I. S. Kats, A. A. Nudelman, The Stieltjes strong moment problem,
Algebra i Analiz, 1996, Volume 8, Issue 6, 26–56

https://www.mathnet.ru/eng/aa743

Алгебра и анализ
Том 8 (1996), вып. 6

СИЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ СТИЛТЬЕСА

© И. С. Кац, А. А. Нудельман

В статье изучается сильная проблема моментов Стилтьеса, в которой в отличие от классической проблемы моментов Стилтьеса, кроме моментов с неотрицательными порядками, заданы моменты всех отрицательных порядков. Получены критерий разрешимости, описание всех решений, выяснена структура вырожденной позитивной бибесконечной последовательности, рассмотрены лунки Вейля, канонические решения. Используются результаты спектральной теории неоднородной струны, а также асимптотические свойства одного класса аналитических функций, связанных с проблемой Стилтьеса.

Введение

1. Постановка задачи и краткое описание результатов. Классическая проблема моментов (КПМ), как известно, состоит в следующем. Пусть задана последовательность $\{s_k\}_0^\infty$ вещественных чисел и отрезок J вещественной оси. Требуется найти неотрицательную на J меру Лебега–Стилтьеса τ (будем кратко ее называть τ-мерой), для которой выполняются равенства

$$\int_J \lambda^k d\tau(\lambda) = s_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

При этом возникают следующие вопросы:

1) При каких условиях проблема имеет решение?

2) При выполнении этих условий выяснить, будет ли решение единственным (в этом случае КПМ называется *определенной*) или не единственным (*неопределенная* КПМ).

Ключевые слова: Классическая проблема моментов Стилтьеса, сильная проблема моментов Стилтьеса, спектральная мера струны, лунка Вейля.

Исследование, описанное в этой публикации, стало возможным частично благодаря грантам № UCZ000 и № UCZ200 Международного научного фонда (ICF).

3) Найти все решения КПМ.

Если J — конечный отрезок, то вопрос 2) снимается, так как в этом случае КПМ — определенная. При $J = [0, 1]$ КПМ называется проблемой Хаусдорфа (к ней сводится любая КПМ с ограниченным J), при $J = [0, +\infty)$ — проблемой Стилтьеса, при $J = (-\infty, \infty)$ — проблемой Гамбургера. Подробное изложение вопросов, связанных с КПМ, содержится в монографиях [1, 2].

В последнее время появилось большое количество работ, посвященных исследованию так называемых сильных проблем моментов (СПМ), в которых наряду с моментами неотрицательных порядков задаются также моменты отрицательных порядков. Точнее говоря, вопросы 1)–3) ставятся о неотрицательной τ-мере, для которой

$$\int_J \lambda^k d\tau(\lambda) = s_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где $\{s_k\}_{-\infty}^{\infty}$ — заданная бибесконечная последовательность. Начались эти исследования в работах [3] (случай $J = [0, \infty)$) и [4] (случай $J = (-\infty, \infty)$). Подробная библиография содержится в [5].

Следует отметить, что проблемы моментов с моментами отрицательных порядков впервые, по-видимому, рассматривались в работах [6] и [7] для случая $J = [0, 1]$.

В настоящей работе рассматривается сильная проблема моментов Стилтьеса (СПМС) — случай $J = [0, +\infty)$. В ней 1) приводится доказательство критерия разрешимости СПМС, опирающееся на одну теорему М. Г. Крейна из [8], позволяющую получить критерий разрешимости обобщенной проблемы моментов

$$c_k = \int_J u_k(\lambda) d\tau(\lambda), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

в случае, когда моментные функции $u_k(t)$ могут иметь конечное число точек разрыва; 2) устанавливается критерий определенности и описание всех решений в неопределенном случае; 3) изучаются так называемые лунки Вейля и канонические решения.

При изучении последних двух вопросов мы используем обнаруженную М. Г. Крейном ([9, 10], см. также [11]) связь между КПМС и построенной им спектральной теорией неоднородной струны. Эта связь позволяет придать прозрачные механические истолкования многим результатам знаменитых исследований Т. Стилтьеса [12] и, более того, получить описание всех решений КПМС. Мы используем, с одной стороны, эту связь и, с другой стороны, эквивалентность КПМС и СПМС задачам об отыскании так называемой $\mathcal{S}$-функции (определение см. ниже) с предписанными асимптотическими свойствами.

По некоторым результатам эта статья пересекается со статьей [5]. Однако установленный в настоящей статье критерий определенности СПМС, найденное нами описание всех решений СПМС в случае ее неопределенности, результаты, касающиеся лунки Вейля и канонических решений, не входят в это пересечение. Кроме того, здесь более полно изучается критерий разрешимости (особенно в вырожденном случае).

2. Сведения об $\mathcal{R}$- и $\mathcal{S}$-функциях (см. [2, 13] или [14]). Функцию комплексной переменной z относим к классу $(\mathcal{R})$ и называем *$\mathcal{R}$-функцией*, если:

1) она определена и голоморфна в каждой из полуплоскостей

$$\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\} \quad \text{и} \quad \mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\},$$

2) $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ $(\operatorname{Im} z \neq 0)$,

3) $\operatorname{Im} f(z) \geqslant 0, z \in \mathbb{C}_+$. Известно, что $f \in (\mathcal{R})$ в том и только в том случае, когда имеет место представление

$$f(z) = \alpha + \beta z + \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}\right) d\tau(\lambda) \quad (\operatorname{Im} z \neq 0) \tag{0.1}$$

с неотрицательной мерой τ, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geqslant 0$, причем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (1 + \lambda^2)^{-1} d\tau(\lambda) < \infty.$$

Неубывающая функция $\tau(\lambda)$, задающая эту τ-меру при нормировке

$$\tau(\lambda) = \frac{1}{2}(\tau(\lambda - 0) + \tau(\lambda + 0)), \quad \tau(0) = 0 \tag{0.2}$$

однозначно определяется (а потому однозначно определяются α и β из (0.1)) с помощью формулы обращения Стилтьеса

$$\tau(\lambda) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\lambda \operatorname{Im} f(\xi + i\varepsilon) d\xi, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{0.3}$$

$\mathcal{R}$-функция f называется $\mathcal{S}$-*функцией* и относится к классу $(\mathcal{S})$, если она голоморфна в $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ и $f(z) \geqslant 0$, $z \in (-\infty, 0)$. Как следует из (0.3), для $\mathcal{S}$-функции $f(z)$ на $(-\infty, 0)$ мера τ равна нулю. Более того, для $f \in (\mathcal{S})$ (0.1) приводится к виду

$$f(z) = \gamma + \int\limits_{[0,\infty)} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty), \tag{0.4}$$

где $\gamma = f(-\infty) \geqslant 0$. Очевидно, любая функция f, представимая в виде (0.4) с $\gamma \geqslant 0$ и неотрицательной τ-мерой, является $\mathcal{S}$-функцией. Класс функций, получаемых из $(\mathcal{S})$ присоединением к нему функции $f(z) \equiv \infty$, обозначим через $(\widetilde{\mathcal{S}})$, а принадлежащие ему функции будем называть $\widetilde{\mathcal{S}}$-*функциями*. Для того чтобы функция $f(z)$ была $\mathcal{S}$-функцией, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$f(z) \in (\mathcal{R}) \quad \text{и} \quad zf(z) \in (\mathcal{R}).$$

3. Некоторые сведения о спектральной теории струны ([10], см. также [11]). Пусть на интервале $I = [0, L]$ с $L < +\infty$ или $I = [0, L)$ с $L \leqslant \infty$ задана отличная от константы конечная неубывающая функция M ($M(0) = 0$), которая может иметь интервалы постоянства, точки разрыва, ненулевые непрерывную сингулярную и абсолютно непрерывную составляющие. Будем трактовать M как функцию распределения масс струны $S(I, M)$ в том смысле, что при любом $x \in I$ $M(x + 0)$ — это масса части этой струны, расположенной на сегменте $[0, x]$ (когда $L \in I$, под $M(L + 0)$ понимаем $M(L)$), и в связи с этим $m_x = M(x + 0) - M(x - 0)$ трактуется как величина массы, сосредоточенной в точке x, $M(-0) = M(0) = 0$. Когда $L \in I$, будем считать впредь, что $m_L = 0$.

