

УДК 517.9

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Ю. А. Крутова

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
julia_74rus@mail.ru

Найдена равномерная асимптотика решения начальной задачи для уравнения $\varepsilon u' = x^2 - u^2 + \varepsilon f(x)$, сингулярно зависящего от малого параметра ε . Уравнения такого вида являются уже хорошо изученными, но данное уравнение представляет собой неисследованный случай поведения. Методом согласования построено трёхмасштабное асимптотическое разложение решения, проведено его обоснование методом верхнего и нижнего решений.

Ключевые слова: асимптотическое разложение, малый параметр, начальная задача, метод согласования, промежуточное разложение.

Введение

В 1948 г. академиком А. Н. Тихоновым в работе [1] была впервые рассмотрена сингулярная задача вида

$$\begin{cases} \varepsilon u' = f(x, u, \varepsilon), \\ u(0) = A, \end{cases}$$

для которой изучено поведение решения $u(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В области определения на функцию $f(x, u, \varepsilon)$ налагалось ограничение $\frac{\partial f}{\partial u}(x, u, 0) \neq 0$, т. е. $f \sim C \cdot u$ при $x \rightarrow 0$. Случай, когда $f = O(1)$ при $x \rightarrow 0$, является тривиальным.

Позднее академик А. М. Ильин методом согласования [2] рассмотрел более сложный случай [3, гл. 8] с уравнением вида $\varepsilon u' = f(x, u, \varepsilon)$, где $f \sim x - u^2$ при $x \rightarrow 0$. Начиная с этого случая в структуре асимптотического разложения появляется промежуточный слой между внешним и внутренним асимптотическими разложениями. Отметим, что в случае, когда $f \sim x + u^2$ при $x \rightarrow 0$, происходит так называемый «дифференциальный взрыв» и область существования непродолжаемого решения сокращается до размеров порядка ε .

В работе М. И. Русановой [4] построена формальная асимптотика решения задачи Коши в вырожденном случае для уравнения вида $\varepsilon u' = -u^2 + \varepsilon f(x)$. О. Ю. Хачай в работе [5] изучил асимптотику решения начальной задачи Коши с уравнением $\varepsilon u' = f(x, u)$, где $f(x, u) \sim x - u^k$, $k > 2$ — произвольное натуральное число.

А. М. Ильин и С. Ф. Долбеева [6] исследовали поведение решения задачи Коши в случае, когда ветви многозначной функции, являющейся решением предельного уравнения, пересекаются. На самом деле правая часть $f(x, u, \varepsilon)$ в данной работе также имеет много нулевых производных в нуле, например, функция вида $f(x, u, \varepsilon) = (x - u)^2(x - 2u)^2$.

В настоящей работе будет рассмотрен неисследованный ранее случай, когда $f(x, u, \varepsilon) \sim x^2 - u^2$ при $x \rightarrow 0$. Для упрощения вычислений мы будем исследовать

начальную задачу Коши в следующей формулировке:

$$\begin{cases} \varepsilon u' = x^2 - u^2 + \varepsilon f(x), \\ u(0, \varepsilon) = 1, \end{cases} \quad (1)$$

где $f(x) > 0$ при $x \geq 0$, $f(0) = 1$, $f \in C^\infty[0, +\infty)$. Из устойчивости по Ляпунову следует существование непрерывного решения рассматриваемой задачи на $[0, +\infty)$. Построенное асимптотическое разложение будет иметь ту же структуру асимптотики, что и в случае более общей правой части $f(x, u, \varepsilon)$, имеющей заданное поведение вблизи нуля, однако здесь асимптотические коэффициенты будут построены в явном виде в отличие от предыдущих работ, кроме работы [4].

