MS2] доказано, что $f \in H^1_{\mathrm{at}}(S)$ тогда и только тогда, когда $f^* \in L^1(S)$, с эквивалентностью норм.

Теперь зафиксируем $f \in H^1_{\mathrm{at}}(S) + L^p(S)$ и построим операторы R и T, обладающие свойствами из определения частичной ретракции. Поскольку оператор $g \mapsto g^*$ — положительный и сублинейный, из обобщенной теоремы Хана–Банаха вытекает существование такого линейного оператора R, что

$$Rf = f^* \quad \text{и} \quad |Rg| \leqslant g^* \text{ п.в., } \forall\, g \in H^1_{\mathrm{at}}(S) + L^p(S);$$

поэтому R отображает $H^1_{\mathrm{at}}(S)$ в $L^1(S)$ и $L^p(S)$ в себя, причем

$$\|R\|_{H^1_{\mathrm{at}}(S)\to L^1(S)} \leqslant C, \qquad \|R\|_{L^p(S)\to L^p(S)} \leqslant C\,.$$

Чтобы построить T, воспользуемся атомным разложением. Пусть $\Omega_n = \{f^* > 2^n\}$. Из результатов работы [MS2] вытекает существование шаров $\{B_{n,j}\}_{j\geqslant 0}$ и функций $a_{n,j}$ на S со следующими свойствами.

(i) $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j\geqslant 0} a_{n,j}$;

(ii) $\operatorname{supp} a_{n,j} \subset B_{n,j}$, $\int a_{n,j} = 0$ и $|a_{n,j}| \leqslant C2^n$;

(iii) $\Omega_n \subset \cup_{j\geqslant 0} B_{n,j}$ и $\sum_{j\geqslant 0} \mu(B_{n,j}) \leqslant C\mu(\Omega_n)$;

(iv) $\sum_{j\geqslant 0} \chi_{B_{n,j}} \leqslant C$.

Из (ii) получаем, что $\big(C2^n\mu(B_{n,j})\big)^{-1} a_{n,j}$ есть атом. Поэтому

$$\|a_{n,j}\|_{H^1_{\mathrm{at}}(S)} \leqslant C2^n\mu(B_{n,j}).$$

Пусть $\varphi_n = \sum_j a_{n,j}$. Тогда

$$|\varphi_n| \leqslant C2^n \quad \text{и} \quad \|\varphi_n\|_{H^1_{\mathrm{at}(S)}} \leqslant C2^n\mu(\Omega_n) \leqslant C2^{n/2} \int\limits_{\Omega_n} (f^*)^{1/2}\,.$$

Определим оператор T как перед леммой 4:

$$Tg = \sum_n T_n(g)\varphi_n, \quad \text{где } T_n(g) = \frac{1}{\int_{\Omega_n} (f^*)^{1/2}} \int\limits_{\Omega_n} g\,(f^*)^{-1/2}\,.$$

Ясно, что $T(f^*) = f$. Так же, как и в лемме 4 (с $r = 1/2$), проверяем, что T — ограниченный оператор из $L^1(S)$ в $H^1_{\mathrm{at}}(S)$ и из $L^p(S)$ в себя. Мы опускаем детали. •

В частности, предложение 1 применимо к поверхности шара B_n пространства $\mathbb{C}^n$. Напомним, что ортогональная проекция пространства $L^2(\partial B_n)$ на $H^2(B_n)$ ограниченно действует из $H^1_{\mathrm{at}}(\partial B_n)$ на $H^1(B_n)$ и из $L^p(\partial B_n)$ на $H^p(B_n)$ при $1 < p < \infty$. Отсюда вытекает такое утверждение.