Если $L \notin I$, считаем, $M(L + 0) = M(L) = \sup\limits_{x \in I} M(x)$. Положим $l = \sup \mathcal{F}_M$, где $\mathcal{F}_M$ — множество точек роста функции M. Струну $S(I, M)$ и ее правый конец будем называть регулярными, если $l + M(l) < +\infty$, а в противном случае — сингулярными (в сингулярном случае $l = L \notin I$). В регулярном случае будем считать, что $l \in I$. Здесь мы можем ограничиться случаем, когда $m_l = 0$. Со струной $S(I, M)$ мы ассоциируем функции $\varphi(x, z)$ и $\psi(x, z)$ — решения обобщенного дифференциального уравнения для амплитудных функций струны

$$\frac{dy'}{dM} + zy = 0, \tag{0.6}$$

удовлетворяющие начальным условиям:

$$\varphi(0,z)=1,\quad \varphi^-(0,z)=0;\qquad \psi(0,z)=0,\quad \psi^-(0,z)=1 \tag{0.7}$$

(y^+ и y^- обозначают соответственно правую и левую производные). Не вдаваясь в детали определения дифференцирования по мере dM и в смысл левой производной в точке $x=0$, укажем лишь, что $\varphi(x,z)$ и $\psi(x,z)$ являются решениями интегральных уравнений

$$\begin{aligned}\varphi(x,z)&=1-z\int\limits_{[0,x]}(x-s)\varphi(s,z)dM(s),\\ \psi(x,z)&=x-z\int\limits_{[0,x]}(x-s)\psi(s,z)dM(s)\end{aligned} \tag{0.8}$$

на I. Легко доказывается, что $\varphi(x,z)>0$ и $\psi(x,z)>0$ при любом $x\in I$ и $z\in(-\infty,0)$.

Пусть $L^{(2)}(I,M)$ — гильбертово пространство M-измеримых на I функций f, имеющих M-суммируемый квадрат.

Обозначим через $\hat{L}^{(2)}(I,M)$ — множество тех $f\in L^{(2)}(I,M)$, которые равны нулю в некоторой (своей для каждой функции f) окрестности правого конца интервала I.

Определение. Заданную на $(-\infty,+\infty)$ неотрицательную меру τ называем *спектральной мерой (СМ) струны* $S(I,M)$, если отображение $W: f\longrightarrow F$, определяемое равенством

$$F(\lambda)=\int\limits_I f(x)\varphi(x,\lambda)dM(x),\quad \lambda\in(-\infty,+\infty), \tag{0.9}$$

изометрически переводит $\hat{L}^{(2)}(I,M)$ в $L^{(2)}_\tau(-\infty,+\infty)$, т.е. если

$$\int\limits_{(-\infty,+\infty)}|F(\lambda)|^2d\tau(\lambda)=\int\limits_I|f(x)|^2dM(x),\quad f\in\hat{L}^{(2)}(I,M),\ \ F=Wf.$$

Носитель $\sigma[\tau]$ спектральной меры τ называется *спектром* этой СМ.

Нас особенно будут интересовать те спектральные меры, спектры которых неотрицательны. Множество таких СМ струны $S(I, M)$ обозначим через $T(I, M)$. Одну из таких СМ можно получить следующим образом. Установлено, что при любом $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ существует конечный предел

$$\lim_{x \uparrow L} \frac{\psi(x,z)}{\varphi(x,z)} =: \mathring{\Omega}(z),$$

который называется *коэффициентом динамической податливости* (*КДП*) данной струны. Оказывается, $\mathring{\Omega} \in (S)$, и поэтому имеет место представление

$$\mathring{\Omega}(z) = \gamma + \int\limits_{[0,+\infty)} \frac{d\mathring{\tau}(\lambda)}{\lambda - z} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty),\ \gamma \geqslant 0,\ d\mathring{\tau}(\lambda) \geqslant 0). \tag{0.10}$$

Мера $\mathring{\tau}$ является СМ данной струны и называется ее *главной СМ*.

Отметим, что сингулярная струна имеет только одну СМ с неотрицательным спектром — ее главную СМ $\mathring{\tau}$.

В случае регулярной струны $S(I, M)$ описание всех ее спектральных мер с неотрицательным спектром дает следующая

Теорема (М. Г. Крейн [10]). *Какова бы ни была функция $h \in (\widetilde{S})$, функция $\Omega_h(z)$, определяемая равенством*

$$\Omega_h(z) = \frac{\psi^+(l,z)h(z) + \psi(l,z)}{\varphi^+(l,z)h(z) + \varphi(l,z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty), \tag{0.11}$$

является S-функцией, и потому допускает представление

$$\Omega_h(z) = \gamma + \int\limits_{[0,\infty)} \frac{d\tau_h(\lambda)}{\lambda - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty). \tag{0.12}$$

Здесь γ не зависит от h и равно длине максимального начального участка струны, свободного от масс, а τ_h — СМ струны. Равенствами (0.11) *и* (0.12) *устанавливается биективное соответствие $h \leftrightarrow \tau_h$ между $\tilde{S}$ и множеством* *всех СМ с неотрицательным спектром, причем* $\Omega_h(z) = \overset{\circ}{\Omega}(z)$, *а значит, и* $\tau_h(z) = \overset{\circ}{\tau}(z)$ *в том и только в том случае, когда* $h(z) \equiv L - l$.

Из приведенной теоремы и основной теоремы М. Г. Крейна в теории обратных задач для струны [10] следует, что *любая СМ регулярной струны* $S(I, M)$, *у которой* $L = l$, *является главной СМ струны, которую можно получить из данной струны* $S(I, M)$, *присоединив к ней струну с левым концом в точке* l *и с КДП, равным* h.