1. Внешнее разложение

Будем строить асимптотическое разложение решения в виде формального ряда U по степеням малого параметра ε : $U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x)$. Подставляя этот ряд в наше уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : 0 &= x^2 - u_0^2, \\ \varepsilon^1 : u_0' &= -2u_0 u_1 + f(x), \\ \varepsilon^2 : u_1' &= -2u_0 u_2 - u_1^2, \\ &\dots \\ \varepsilon^k : u_{k-1}' &= -2u_0 u_k - \sum_{j=1}^{k-1} u_j u_{k-j}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Из первого уравнения следует, что $u_0 = \pm x$, выберем $u_0 = x$. (На самом деле наш выбор определяется здесь знаком начального значения $u(0, \varepsilon)$). Из остальных уравнений легко последовательно найти все асимптотические коэффициенты. Например,

$$u_1(x) = \frac{f(x) - 1}{2x}, \quad u_2(x) = \frac{4f(x) - f^2(x) - 2xf'(x) - 3}{8x^3} \quad \text{и т. д.}$$

По индукции нетрудно показать, что $u_k \sim x^{1-2k}$ при $x \rightarrow 0$ либо некоторые u_k имеют меньшие особенности при $x \rightarrow 0$ (например, при $f(0) = 1$ или при $4f(0) - f^2(0) - 2xf'(0) = 3$). Тем не менее очевидно, что начальное условие $u(0, \varepsilon) = 1$ не выполняется даже асимптотически, поэтому вблизи точки $x = 0$ требуется дополнительное внутреннее асимптотическое разложение. Кроме того, поскольку коэффициенты внешнего разложения в общем случае имеют особенности порядка $u_k \sim x^{1-2k}$, то при $x < O(\varepsilon^{1/2})$ ряд U может перестать быть асимптотическим вследствие нарушения условия $\varepsilon^k u_k = o(\varepsilon^{k-1} u_{k-1})$.

2. Внутреннее разложение

Для построения внутреннего разложения введём «внутреннюю» переменную $\xi = x/\varepsilon$. Обозначим $v(\xi, \varepsilon) = u(\varepsilon\xi, \varepsilon)$. В результате такой замены мы получим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\xi} = \varepsilon^2 \xi^2 - v^2 + \varepsilon f(\varepsilon\xi), \\ v(0, \varepsilon) = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Внутреннее разложение будем искать в виде формального ряда $V = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j v_j(\xi)$. Для нахождения его коэффициентов подставим его в уравнение (2) и приравняем члены

при одинаковых степенях ε , предварительно разложив в ряд Тейлора функцию

$$f(\varepsilon\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \xi^k.$$

При подстановке V в начальное условие имеем $v_0(0) + \varepsilon v_1(0) + \varepsilon^2 v_2(0) + \dots = 1$. Отсюда получаем следующие начальные условия: $v_0(0) = 1$, $v_1(0) = 0$, $v_2(0) = 0 \dots$. Таким образом, коэффициенты внутреннего асимптотического разложения могут определяться из следующих начальных задач:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : & \begin{cases} v'_0 = -v_0^2, \\ v_0(0) = 1, \end{cases} \\ \varepsilon^1 : & \begin{cases} v'_1 = -2v_0v_1 + f(0), \\ v_1(0) = 0, \end{cases} \\ \varepsilon^2 : & \begin{cases} v'_2 = \xi^2 - 2v_0v_2 - v_1^2 + f'(0)\xi, \\ v_2(0) = 0, \end{cases} \\ & \dots \\ \varepsilon^k : & \begin{cases} v'_k = -2v_0v_k - \sum_{j=1}^{k-1} v_jv_{k-j} + \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} \xi^{k-1}, \\ v_k(0) = 0, \end{cases} \\ & \dots \end{aligned}$$

Отсюда можно последовательно найти

$$v_0(\xi) = \frac{1}{\xi+1}, \quad v_1(\xi) = \frac{f(0)}{3} \left(\xi + 1 - \frac{1}{(\xi+1)^2} \right),$$

$$\begin{aligned} v_2(\xi) = & \left(-\frac{1}{45}f^2(0) + \frac{1}{5} \right) \xi^3 + \left(-\frac{1}{15}f^2(0) + \frac{f'(0)}{4} + \frac{1}{10} \right) \xi^2 + \left(-\frac{1}{15}f^2(0) + \frac{f'(0)}{6} - \frac{1}{15} \right) \xi + \\ & + \frac{4}{45}f(0) - \frac{f'(0)}{12} + \frac{1}{30} + \left(-\frac{f^2(0)}{5} + \frac{f'(0)}{12} - \frac{1}{30} \right) \frac{1}{(\xi+1)^2} + \frac{1}{9} \frac{f^2(0)}{(\xi+1)^3} \end{aligned}$$

и другие асимптотические коэффициенты внутреннего разложения.