Следствие 2. *При любом p, $1 < p < \infty$, пара $(H^1(B_n), H^p(B_n))$ — частичный ретракт пары $(L^1(\partial B_n), L^p(\partial B_n))$; поэтому $(H^1(B_n), H^p(B_n))$ — пара Кальдерона.*

Замечание. В [X4] получен результат о пространствах Харди ограниченных мартингалов, из которого следует, что при $S = \mathbb{R}^n$ или $S = \partial B_n$ пара $(H^1_{\mathrm{at}}(S), L^\infty(S))$ — частичный ретракт пары $(L^1(S), L^\infty(S))$ (разумеется, случай $S = \partial B_n$ дает приведенное выше следствие 2). Мы не знаем, верно ли то же самое для произвольного S, т. е. сохраняется ли предложение 5 в (наиболее интересном) случае $p = \infty$.

Список литературы

[B] Bourgain J., *Some consequences of Pisier's approach to interpolation*, Israel J. Math. **77** (1992), 165–185.

[BL] Bergh J., Löfström J., *Interpolation spaces*, Grundlehren Math. Wiss., **223**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976; Русск. пер., Мир, М., 1980.

[BK] Brudnyĭ Yu. A., Kruglyak N. Ya., *Interpolation functors and interpolation spaces*, I, North-Holland Math. Library, **47**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1991.

[CW1] Coifman R. R., Weiss G., *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, Lecture Notes in Math., **242**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1971.

[CW2] Coifman R., Weiss G., *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), 569–645.

[J] Jones P. W., *L^∞ estimates of the $\bar\partial$ problem in a half-plane*, Acta Math. **150** (1983), 137–152.

[K] Kislyakov S. V., *Real interpolation of Hardy spaces on the disc and on the bidisc*, Functional Analysis (Essen, 1991), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **150**, Marcel Dekker, New York, 1994, pp. 217–226.

[KX] Kislyakov S. V., Xu Q., *Interpolation of weighted and vector-valued Hardy spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **343** (1994), no. 1, 1–34.

[MS1] Macias R., Segovia C., *Lipschitz functions on spaces of homogeneous type*, Adv. in Math. **33** (1979), 257–270.

[MS2] Macias R., Segovia C., *A decomposition into atoms of distributions on spaces of homogeneous type*, Adv. in Math. **33** (1979), 271–309.

[P] Pisier G., *Interpolation between H^p spaces and non-commutative generalizations.* I, Pacific J. Math. **155** (1992), no. 2, 341–368.

[RRT] Rubio de Francia J., Ruiz Blasco F. J., Torrea Hermández J. L., *Calderón-Zygmund theory for operator-valued kernels*, Adv. in Math. **62** (1986), 7–48.

[ST] Strömberg J.-O., Torchinsky A., *Weighted Hardy spaces*, Lecture Notes in Math., **1381**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1989.

[V] Виноградов С. А., *Усиление теоремы Колмогорова о сопряженной функции и интерполяционные свойства равномерно сходящихся степенных рядов*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **155** (1981), 7–41.

[W] Wolff T., *A note on interpolation spaces*, Harmonic Analysis (Minneapolis, 1981), Lecture Notes in Math., **908**, Springer, Berlin–New York, 1982, pp. 199–204.

[X1] Xu Q., *Some properties of the quotient space* $L^1(\mathbb{T}^d)/H^1(\mathbb{D}^d)$, Illinois J. Math. **37** (1993), no. 3, 437–454.

[X2] Xu Q., *Notes on interpolation of Hardy spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **42** (1992), 875–889; Erratum, ibid. **43** (1993), 569.

[X3] Xu Q., *New results on interpolation between Hardy spaces*, Congress on Banach Spaces (Wuhan Univ., 1994) (в печати).

[X4] Xu Q., *Brownian martingales and new results on interpolation of Hardy spaces* (в печати).

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН
191011, С.-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27
E-mail: skis@pdmi.ras.ru

Поступило 26 декабря 1995 г.

Université Paris 6
Equipe d'Analyse
46-0; 4-ième Etage
4, Place Jussieu
75252 Paris Cedex 05, France
E-mail: qx@moka.ccr.jussieu.fr