4. Стилтьесовские струны. Струну $S(I, M)$ М. Г. Крейн назвал *стилтьесовской*, если она представляет собой невесомую нить, которая несет лишь сосредоточенные массы m_0, m_1, $m_2, \ldots$ в точках $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$, сгущающихся к правому концу, $\lim x_n = L = l$ $(\leqslant \infty)$. Для определенности будем считать $M(x) = \sum\limits_{x_n < x} m_n$, $x \in I$. Разность $x_n - x_{n-1}$ будем обозначать через l_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Легко понять, что при $x = x_n$ функция $\varphi(x_n, z)$ представляет собой полином степени n переменной z. Пусть $g_n(x)$ такая функция, что $g_n(x_n) = 1$, $g_n(x) = 0$, $x \in I$, $x \neq x_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Ее образ в преобразовании W — это $m_n\varphi(x_n, z)$. Поэтому образ множества $L^{(2)}(L, M)$ в этом преобразовании представляет собой множество всех полиномов переменной z и, как это вытекает из определения спектральной меры струны, для любого полинома $P(z)$ и любой меры $\tau \in T(I, M)$ конечен интеграл

$$\int\limits_{[0,+\infty)} P(\lambda)d\tau(\lambda),$$

причем его величина $\Phi(P(\lambda))$ не зависит от выбора $\tau \in T(I, M)$ и, более того, $T(I, M)$ совпадает с множеством всех неотрицательных мер τ, для которых этот интеграл равен $\Phi(P(\lambda))$. Следовательно, $T(I, M)$ *совпадает с множеством всех решений КПМС*

$$s_k = \int\limits_{[0,+\infty)} \lambda^k d\tau(\lambda), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{0.13}$$

где $s_k = \Phi(\lambda^k)$.

Так как введенные выше функции g_i и g_j при $i \neq j$ ортогональны в метрике пространства $L_M^{(2)}(I)$, то ввиду изометричности отображения W, ортогональны в метрике пространства $L_\tau^{(2)}[0, +\infty)$, где $\tau \in T(I, M)$, функции $\varphi(x_i, z)$ и

$\varphi(x_j, z)$. Учитывая, что в соответствии с (0.8) $\varphi(x, 0) = 1$, $x \in I$, легко убеждаемся, что

$$\varphi(x_n, z) = (-1)^n \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-1} \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-1} \\ z^0 & z^1 & \dots & z^n \end{vmatrix}$$

Еще Стилтьес [12] доказал, что данная последовательность $\{s_k\}_0^\infty$ тогда и только тогда допускает представление (0.13), с неотрицательной мерой τ, имеющей бесконечный носитель, когда положительны все определители

$$A_n^{(0)} = |s_{j+k}|_0^n, \quad A_n^{(1)} = |s_{j+k+1}|_0^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{0.14}$$

М. Г. Крейн обнаружил, что при выполнении этого условия *множество решений КПМС* (0.13) *совпадает с множеством* $T(I, M)$ *стилтьесовской струны* $S(I, M)$, *у которой*

$$\begin{aligned} l_n &= \frac{(A_{n-1}^{(0)})^2}{A_n^{(1)} A_{n-1}^{(1)}}, \quad n = 1, 2, \dots, \\ m_n &= \frac{(A_{n-1}^{(1)})^2}{A_n^{(0)} A_{n-1}^{(0)}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{0.15}$$

(здесь мы считаем, что $A_{-1}^{(0)} = A_{-1}^{(1)} = 1$). Отсюда вытекает, во-первых, что в случае положительности всех определителей (0.14) КПМС является определенной в том и только в том случае, когда построенная стилтьесовская струна сингулярна, т.е. когда расходится хотя бы один из рядов

$$\sum_{j=1}^{\infty} l_j, \quad \sum_{j=0}^{\infty} m_j, \tag{0.16}$$

суммы которых равны соответственно ее длине и полной массе и, во-вторых, в случае неопределенности, т.е. в случае регулярности этой стилтьесовской струны, описание множества всех решений КПМС дается приведенной в п. 3 теоремой М. Г. Крейна применительно к этой струне.

Заметим, что первая часть этого утверждения является механической интерпретацией критерия Стилтьеса определенности КПМС.

Отметим также, что для регулярной струны функции $\varphi(l,z)$, $\psi(l,z)$, $\varphi^+(l,z)$, $\psi^+(l,z)$ — это целые функции порядка $\leqslant 1/2$. Если порядок $= 1/2$, то тип μ этих функций равен

$$\mu = \int\limits_{[0,l]} \sqrt{M'(x)}dx,$$

где $M'(x)$ — почти всюду существующая производная функции M. У стилтьесовской же струны $M'(x) = 0$ всюду на I, кроме счетного множества точек $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. Поэтому для регулярной стилтьесовской струны указанные функции имеют порядок $\leqslant 1/2$ и нулевой тип, если порядок $= 1/2$.

Из сделанного в конце п. 3 замечания вытекает, что любое решение КПМС — это либо главная СМ соответствующей стилтьесовской струны, либо главная СМ струны, полученной из нее некоторым продлением вправо. Так как любое решение СПМС является решением КПМС, то возник естественный вопрос: как охарактеризовать струны $S(I,M)$ (не обязательно имеющие стилтьесовское начало), у которых главная спектральная мера имеет конечные степенные моменты всех отрицательных порядков? Этот вопрос недавно нашел решение в работе [15].

§1. Критерий разрешимости сильной проблемы моментов Стилтьеса

1. Теорема М. Г. Крейна. Мы будем опираться на приведенный ниже адаптированный к рассматриваемой ситуации частный случай теоремы М. Г. Крейна [8], обобщающей известную теорему М. Рисса.

Пусть $J = [0,+\infty]$, $U = \{u_k\}_{-\infty}^{\infty}$ — заданная бибесконечная последовательность конечных на $(0,+\infty)$ вещественных функций, определенных на J, $\mathbf{P}$ — вещественная линейная оболочка U. По заданной последовательности $\{c_k\}_{-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ на $\mathbf{P}$ определяется линейный функционал Φ равенством

$$\Phi(u_k) = c_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.1}$$

Таким образом, для $P(\lambda) = \sum_{k=n}^{m} \alpha_k u_k(\lambda)$

$$\Phi(P) = \sum_{k=n}^{m} \alpha_k c_k. \tag{1.2}$$

Функцию $P \in \mathbf{P}$ относим к множеству $\mathbf{P}_+$, если $P(\lambda) \geqslant 0$, $\lambda \in (0,+\infty)$.

Последовательность $\{c_k\}_{-\infty}^{\infty}$ называется *позитивной* по отношению к $\{u_k(\lambda)\}_{-\infty}^{+\infty}$, если $\Phi(P) \geqslant 0$, $P \in \mathbf{P}_+$, а в том частном случае, когда $\Phi(P) = 0$

для хотя бы одного элемента $P_* \in \mathbf{P}_+$, $P_* \not\equiv 0$, она называется *вырожденно позитивной*. Такой элемент $P_* \in \mathbf{P}$ будем называть вырождающим.

Позитивная, но не вырожденно позитивная последовательность $\{c_k\}_{-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ называется *строго позитивной*.

Условимся называть функцию $P \in \mathbf{P}$ *нормальной*, если выполняются следующие условия:

1°. P непрерывна на $(0, +\infty)$.

2°. Существует $\omega_P \in \mathbf{P}_+$ такая, что

$$\lim_{\lambda\downarrow 0} \frac{P(\lambda)}{\omega_P(\lambda)} = \lim_{\lambda\uparrow\infty} \frac{P(\lambda)}{\omega_P(\lambda)} = 0.$$

Предложение А [8]. *Пусть все функции $u_k \in U$ нормальны и существует такая функция $\omega_0 \in P$, что ее точная нижняя грань на любой ограниченной части J положительна. Тогда для того чтобы последовательность $\{s_k\}_{-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ допускала представление*

$$s_k = \int\limits_{[0,+\infty]} u_k(\lambda) d\tau(\lambda), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{1.3}$$

где τ — неотрицательная мера (интеграл в (1.3) понимается как интеграл Лебега–Стилтьеса), необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{s_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ была позитивной по отношению к $\{u_k(\lambda)\}_{-\infty}^{+\infty}$. При этом, если $\lim_{\lambda\downarrow 0} u_k(\lambda) = \infty$ хотя бы для одного $k \in \mathbb{Z}$ и $\lim_{\lambda\uparrow+\infty} u_i(\lambda) = \infty$ хотя бы для одного $i \in \mathbb{Z}$, то τ-меры точек $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$ равны нулю (и интеграл (1.3) можно понимать как несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} u_k(\lambda) d\tau(\lambda)$$

в смысле Римана–Стилтьеса).