Отметим, что коэффициенты внутреннего разложения $v_k(\xi) \sim \xi^{2k-1}$ при $\xi \rightarrow +\infty$, поэтому при $\xi > O(\varepsilon^{-1/2})$ или $x > O(\varepsilon^{1/2})$ ряд V может перестать быть асимптотическим.

Таким образом, при $x = O(\varepsilon^{1/2})$ и внешнее, и внутреннее разложение в общем случае являются заведомо неверными. Для устранения этой проблемы мы построим промежуточное асимптотическое разложение.

3. Промежуточное разложение

Введём новую переменную $\eta = \varepsilon^{-1/2}x$ и функцию $w(\eta, \varepsilon) = u(\varepsilon^{1/2}x, \varepsilon)$. После такой замены получим следующее уравнение на функцию w :

$$\varepsilon^{1/2} \frac{dw}{d\eta} = \varepsilon \eta^2 - w^2 + \varepsilon f(\varepsilon^{1/2}\eta). \quad (3)$$

Будем искать промежуточное асимптотическое разложение в виде формального ряда $W = \varepsilon^{1/2} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} w_j(\eta)$. Также разложим в ряд Тейлора функцию $f(\varepsilon^{1/2}\eta) =$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \eta^k. \text{ Подставим данные ряды в уравнение (3):}$$

$$\varepsilon^{1/2} (\varepsilon^{1/2} w'_0 + \varepsilon w'_1 + \dots) = \varepsilon \eta^2 - (\varepsilon^{1/2} w_0 + \varepsilon w_1 + \dots)^2 + \varepsilon f(0) + \varepsilon^{3/2} f'(0) \eta + \dots,$$

а затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . Получим следующие уравнения.

Во-первых, $\varepsilon^1 : w'_0 = \eta^2 - w^2 + f(0)$. Данное уравнение относится к разрешимым уравнениям Риккати и имеет явное решение в специальных функциях. Однако, поскольку для упрощения вычислений мы положили $f(0) = 1$, то его общее решение ещё больше упрощается и имеет следующий вид:

$$w_0(\eta) = \eta \text{ или } w_0(\eta) = \eta - \frac{e^{-\eta^2}}{C_0 - \int_0^\eta e^{-t^2} dt},$$

где C_0 — произвольная постоянная.

Второе уравнение — при $\varepsilon^{3/2} : w'_1 = -2w_0w_1 + f'(0)\eta$. Это уже линейное уравнение, имеющее решение

$$w_1(\eta) = \frac{\left(f'(0)\left(\frac{1}{2}e^{\eta^2}\operatorname{erf}^2(\eta) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta\operatorname{erf}(\eta) - \frac{2}{\pi}e^{-\eta^2}\right) + C_1\right)e^{-\eta^2}}{\operatorname{erf}^2(\eta)} \text{ при } C_0 = 0$$

$$\text{и } w_1(\eta) = \left(C_1 + \int_0^\eta e^{2\int_0^t w_0(\tau)d\tau} f'(0)t dt\right) e^{-2\int_0^\eta w_0(\tau)d\tau} \text{ при } C_0 \neq 0,$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Далее при $\varepsilon^2 : w'_2 = -2w_0w_2 - w_1^2 + \frac{f''(0)}{2}\eta^2$. Его решением является функция

$$w_2(\eta) = \frac{1}{\operatorname{erf}^2(\eta)} \left(\int_0^\eta \frac{1}{\operatorname{erf}^2(t)} \left(-f'^2(0) \left(\int_0^t \tau e^{\tau^2} \operatorname{erf}^2(\tau) d\tau \right)^2 e^{-t^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2f'(0) \int_0^t \tau e^{\tau^2} \operatorname{erf}^2(\tau) d\tau \cdot C_1 e^{-t^2} - C_1^2 e^{-t^2} + \frac{1}{2} e^{t^2} \operatorname{erf}^4(t) f''(0) t^2 \right) dt + C_2 \right) e^{-\eta^2} \text{ при } C_0 = 0$$

$$\text{и } w_2(\eta) = \left(C_2 + \int_0^\eta e^{2\int_0^t w_0(\tau)d\tau} \left(\frac{f''(0)}{2} t^2 - w_1^2(t) \right) dt \right) e^{-2\int_0^\eta w_0(\tau)d\tau} \text{ при } C_0 \neq 0.$$

...

$$\varepsilon^{(k+1)/2} : w'_k = -2w_0w_k - \sum_{j=1}^{k-1} w_j w_{k-j} + \eta^k \cdot \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

...