2. Критерий разрешимости СПМС. Применим эту теорему для получения критерия разрешимости сильной проблемы моментов Стилтьеса (СПМС), состоящей, напомним, в отыскании такой неотрицательной меры τ, что

$$s_k = \int\limits_{[0,\infty)} \lambda^k d\tau(\lambda), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \tag{1.4}$$

где $\{s_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ — заданная бибесконечная последовательность вещественных чисел, а интеграл понимается как несобственный интеграл Римана–Стилтьеса.

Для этого положим $J = [0, +\infty]$, $u_k(\lambda) = \lambda^k$, $k \in \mathbb{Z}$, и, как прежде, $U = \{u_k\}_{-\infty}^{+\infty}$. Легко убедиться, что для введенного здесь множества U выполняются все условия предложения A (если $P(\lambda) = u_k(\lambda)$, то в качестве $\omega_P(\lambda)$ можно взять $u_k(\lambda) + u_{-k}(\lambda)$, а в качестве $\omega_0(\lambda)$ можно взять $u_0(\lambda)$). В соответствии с этой теоремой справедлива

Лемма 1.1. *Для того чтобы СПМС (1.4) была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{s_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ была позитивной по отношению к последовательности $U = \{\lambda^k\}_{-\infty}^{+\infty}$.*

Впредь, говоря о позитивной, вырожденно позитивной или строго позитивной последовательности $\{s_k\}_{-\infty}^{+\infty}$, а также о множествах $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}_+$, будем иметь в виду таковые по отношению к $U = \{\lambda^k\}_{-\infty}^{+\infty}$.

Введем дополнительные понятия. Любой элемент $P \in \mathbb{P}$ представим в виде

$$P(\lambda) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k \lambda^k, \tag{1.5}$$

где лишь конечное количество коэффициентов α_k отлично от нуля. Положим $l_P = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid \alpha_k \neq 0\}$, $r_P = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid \alpha_k \neq 0\}$. Если $l_P \geqslant 0$, элемент (1.5) назовем, как обычно, полиномом. Полином $P(\lambda)$, у которого $l_P = 0$, назовем чистым. Если $P \in \mathbf{P}$, то

$$P(\lambda) = \sum_{l_P}^{r_P} \alpha_k \lambda^k = \lambda^{l_P} Q(\lambda),$$

где $Q(\lambda)$ — чистый полином $Q \in \mathbf{P}$. Если, кроме того, $P \in \mathbf{P}_+$, т.е. $P(\lambda) \geqslant 0$, $\lambda \in (0, +\infty)$ и $P(\lambda) \not\equiv 0$, то $Q(\lambda) \geqslant 0$, $\lambda \in [0, +\infty)$. Следовательно (см., например,

[2] или [14]), для любой функции $P \in \mathrm{P}_+$ имеет место представление

$$P(\lambda) = \lambda^q\left(\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\lambda^i\right)^2 + \lambda\left(\sum_{i=0}^{m} y_i\lambda^i\right)^2\right)$$
$$= \sum_{i,j=0}^{n} x_i x_j \lambda^{i+j+q} + \sum_{i,j=0}^{m} y_i y_j \lambda^{i+j+q+1}, \tag{1.6}$$

где $q = l_p$, $x_i \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$, $Y_j \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n, m \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\Phi(P) = \sum_{i,j=0}^{n} x_i x_j s_{i+j+q} + \sum_{i,j=0}^{m} Y_i Y_j s_{i+j+q+1},$$

где Φ — функционал, определенный в п. 1, и для позитивности последовательности $\{s_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ достаточна неотрицательность при $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, n$ форм

$$\sum_{i,j=0}^{n} s_{i+j+q} x_i x_j \tag{1.7}$$

при любых $n \in \mathbb{N}$ и $q \in \mathbb{Z}$, а так как любая функция P, представимая в виде (1.6) с $y_j = 0$, $j = 0, 1, \ldots, m$, принадлежит P_+, то это условие также необходимо. Этим установлена

Лемма 1.2. *Последовательность $\{s_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ позитивна в том и только в том случае, когда неотрицательны формы* (1.7) *при любых $q \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$.*

Из лемм 1.1 и 1.2 немедленно вытекает

Теорема 1.1. *Для разрешимости сформулированной в начале этого пункта СПМС необходима и достаточна неотрицательность форм* (1.7) *при любых $q \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$.*

Сопоставляя этот результат с критерием разрешимости классической проблемы моментов Гамбургера, приходим к следующей форме установленной теоремы.

Для того чтобы для последовательности $\{s_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ была разрешима сильная проблема моментов Стилтьеса (1.4), *необходимо и достаточно, чтобы при каждом $q \in \mathbb{Z}$ для последовательности $\{s_{k+q}\}_{k=0}^{+\infty}$ была разрешима классическая проблема моментов Гамбургера.*

Заметим в заключение, что если τ-мера является решением СПМС, то для любого $P \in \mathbf{P}$

$$\Phi(P(\lambda)) = \int\limits_{[0,\infty)} P(\lambda)d\tau(\lambda). \tag{1.8}$$

§2. Структура вырожденно позитивной последовательности

Леммой 1.1 установлено, что бибесконечная последовательность $\{s_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ позитивна в том и только в том случае, когда она допускает представление

$$s_k = \int\limits_{[0,\infty)} \lambda^k d\tau(\lambda), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots, \tag{2.1}$$

где τ — неотрицательная мера. Один из критериев вырожденной позитивности дает

Теорема 2.1. *Бибесконечная последовательность $\{s_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ вырожденно позитивна в том и только в том случае, когда СПМС* (2.1) *имеет решение τ, носитель $\sigma[\tau]$ которого представляет собой конечное множество точек. При выполнении этого условия СПМС* (2.1) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Пусть имеет место представление (2.1), в котором $\sigma[\tau]$ представляет собой конечное множество точек $\{\xi_j\}_{j=1}^{\nu}$. Тогда, во-первых, последовательность $\{s_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ позитивна, во-вторых, представление (2.1) приобретает вид

$$s_k = \sum_{j=1}^{\nu} \rho_j \xi_j^k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \ldots, \tag{2.2}$$

где $\xi_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$, ибо τ-мера точки $\lambda = 0$ равна нулю, а $\rho_j = \tau\{\xi_k\} > 0$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$, и, в-третьих, для всякого $P(\lambda) = \sum_{k=l_p}^{k=r_p} \alpha_k \lambda^k$ имеем (см. (1.8))

$$\Phi(P(\lambda)) = \sum_{j=1}^{\nu} \rho_j P(\xi_j). \tag{2.3}$$

Для полинома $P_*(\lambda) := (\lambda - \xi_1)^2(\lambda - \xi_2)^2 \ldots (\lambda - \xi_\nu)^2$ из (2.3) вытекает, что $\Phi(P_*(\lambda)) = 0$, а так как $P_* \in \mathbf{P}_+$, то последовательность $\{s_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ вырожденно позитивна.