Как будет показано далее, $C_0 = 0$, тогда $w_k \sim \eta^{-1-k}$ при $\eta \rightarrow 0$. Поэтому зона действия ряда W не может быть больше, чем $\varepsilon \ll x \ll 1$. Отметим ещё, что при решении этих уравнений на каждом шаге появляется новая неопределённая постоянная, которую можно определить из условия согласования асимптотических рядов, что мы и сделаем.

4. Согласование

В соответствии с условиями согласования для любых l, m, n должны быть выполнены равенства $A_{l,\xi} A_{m,\eta} W = A_{m,\eta} A_{l,\xi} V$, $A_{m,\eta} A_{n,x} U = A_{n,x} A_{m,\eta} W$, где через $A_{n,x}$

обозначается оператор взятия частичной суммы ряда, записанной от переменной x и содержащей степени ε с показателем до n включительно.

Для определения постоянных C_k достаточно провести согласование только рядов V и W . Следить за согласованием асимптотических рядов удобно, используя специальную таблицу согласования (табл. 1).

Таблица 1

Таблица согласования V и W

$W \setminus V$	$v_0(\xi)$	$\varepsilon v_1(\xi)$	—	$\varepsilon^2 v_2(\xi)$...
$\varepsilon^{1/2} w_0(\eta)$	ξ^{-1}	$\varepsilon \xi / 3$	0	$\varepsilon^2 \frac{8}{45} \xi^3$...
	$\varepsilon^{1/2} \eta^{-1}$	$\varepsilon^{1/2} \eta / 3$	0	$\varepsilon^{1/2} \frac{8}{45} \eta^3$...
$\varepsilon w_1(\eta)$	$-\xi^{-2}$	$\varepsilon / 3$	0	$\varepsilon^2 \left(\frac{1}{30} + \frac{f'(0)}{4} \right) \xi^2$...
	$\varepsilon \frac{C_1 \pi}{4} \eta^{-2}$	$-\varepsilon \frac{C_1 \pi}{12}$	0	$\varepsilon \left(-\frac{2C_1 \pi}{15} + \frac{C_1 \pi}{8} + \frac{f'(0)}{4} \right) \eta^2$...
$\varepsilon^{3/2} w_2(\eta)$	ξ^{-3}	0	0	$\varepsilon^2 \left(\frac{f'(0)}{6} - \frac{2}{15} \right) \xi$...
	$\varepsilon^{3/2} \eta^{-3}$	$\varepsilon^{3/2} \frac{C_2 \pi}{4} \eta^{-2}$	$-\varepsilon^{3/2} \frac{C_2 \pi}{12}$	$\varepsilon^{3/2} \left(\frac{f'(0)}{6} - \frac{2}{15} \right) \eta$...
...

Таблица устроена стандартным образом [2, гл. 5]. В верхних и нижних частях клеток стоят равные функции с учётом замены переменных $\xi = \varepsilon^{1/2} \eta$. В столбцы этой таблицы записаны разложения коэффициентов внутреннего разложения $v_i(\xi)$ при $\xi \rightarrow +\infty$, а строки — разложения коэффициентов промежуточного разложения $w_j(\eta)$ при $\eta \rightarrow 0$. Таким образом определяются $C_0 = 0$, $C_1 = \frac{4}{\pi}$, $C_2 = 0$ и т. д. На этом построение формального асимптотического разложения закончено.

Отметим ещё, что ряды W и U также являются согласованными и для них можно построить свою таблицу согласования (табл. 2).

Таблица 2

Таблица согласования U и W

$U \setminus W$	$\varepsilon^{1/2} w_0(\eta)$	$\varepsilon w_1(\eta)$	$\varepsilon^{3/2} w_2(\eta)$...
$u_0(x)$	$\varepsilon^{1/2} \eta$	0	0	...
	x	0	0	...
$\varepsilon u_1(x)$	0	$\varepsilon \frac{f'(0)}{2}$	$\varepsilon^{3/2} \eta \frac{f''(0)}{4}$...
	0	$\varepsilon \frac{f'(0)}{2}$	$\varepsilon x \frac{f''(0)}{4}$...
$\varepsilon u_2(x)$	0	0	$-\frac{f'^2(0) + f''(0)}{8\eta} \varepsilon^{3/2}$...
	0	0	$-\frac{f'^2(0) + f''(0)}{8\eta} \varepsilon^{3/2}$...
...

В столбцы табл. 2 записаны разложения

$$w_0(\eta) = \eta + O(e^{-\eta^2}), \quad \eta \rightarrow +\infty, \quad w_1(\eta) = \frac{f'(0)}{2} + O(e^{-\eta^2}), \quad \eta \rightarrow +\infty \text{ и т. д.,}$$

а строки — разложения

$$u_0(x) = x, \quad u_1(x) = \frac{f'(0)}{2} + \frac{f''(0)}{4} x + \frac{f'''(0)}{12} x^2 + O(x^3), \quad x \rightarrow 0 \text{ и т. д.}$$

5. Обоснование

Воспользуемся методом «нижнего и верхнего решений», описанным, например, в [7]. Обоснование проведём только для двух членов асимптотики, для большего числа его можно провести аналогично. Рассмотрим произвольную начальную задачу

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) = 0, & x \in I = (x_0, x_1), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (4)$$

где $f \in C(I)$, и введём два определения.

Определение 1. Функцию \underline{Y} , имеющую свойства:

- 1) $\underline{Y}(0) \leq y_0$,
- 2) $\frac{d\underline{Y}}{dx} - f(x, \underline{Y}) \leq 0$ при $x \in I$, —

назовём *нижним решением начальной задачи* (4).

Определение 2. Функцию \overline{Y} , имеющую свойства:

- 1) $\overline{Y}(0) \geq y_0$,
- 2) $\frac{d\overline{Y}}{dx} - f(x, \overline{Y}) \geq 0$ при $x \in I$, —

назовём *верхним решением начальной задачи* (4).

Как известно [8, гл. IV, § 1], из существования нижнего и верхнего решений следует существование единственного решения $y(x)$ задачи (4), удовлетворяющего неравенству

$$\underline{Y}(x) \leq y(x) \leq \overline{Y}(x) \text{ при } x \in I.$$

Пусть функция $u(x, \varepsilon) \equiv v(\xi, \varepsilon) \equiv \varepsilon^{1/2}w(\eta, \varepsilon)$ является точным решением задачи (1). Обозначим через $V_2 = v_0(\xi) + \varepsilon v_1(\xi)$. В качестве нижнего решения задачи (2) возьмём $\underline{V} = V_2 - A\varepsilon^{5/4}$. Тогда

1) $\underline{V}(0, \varepsilon) = v_0(0) + \varepsilon v_1(0) - A\varepsilon^{5/4} = 1 - A\varepsilon^{5/4} \leq 1 = v(0, \varepsilon)$, где $v(\xi, \varepsilon)$ — точное решение задачи (2);

$$2) \frac{d\underline{V}}{d\xi} - \varepsilon^2 \xi^2 - \underline{V}^2 + \varepsilon f(\varepsilon, \xi) = -\frac{8}{9}\varepsilon^2 \xi^2 + \bar{o}(\varepsilon^2 \xi^2) - 2A\xi^{-1}\varepsilon^{5/4} + \bar{o}(A\xi^{-1}\varepsilon^{5/4}).$$

Следовательно, при достаточно большом A на отрезке $\xi \in [0, \varepsilon^{-1/4}]$ функция \underline{V} действительно является нижним решением задачи (2).