Обратно, пусть последовательность $\{s_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ вырожденно позитивна и P_* — ее вырождающий элемент. Так как она позитивна, то, согласно теореме 1.1, существует хотя бы одно решение τ СПМС (2.1) и в соответствии с (1.8)

$$0 = \int\limits_{[0,\infty)} P_*(\lambda) d\tau(\lambda).$$

Это равенство справедливо для любого решения τ этой СПМС. Отсюда вытекает, что носитель $\sigma[\tau]$ любого решения τ содержится в множестве $\{\eta_j\}_1^m$ положительных нулей полинома $P_*(\lambda)$. Применив равенство (1.8) к полиному $P_k(\lambda)$, корнями которого служат все положительные корни полинома $P_*(\lambda)$, кроме η_k, получим, что

$$\Phi(P_k(\lambda)) = \tau\{\eta_k\} P_k(\eta_k) \Rightarrow \tau\{\eta_k\} = \Phi(P_k(\lambda))/P_k(\eta_k)$$

для любого решения τ СПМС. Этим установлена единственность решения τ СПМС (1.1).

Следствие. *Последовательность $\{s_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ вырожденно позитивна в том и только в том случае, когда имеет место представление* (2.2) *с какими-то $\nu \in \mathbb{N}$ и $\xi_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$. В этом случае для любого $P \in \mathrm{P}$ справедливо* (2.3).

Теперь можно привести критерий вырожденной позитивности в форме, непосредственно использующей числа s_k (не прибегая к полиномам).

Введем обозначения

$$A_n^{(q)} = \begin{vmatrix} s_q & s_{q+1} & \cdots & s_{q+n} \\ s_{q+1} & \cdots & \cdots & s_{q+n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{q+n} & s_{q+n+1} & \cdots & s_{q+2n} \end{vmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \ q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Отбрасываем тривиальный случай, когда $s_k = 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 2.2. *Для того чтобы последовательность $\{s_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ была вырожденно позитивной, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $\nu \in \mathbb{N}$ и всех $q \in \mathbb{Z}$ выполнялись соотношения*

$$A_m^{(q)} > 0, \quad m = 1, 2, \ldots, \nu - 1, \qquad A_\nu^{(q)} = 0. \tag{2.4}$$

При выполнении этого условия $A_n^{(q)} = 0$ *при любых натуральных* $n > \nu$ *и* $q \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть последовательность $\{s_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ вырожденно позитивна. Тогда справедливо представление (2.2), в соответствии с которым

$$\begin{pmatrix} s_q & s_{q+1} & \dots & s_{q+m} \\ s_{q+1} & \dots & \dots & s_{q+m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{q+m} & s_{q+m+1} & \dots & s_{q+2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_\nu \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_1^m & \xi_2^m & \dots & \xi_\nu^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho_1\xi_1^q & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \rho_2\xi_2^q & \dots & \ddots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \rho_\nu\xi_\nu^q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \dots & \xi_1^m \\ 1 & \xi_2 & \dots & \xi_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \xi_\nu & \dots & \xi_\nu^m \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

при любых $q \in \mathbb{Z}$ и $m \in \mathbb{N}$. Так как среди чисел ξ_j нет равных, то ранги крайних сомножителей в правой части (2.5) равны $\min\{\nu, m+1\}$, средний сомножитель положительно определен и его ранг равен ν. Поэтому матрица в левой части (2.5) неотрицательно определена и ее ранг равен $\min\{\nu, m+1\}$. Так как ее порядок равен $m+1$, то $A_m^{(q)} > 0$ при $m = 1, 2, \dots, \nu-1$ и $A_m^{(q)} = 0$ при $m = \nu$, $\nu+1$, $\nu+2, \dots$.

Осталось установить, что при выполнении условий (2.4) последовательность $\{s_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ вырожденно позитивна. Для этого в соответствии со следствием теоремы 2.1 достаточно установить, что имеет место (2.2). Воспользуемся следующим предложением из [16] ([16, теорема 3]).

Предложение B. *Пусть* $\{t_k\}_{k=0}^{2\nu-1}$ *— заданная последовательность вещественных чисел и определители* $T_n = |t_{j+k}|_0^n$ *положительны при* $n = 0, 1, \dots, \nu-1$. *Тогда существует бесчисленное множество представлений*

$$t_m = \sum_{j=1}^{\nu} \mu_j \eta_j^m, \quad \mu_j > 0, \ \eta_j \in \mathbb{R}, \ j = 1, 2, \dots, \nu, \ \eta_j \neq \eta_i \text{ при } i \neq j, \tag{$*$}$$

справедливых при $m = 0, 1, 2, \dots, 2\nu-2$, *и среди них имеется одно и только одно, в котором равенство* $(*)$ *справедливо и при* $m = 2\nu-1$, *причем числа* η_j, $j = 1, 2, \dots, \nu$, *фигурирующие в этом единственном представлении, являются* *корнями полинома*

$$\begin{vmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_\nu \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_{\nu+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{\nu-1} & t_\nu & t_{\nu+1} & \dots & t_{2\nu-1} \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^\nu \end{vmatrix}$$

Пусть выполняются условия (2.4) для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$ и всех $q \in \mathbb{Z}$. Тогда из предложения B и первого условия (2.4) вытекает вспомогательное

Предложение C. *Для любого $q \in \mathbb{Z}$ существует одно и только одно представление*

$$s_{q+m} = \sum_{j=1}^{\nu} \rho_j(q)(\xi_j(q))^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, 2\nu - 1 \tag{2.6}$$

с $\rho_j(q) > 0$, $\xi_j(q) \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, \nu$, $\xi_j(q) \neq \xi_i(q)$ при $i \neq j$, причем $\xi_j(q)$, $j = 1, 2, \dots, \nu$ являются корнями полинома

$$\begin{aligned} P_q(\lambda) &= \frac{1}{A_{\nu-1}^{(q)}} \begin{vmatrix} s_q & s_{q+1} & \dots & s_{q+\nu} \\ s_{q+1} & s_{q+2} & \dots & s_{q+\nu+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{q+\nu-1} & s_{q+\nu} & \dots & s_{q+2\nu-1} \\ 1 & \lambda & \dots & \lambda^\nu \end{vmatrix} \\ &= \lambda^\nu + \alpha_1(q)\lambda^{\nu-1} + \alpha_2(q)\lambda^{\nu-2} + \dots + \alpha_{\nu-1}(q)\lambda + \alpha_\nu(q). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Докажем, что из условия $A_\nu^{(q)} = 0$ вытекает выполнение равенства (2.6) и при $m = 2\nu$. Действительно, так как в соответствии с (2.7) и определением функционала Φ

$$\Phi(\lambda^{q+\nu} P_q(\lambda)) = A_\nu^{(q)} / A_{\nu-1}^{(q)} = 0$$

и поэтому

$$s_{q+2\nu} + \alpha_1(q) s_{q+2\nu-1} + \dots + \alpha_{\nu-1}(q) s_{q+\nu+1} + \alpha_\nu(q) s_{q+\nu} = 0,$$