В качестве верхнего решения возьмём функцию $\overline{V} = V_2 + A\varepsilon^{5/4}$. Аналогично, при достаточно большом A на отрезке $\xi \in [0, \varepsilon^{-1/4}]$ функция \overline{V} действительно является верхним решением задачи (2).

Таким образом, мы доказали, что $|v(\xi, \varepsilon) - V_2| = O(\varepsilon^{5/4})$ при $\xi \in [0, \varepsilon^{-1/4}]$.

Обозначим через $W_3 = \varepsilon^{1/2}w_0(\eta) + \varepsilon w_1(\eta) + \varepsilon^{3/2}w_2(\eta)$. В качестве нижнего решения возьмём функцию $\underline{W} = W_3 - B \cdot \varepsilon^{5/4}$. Тогда при достаточно большом B :

$$\begin{aligned} 1) \underline{W}(\varepsilon^{1/4}, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2}w_0(\varepsilon^{1/4}) + \varepsilon w_1(\varepsilon^{1/4}) + \varepsilon^{3/2}w_2(\varepsilon^{1/4}) - B \cdot \varepsilon^{5/4} = \\ &= \varepsilon^{1/2} \cdot \left(\varepsilon^{-1/4} + \frac{1}{3}\varepsilon^{1/4} \right) + \varepsilon \cdot \left(\varepsilon^{-1/2} - \frac{1}{3} \right) + \varepsilon^{3/2} \cdot \varepsilon^{-3/4} + O(\varepsilon^{5/4}) - B\varepsilon^{5/4} \leq \\ &\leq \underline{W}|_{\xi=\varepsilon^{-1/4}} \leq w(\varepsilon^{1/4}, \varepsilon); \end{aligned}$$

$$2) \varepsilon^{1/2} \frac{d\underline{W}}{d\eta} - \varepsilon \eta^2 + \underline{W}^2 - \varepsilon f(\varepsilon^{1/2}\eta) = O(\eta^3 \varepsilon^{5/2}) - 2B\eta \varepsilon^{7/4} \leq 0.$$

Поэтому функция \underline{W} при $\eta \in [\varepsilon^{1/4}, \varepsilon^{-1/4}]$ является нижним решением задачи (1) с учётом замены переменных.

Аналогично при достаточно большом B функция $\overline{W} = W_3 + B\varepsilon^{5/4}$ является верхним решением задачи (1) при $\eta \in [\varepsilon^{1/4}, \varepsilon^{-1/4}]$.

На оставшемся участке $x \in [\varepsilon^{1/4}, +\infty)$ в качестве нижнего решения возьмём $\underline{U} = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) - C \cdot \varepsilon^{5/4}$. Тогда при достаточно большом C :

$$\begin{aligned}
 & 1) \underline{U}|_{x=\varepsilon^{1/4}} = u_0(\varepsilon^{1/4}) + \varepsilon u_1(x) - C \cdot \varepsilon^{5/4} \leq \underline{W}|_{\eta=\varepsilon^{-1/4}} \leq u(\varepsilon^{1/4}, \varepsilon); \\
 & 2) \varepsilon \frac{d\underline{U}}{dx} - x^2 + \underline{U}^2 - \varepsilon f(x) = \\
 & = -2xC\varepsilon^{5/4} + \left(\frac{(f(x)-1)^2}{4x^2} - \frac{f(x)-1}{2x^2} + \frac{f'(x)}{2x} \right) - \frac{f(x)-1}{x} C\varepsilon^{9/4} + C^2\varepsilon^{5/2} \leq 0
 \end{aligned}$$

(если $f(x)$ и $f'(x)$ не растут слишком быстро). Следовательно, \underline{U} действительно является нижним решением задачи (1) при $x \in [\varepsilon^{1/4}, +\infty)$.

Аналогично при достаточно большом C функция $\overline{U} = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + C \cdot \varepsilon^{5/4}$ является верхним решением при $x \in [\varepsilon^{1/4}, +\infty)$.

Отметим, что из существования верхнего и нижнего решений вытекает существование решения задачи. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Существует решение задачи (1) из класса $C^\infty[0, \infty)$, такое, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ верны следующие равенства:*

$$\begin{aligned}
 u(x, \varepsilon) &= v_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon^{5/4}), \quad x \in [0, \varepsilon^{3/4}), \\
 u(x, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} w_0\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \varepsilon w_1\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \varepsilon^{3/2} w_2\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + O(\varepsilon^{5/4}), \quad x \in [\varepsilon^{3/4}, \varepsilon^{1/4}), \\
 u(x, \varepsilon) &= u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + O(\varepsilon^{5/4}), \quad x \in [\varepsilon^{1/4}, +\infty).
 \end{aligned}$$

Заключение

Мы построили следующее трёхмасштабное разложение:

$$u(x, \varepsilon) \stackrel{\text{ac.}}{\underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\approx}} \begin{cases} v_0(\xi) + \varepsilon v_1(\xi) + \varepsilon^2 v_2(\xi) + \dots & \text{при } x \ll \varepsilon^{1/2}, \\ \varepsilon^{1/2} w_0(\eta) + \varepsilon w_1(\eta) + \varepsilon^{3/2} w_2(\eta) + \dots & \text{при } \varepsilon \ll x \ll 1, \\ u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \dots & \text{при } \varepsilon^{1/2} \ll x, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned}
 v_0(\xi) &= \frac{1}{\xi+1}, \quad v_1(\xi) = \frac{f(0)}{3} \left(\xi + 1 - \frac{1}{(\xi+1)^2} \right), \\
 v_2(\xi) &= \left(-\frac{1}{45} f^2(0) + \frac{1}{5} \right) \xi^3 + \left(-\frac{1}{15} f^2(0) + \frac{f'(0)}{4} + \frac{1}{10} \right) \xi^2 + \left(-\frac{1}{15} f^2(0) + \frac{f'(0)}{6} - \frac{1}{15} \right) \xi + \\
 &+ \frac{4}{45} f(0) - \frac{f'(0)}{12} + \frac{1}{30} + \left(-\frac{f^2(0)}{5} + \frac{f'(0)}{12} - \frac{1}{30} \right) \frac{1}{(\xi+1)^2} + \frac{1}{9} \frac{f^2(0)}{(\xi+1)^3}, \\
 w_0(\eta) &= \eta - \frac{e^{-\eta^2}}{C_0 - \int_0^\eta e^{-t^2} dt}, \quad w_1(\eta) = \frac{\left(\int_0^\eta f'(0) e^{t^2} \left(\int_0^t e^{-\tau^2} d\tau \right)^2 dt + \frac{4}{\pi} \right) e^{-\eta^2}}{\left(\int_0^\eta e^{-\tau^2} d\tau \right)^2}, \\
 w_2(\eta) &= \frac{1}{\text{erf}^2(\eta)} \left(\int_0^\eta \frac{1}{\text{erf}^2(t)} \left(-f^2(0) \left(\int_0^t \tau e^{\tau^2} \text{erf}^2(\tau) d\tau \right)^2 e^{-t^2} - \right. \right. \\
 &\left. \left. - 2f'(0) \int_0^t \tau e^{\tau^2} \text{erf}^2(\tau) d\tau \cdot \frac{4}{\pi} e^{-t^2} - \frac{16}{\pi^2} e^{-t^2} + \frac{1}{2} e^{t^2} \text{erf}^4(t) f''(0) t^2 \right) dt \right) e^{-\eta^2}, \\
 u_0(x) &= x, \quad u_1(x) = \frac{f(x)-1}{2x}, \quad u_2(x) = \frac{4f(x) - f^2(x) - 2xf'(x) - 3}{8x^3}.
 \end{aligned}$$

Также проведено обоснование первых членов асимптотики.