то с учетом (2.6) и того, что $\xi_j(q)$ — корень полинома P_q, получим

$$\begin{aligned} s_{q+2\nu} &= -\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i(q) s_{q+2\nu-i} = -\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i(q) \sum_{j=1}^{\nu} \rho_j(q)(\xi_j(q))^{2\nu-i} \\ &= -\sum_{j=1}^{\nu} \rho_j(q)(\xi_j(q))^{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i(q)(\xi_j(q))^{\nu-i} \\ &= \sum_{j=1}^{\nu} \rho_j(q)(\xi_j(q))^{2\nu}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Докажем теперь, что равенства (2.6) выполняются и при $m = -1$. Действительно, как вытекает из (2.7) и определения функционала Φ,

$$\begin{aligned} &\Phi(\lambda^{q-1} P_q(\lambda)) \\ &= \frac{1}{A_{\nu-1}^{(q)}} \begin{vmatrix} s_q & s_{q+1} & \dots & s_{q+\nu} \\ s_{q+1} & s_{q+2} & \dots & s_{q+\nu+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{q+\nu-1} & s_{q+\nu} & \dots & s_{q+2\nu-1} \\ s_{q-1} & s_q & \dots & s_{q+\nu-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\nu} \frac{A_{\nu}^{(q-1)}}{A_{\nu-1}^{(q)}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Из тех же посылок теперь следует, что

$$s_{q+\nu-1} + \alpha_1(q) s_{q+\nu-2} + \alpha_2(q) s_{q+\nu-3} + \dots + \alpha_{\nu-1}(q) s_q + \alpha_\nu(q) s_{q-1} = 0,$$

а так как (см. (2.7)) $\alpha_\nu(q) = \frac{A_{\nu-1}^{(q+1)}}{A_{\nu-1}^{(q)}} \neq 0$, то в соответствии с (2.6) (считаем

$\alpha_0(q) = 1$)

$$\begin{aligned} s_{q-1} &= -\frac{1}{\alpha_\nu(q)} \sum_{i=0}^{\nu-1} \alpha_i(q) s_{q+\nu-1-i} \\ &= -\frac{1}{\alpha_\nu(q)} \sum_{i=0}^{\nu-1} \alpha_i(q) \sum_{j=0}^{\nu} \rho_j(q)(\xi_j(q))^{\nu-1-i} \\ &= -\frac{1}{\alpha_\nu(q)} \sum_{j=0}^{\nu} \rho_j(q)(\xi_j(q))^{-1} \sum_{i=0}^{\nu-1} \alpha_i(q)(\xi_j(q))^{\nu-i} \\ &= \sum_{j=0}^{\nu} \rho_j(q)(\xi_j(q))^{q-1}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

ибо $\xi_j(q)$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$ — корни полинома P_q.

Согласно предложению С, при $m = \nu - 1$ имеет место равенство из (2.6), а поэтому и равенство (2.5) с $\xi_j(q)$ вместо ξ_j. В силу первого условия (2.4) матрица в левой части (2.5) при таком m положительно определена. Поэтому положительно определен средний сомножитель в правой части (2.5) и, следовательно, при нечетном q положительны $\xi_j(q)$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$.

Положим $\xi_j(0) = \xi_j$, $\rho_j(0) = \rho_j$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$. Докажем теперь, что при любом $q \in \mathbb{Z}$

$$\xi_j(q) = \xi_j, \quad \rho_j(q) = \rho_j \xi_j^q, \quad j = 1, 2, \ldots, \nu. \tag{2.10}$$

Пусть, сначала, q — нечетно. В соответствии с (2.6) и (2.8) получим представление

$$s_{q+1+m} = s_{q+(1+m)} = \sum_{j=1}^{\nu} \rho_j(q)\xi_j(q)(\xi_j(q))^m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, 2\nu - 1, \tag{2.11}$$

в котором $\rho_j(q)\xi_j(q) > 0$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$. В соответствии же с предложением С с заменой q на $q + 1$

$$s_{q+1+m} = s_{(q+1)+m} = \sum_{j=1}^{\nu} \rho_j(q+1)(\xi_j(q+1))^m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, 2\nu - 1, \tag{2.12}$$

где $\rho_j(q + 1) > 0$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$.

Сопоставив (2.12) с (2.11), получим в силу единственности представления (2.12) с положительными $\rho_j(q+1)$, $j=1,2,\ldots,\nu$, что при любом нечетном q

$$\xi_j(q+1)=\xi_j(q),\quad \rho_j(q+1)=\rho_j(q)\xi_j(q),\quad j=1,2,\ldots,\nu. \tag{2.13}$$

Пусть теперь q четно. Тогда $q+1$ нечетно и $\xi_j(q+1)>0$. Из (2.9) с заменой q на $q+1$ и (2.12) получим представление

$$s_{q+m}=s_{(q+1)+(m-1)}=\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\rho_j(q+1)}{\xi_j(q+1)}(\xi_j(q+1))^m,\quad m=0,1,2,\ldots,2\nu-1, \tag{2.14}$$

в котором $\rho_j(q+1)/\xi_j(q+1)>0$, $j=1,2,\ldots,\nu$. Сопоставив (2.6) и (2.14), получим в силу единственности представления (2.6) с положительными $\rho_j(q)$, $j=1,2,\ldots,\nu$, что при любом четном q

$$\xi_j(q)=\xi_j(q+1),\quad \rho_j(q)=\frac{\rho_j(q+1)}{\xi_j(q+1)}=\frac{\rho_j(q+1)}{\xi_j(q)},\quad j=1,2,\ldots,\nu.$$

Таким образом, равенства (2.13) справедливы и при любом четном q, а значит, при любом $q\in\mathbb{Z}$. Отсюда вытекает справедливость (2.10) при любом $q\in\mathbb{Z}$ и (2.6) принимает вид

$$s_{q+m}=\sum_{j=1}^{\nu}\rho_j\xi_j^q\xi_j^m,\quad m=0,1,2,\ldots,2\nu-1. \tag{2.15}$$

Положив в (2.15) $m=0$, $q=k$, получим (2.2). Теорема доказана.

Замечание. Так как $\xi_j(q)$, $j=1,2,\ldots,\nu$ — корни полинома P_q, то из (2.7) и (2.10) следует, что все полиномы P_q совпадают с полиномом P_0.

§3. Асимптотические свойства $\mathcal{S}$-функций, принадлежащих сильной проблеме моментов Стилтьеса

С каждым решением τ проблемы моментов Стилтьеса (классической или сильной) свяжем $\mathcal{S}$-функцию

$$f_\tau(z)=\int\limits_{[0,\infty)}\frac{d\tau(\lambda)}{\lambda-z}, \tag{3.1}$$

о которой будем говорить, что она *принадлежит данной проблеме моментов.* Формула обращения (0.3) позволяет восстановить τ по f_τ.

Приводимые ниже теоремы дают необходимые и достаточные условия, при которых $\mathcal{S}$-функция f принадлежит КПМС и СПМС. Эти условия выражаются в терминах асимптотического поведения функции f вблизи ∞ и 0. Первые две теоремы по существу содержатся в мемуаре Стилтьеса [12], поэтому мы докажем только последние две.

Теорема 3.1. *Если для последовательности $\{s_k\}_0^\infty$ разрешима КПМС и τ — одно из ее решений, т.е.*

$$s_k = \int\limits_{[0,\infty)} \lambda^k d\tau(\lambda), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{3.2}$$

то для принадлежащей ей функции $f = f_\tau$ справедливы асимптотические равенства

$$f(z) = -\Big(\frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \dots + \frac{s_n}{z^{n+1}}\Big) + 0\Big(\frac{1}{z^{n+1}}\Big),$$
$$0 < \delta \leqslant |\arg z| \leqslant \pi, \quad z \to \infty, \quad n = 0, 1, \dots. \tag{3.3}$$

Теорема 3.2. *Если для $\mathcal{S}$-функции*

$$f(z) = \gamma + \int\limits_{[0,\infty)} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda - z}$$

справедливы асимптотические равенства (3.3), *то $\gamma = 0$, у меры τ существуют степенные моменты всех неотрицательных порядков и имеют место равенства* (3.2).

Иными словами, при условиях теоремы функция f принадлежит КПМС, определяемой последовательностью $\{s_k\}_{k=0}^\infty$.

Теорема 3.3. *Если последовательность $\{s_{-k}\}_{k=1}^\infty$ допускает представление*

$$s_{-k} = \int\limits_{[0,\infty)} \lambda^{-k} d\tau(\lambda), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{3.4}$$

то для S-функции

$$f(z) = \int\limits_{[0,\infty)} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda - z} \tag{3.5}$$

справедливы асимптотические равенства

$$f(z) = s_{-1} + s_{-2}z + \dots + s_{-(n+1)}z^n + 0(z^n),$$
$$0 < \delta \leqslant |\arg z| \leqslant \pi, \ z \to 0, \ n = 0, 1, \dots \tag{3.6}$$

Теорема 3.4. *Если для S-функции $f(z)$, определенной равенством* (3.5), *справедливы соотношения* (3.6), *то у меры τ существуют степенные моменты всех отрицательных порядков и имеют место равенства* (3.4).

Доказательство теоремы 3.3. Используя (3.4) и (3.5), найдем, что

$$\begin{aligned} f(z) - \sum_{k=0}^{n} s_{-(k+1)}z^k &= \int\limits_{[0,\infty)} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{\lambda^{k+1}}\right) d\tau(\lambda) \\ &= z^{n+1} \int\limits_{[0,\infty)} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda^{n+1}(\lambda - z)}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Если $z = |z|e^{i\varphi}$, $0 < \delta \leqslant |\varphi| \leqslant \pi$ и $\lambda \in [0, +\infty)$, то $|\lambda - z| \geqslant \lambda \sin\delta$. Поэтому

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} s_{-(k+1)}z^k \right| \leqslant \frac{|z|^{n+1}}{\sin\delta} s_{-(n+2)},$$

откуда следует (3.6).

Доказательство теоремы 3.4. Воспользуемся соотношением (3.6) лишь при $z = -x < 0$. При $n = 0$ из него следует, что

$$\lim_{x \downarrow 0} \int\limits_{[0,\infty)} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda + x} = s_{-1}. \tag{3.8}$$

Так как подынтегральная функция в (3.8) положительна при $x > 0$ и возрастает при убывании x, то, согласно известной теореме о предельном переходе,

$$\lim_{x\downarrow 0} \int\limits_{[0,\infty)} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda + x} = \int\limits_{[0,\infty)} \left(\lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{\lambda + x}\right) d\tau(\lambda) = \int\limits_{[0,\infty)} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda} \tag{3.9}$$

независимо от того, конечны или бесконечны части равенств (3.9). Из (3.8) и (3.9) вытекает (3.4) с $k = 1$. Допустим теперь, что (3.4) доказано для $k = 1, 2, \ldots, m$. Тогда в соответствии с (3.7) при $n = m - 1$ и $z = -x$

$$(-x)^{-m} \left(f(-x) - \sum_{k=0}^{m-1} s_{-(k+1)}(-x)^k\right) = \int\limits_{[0,\infty)} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda^m(\lambda + x)}. \tag{3.10}$$

В соответствии же с (3.6) при $n = m$

$$\lim_{x\downarrow 0}(-x)^{-m} \left(f(-x) - \sum_{n=0}^{m-1} s_{-(k+1)}(-x)^k\right) = s_{-(m+1)}. \tag{3.11}$$

Согласно упомянутой теореме о предельном переходе,

$$\lim_{x\downarrow 0} \int\limits_{[0,\infty)} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda^m(\lambda + x)} = \int\limits_{[0,\infty)} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda^{m+1}}. \tag{3.12}$$

Из (3.10), (3.11), (3.12) вытекает справедливость (3.4) для $k = m + 1$.

§4. Описание множества решений сильной проблемы моментов Стилтьеса

Согласно формуле обращения (0.3) по $\mathcal{S}$-функции f_τ, принадлежащей СПМС, однозначно восстанавливается решение τ. Поэтому для описания множества всех решений СПМС достаточно ограничиться описанием всех принадлежащих ей $\mathcal{S}$-функций f.

Наряду с СПМС

$$s_k = \int\limits_{[0,\infty)} \lambda^k d\tau(\lambda), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

будем рассматривать *сопутствующую* КПМС

$$s_k = \int\limits_{[0,\infty)} \lambda^k d\tau(\lambda), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Как уже было сказано, сопутствующая КПМС является определенной тогда и только тогда, когда расходится хотя бы один из рядов (0.16). В этом случае, конечно, определенной будет и СПМС, и ее единственное решение будет главной спектральной мерой стилтьесовской струны, отвечающей последовательности $\{s_k\}_0^\infty$.

Рассмотрим случай, когда сопутствующая КПМС является неопределенной. Ввиду того что множество ее решений совпадает с множеством спектральных мер соответствующей стилтьесовской струны, можно воспользоваться формулой (0.11), о которой теперь можно сказать, что она устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{S}$-функциями, принадлежащими КПМС, и произвольными $\widetilde{\mathcal{S}}$-функциями. Здесь нам удобно переписать эту формулу в виде

$$f(z) = \frac{a_1(z)g(z) + b_1(z)}{c_1(z)g(z) + d_1(z)}, \tag{4.1}$$

где $a_1(z) = \psi^+(l,z)$, $b_1(z) = \psi(l,z)$, $c_1(z) = \varphi^+(l,z)$, $d_1(z) = \varphi(l,z)$, а $g(z)$ — произвольная $\widetilde{\mathcal{S}}$-функция.

Выясним, каким условиям нужно подчинить $\widetilde{\mathcal{S}}$-функцию $g(z)$, для того чтобы определяемая ею $\mathcal{S}$-функция $f(z)$ принадлежала СПМС.

Согласно теоремам 3.3 и 3.4, $\mathcal{S}$-функция $f(z)$, принадлежащая сопутствующей КПМС, принадлежит также СПМС тогда и только тогда, когда при $z \to 0$ она асимптотически представляется рядом

$$s_{-1} + s_{-2}z + \cdots + s_{-(n+1)}z^n + \ldots$$

Воспользуемся изоморфизмом между кольцом формальных степенных рядов

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \cdots + u_n z^n + \ldots \tag{4.2}$$

и кольцом бесконечных нижних треугольных теплицевых матриц

$$U = \begin{pmatrix} u_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ u_1 & u_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n & \dots & \dots & \dots & u_0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

(все элементы выше главной диагонали равны нулю).

Если функция $u(z)$ при $z \to 0$ асимптотически представляется рядом (4.2), то будем писать $U \cong u(z)$.