Список литературы

1. **Тихонов, А. Н.** О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра / А. Н. Тихонов // Мат. сб. — 1948. — Т. 22, № 2. — С. 193–204.
2. **Ильин, А. М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач / А. М. Ильин. — М. : Наука, 1989. — 336 с.
3. **Ильин, А. М.** Асимптотические методы в анализе / А. М. Ильин, А. Р. Данилин. — М. : Физматлит, 2009. — 248 с.
4. **Русанова, М. И.** Асимптотика решения уравнения Риккати / М. И. Русанова // Материалы второй научно-практической конференции Научного общества учащихся Малой академии Челябинского государственного университета / отв. за вып. С. Н. Замоздра. — Челябинск : Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2013. — С. 7–9.
5. **Хачай, О. Ю.** Асимптотическое разложение решения начальной задачи для сингулярно возмущённого обыкновенного дифференциального уравнения / О. Ю. Хачай // Дифференц. уравнения. — 2008. — Т. 44, № 2. — С. 270–272.
6. **Ильин, А. М.** Асимптотика решения дифференциального уравнения с малым параметром в случае двух решений предельного уравнения / А. М. Ильин, С. Ф. Долбеева // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2006. — Т. 12, № 1. — С. 98–108.
7. **Васильева, А. Б.** Контрастные структуры в сингулярно возмущённых задачах / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефёдов // Фундамент. и приклад. математика. — 1998. — Т. 4, вып. 3. — С. 799–851.
8. **Чаплыгин, С. А.** Новый метод приближённого интегрирования дифференциальных уравнений / С. А. Чаплыгин. — М.-Л. : Гостехиздат, 1950. — 103 с.

Поступила в редакцию 14.08.2014

После переработки 03.02.2016

Сведения об авторе

Крутова Юлия Александровна, студентка математического факультета, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: julia_74rus@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2016. Vol. 1, iss. 1. P. 43–51.

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF A NONLINEAR CAUCHY PROBLEM

Ju. A. Krutova

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
julia_74rus@mail.ru

The solution uniform asymptotics of the initial value problem for equation $\varepsilon u' = x^2 - u^2 + \varepsilon f(x)$ singularly depending on small parameter ε is considered. The equation contains the unexplored case of the right-hand side, though equations of this type are well studied. The three-scale solution asymptotic expansion is constructed by the matching method, justified by the upper and lower solutions method.

Keywords: *asymptotic expansion, small parameter, initial value problem, matching method, intermediate expansion.*

References

1. **Tikhonov A.N.** O zavisimosti resheniy differentsial'nykh uravneniy ot malogo parametra [About dependence of differential equations solutions on a small parameter]. *Matematicheskii sbornik* [Sbornik Mathematics], 1948, vol. 22, no. 2, pp. 193–204. (In Russ.).
2. **Il'in A.M.** *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems.* Translations of Mathematical Monographs. 102. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). ix+281 p. (1992).
3. **Il'in A.M., Danilin A.R.** *Asimptoticheskiye metody v analize* [Asymptotic methods in analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 248 p. (In Russ.).
4. **Rusanova M.I.** Asimptotika resheniya uravneniya Rikkati [Asymptotics of Riccati equation solution]. *Materialy vtoroy nauchno-prakticheskoy konferentsii Nauchnogo obshchestva uchashchikhsya Maloy akademii Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta* [Proceedings of The Second Scientific Conference of Small Academy Students of Chelyabinsk State University]. Chelyabinsk, Izdatel'stvo Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta Publ., 2013. Pp. 7–9. (In Russ.).
5. **Khachay O.Yu.** Asymptotic expansion of the solution of the initial value problem for a singularly perturbed ordinary differential equation. *Differential Equations*, 2008, vol. 44, no. 2, pp. 282–285.
6. **Il'in A.M., Dolbeeva S.F.** Asimptotika resheniya differentsial'nogo uravneniya s malym parametrom v sluchaye dvukh resheniy predel'nogo uravneniya [Solution asymptotics of a differential equation with a small parameter in the case of two solutions for a limit equation]. *Trudy Instituta Matematiki i mekhaniki UrO RAN* [Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS], 2006, vol. 12, no. 1, pp. 98–108. (In Russ.).
7. **Vasil'yeva A.B., Butuzov V.F., Nefedov N.N.** Kontrastnye struktury v singularno vozmushchyonnykh zadachakh [Contrast structures in singularly perturbed problems]. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 1998, vol. 4, iss. 3, pp. 799–851. (In Russ.).
8. **Chaplygin S.A.** *Novyy metod priblizhyonnogo integrirvaniya differentsial'nykh uravneniy* [A new method of approximate integration of differential equations]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1950. 103 p. (In Russ.).

Article received 14.08.2014

Corrections received 03.02.2016