Пусть $F \cong f(z)$, $G \cong g(z)$, $A_1 \cong a_1(z)$, $B_1 \cong b_1(z)$, $C_1 \cong c_1(z)$, $D_1 \cong d_1(z)$. Так как

$$g(z) = \frac{d_1(z)f(z) - b_1(z)}{-c_1(z)f(z) + a_1(z)},$$

то

$$G = (D_1F - B_1)(-C_1F + A_1)^{-1}.$$

Осталось найти все такие S-функции $g(z)$, для которых $G \cong g(z)$. Обозначим через $h, -h_0, -h_1, \dots, -h_n, \dots$ элементы первого столбца матрицы G^{-1}, после чего заметим, что $g(z)$ является S-функцией одновременно с функцией $h(z) = 1/g(1/z)$, которая асимптотически при $z \to \infty$ представляется рядом

$$h - h_0z^{-1} - h_1z^{-2} - \dots - h_nz^{-n-1} - \dots \tag{4.3}$$

Согласно теореме 3.2, все S-функции $h(z)$, асимптотически представляющиеся при $z \to \infty$ рядом (4.3), имеют вид

$$h(z) = h + \int\limits_{[0,\infty)} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z} = h + h_0(z),$$

где σ — решение КПМС

$$h_k = \int\limits_{[0,\infty)} \lambda^k d\sigma(\lambda), \quad k = 0, 1, \dots \tag{4.4}$$

и, следовательно, $h_0(z)$ принадлежит этой КПМС. Если проблема (4.4) является определенной, то определенной будет также исходная СПМС, и единственная принадлежащая ей $\mathcal{S}$-функция $f(z)$ получается по формуле

$$f(z) = \frac{a_1(z) + b_1(z)(h + h_0(1/z))}{c_1(z) + d_1(z)(h + h_0(1/z))}.$$

Здесь $h_0(z)$ есть КДП сингулярной стилтьесовской струны, отвечающей проблеме (4.4).

Предположим теперь, что проблема (4.4) неопределенная. Воспользуемся описанием всех $\mathcal{S}$-функций $h_0(z)$, принадлежащих проблеме (4.4),

$$h_0(z) = \frac{a_2(z)\widetilde{\omega}(z) + b_2(z)}{c_2(z)\widetilde{\omega}(z) + d_2(z)}, \tag{4.5}$$

где $\widetilde{\omega}(z)$ — произвольная $\widetilde{\mathcal{S}}$-функция. Описание всех $\mathcal{S}$-функций $h(z) = h + h_0(z)$, асимптотически представляющихся рядом (4.3), дается формулой

$$h(z) = \frac{(a_2(z) + hc_2(z))\widetilde{\omega}(z) + (b_2(z) + hd_2(z))}{c_2(z)\widetilde{\omega}(z) + d_2(z)}.$$

Положив $\omega(z) = 1/\widetilde{\omega}(1/z)$, получим, что

$$g(z) = 1/h(1/z) = \frac{d_2(1/z)\omega(z) + c_2(1/z)}{(b_2(1/z) + hd_2(1/z))\omega(z) + (a_2(1/z) + hc_2(1/z))},$$

где $\omega(z)$ вместе с $\widetilde{\omega}(z)$ пробегает весь класс $\widetilde{\mathcal{S}}$-функций. Подставив $g(z)$ в (4.1), придем к окончательному результату.

Теорема 4.1. *Описание всех $\mathcal{S}$-функций $f(z)$, принадлежащих заданной неопределенной сильной проблеме Стилтьеса, дается формулой*

$$f(z) = \frac{a(z)\omega(z) + b(z)}{c(z)\omega(z) + d(z)}, \tag{4.6}$$

где $\omega(z)$ пробегает класс $(\widetilde{\mathcal{S}})$, а матрица дробно-линейного преобразования получается по формуле

$$\begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(z) & b_1(z) \\ c_1(z) & d_1(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2(1/z) & b_2(1/z) \\ c_2(1/z) & d_2(1/z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что функции $a_i(z)$, $b_i(z)$, $c_i(z)$, $d_i(z)$, $i = 1, 2$ — целые функции либо порядка $< 1/2$, либо порядка $1/2$ минимального типа. Заметим, что определитель дробно-линейного преобразования (4.6) тождественно равен единице, так как этим свойством обладают матрицы дробно-линейных преобразований (4.1) и (4.5).

§5. Лунки Вейля и канонические решения

Пусть

$$f_\tau(z) = \int\limits_{[0,\infty)} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda - z} \tag{5.1}$$

— $\mathcal{S}$-функция, принадлежащая неопределенной СПМС. Зафиксировав z в верхней полуплоскости, заставим τ пробегать множество всех решений этой проблемы. Обозначим через $L(z)$ множество всех получающихся при этом значений $f_\tau(z)$. Очевидно, что $L(z)$ — выпуклое множество.

Теорема 5.1. *Множество $L(z)$ — выпуклая замкнутая лунка, ограниченная дугами окружностей, пересекающихся в точках $\underline{f}(z) = b(z)/d(z)$, $\bar{f}(z) = a(z)/c(z)$; параметрические уравнения граничных дуг имеют вид*

$$\omega = \frac{a(z)t + b(z)}{c(z)t + d(z)}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant +\infty, \tag{5.2}$$

$$\omega = \frac{a(z)(-t/z) + b(z)}{c(z)(-t/z) + d(z)}, \quad 0 \leqslant t \leqslant +\infty. \tag{5.3}$$

Эти дуги пересекаются под углом $\pi - \arg z$.

Доказательство. Воспользуемся тем, что $\omega(z)$ являются $\mathcal{S}$-функцией тогда и только тогда, когда обе функции $\omega(z)$ и $z\omega(z)$ являются $\mathcal{R}$-функциями, иными словами, когда $0 \leqslant \arg\omega(z) \leqslant \pi$ и $0 \leqslant \arg(z\omega(z)) \leqslant \pi$ при $\operatorname{Im} z > 0$. Это означает, ввиду выпуклости множества $\mathcal{S}$-функций, что при фиксированном z ($\operatorname{Im} z > 0$) значения $\mathcal{S}$-функций в этой точке заполняют угол между лучами $\arg\omega = 0$ и $\arg\omega = \pi - \arg z$, включая сами лучи. Параметрические уравнения этих лучей имеют вид $\omega = t$ $(0 \leqslant t \leqslant +\infty)$ и $\omega = -t/z$ $(0 \leqslant t \leqslant +\infty)$. Множество $L(z)$ есть образ указанного угла при дробно-линейном преобразовании (4.6) и потому является круговой лункой, ограниченной дугами (5.2) и (5.3). Утверждение об угле между дугами следует из того, что дробно-линейное преобразование сохраняет углы между кривыми.

Изучим решения τ сильной проблемы моментов Стилтьеса, которые определяют точки на граничных дугах лунки $L(z)$. Условимся называть решение τ *каноническим решением 1-го рода*, соответственно *2-го рода*, если отвечающая ему функция $f_\tau(z)$ получается по формуле (4.6) при $\omega(z) \equiv t$ соответственно $\omega(z) = -t/z$, $0 < t < +\infty$. Угловые точки $\underline{f}(z) = b(z)/d(z)$ и $\bar{f}(z) = a(z)/c(z)$ лунки $L(z)$ получаются при $t = 0$ и $t = \infty$ соответственно. Отвечающие им решения СПМС назовем соответственно *нижним* и *верхним главными решениями*. В следующей теореме один результат Стилтьеса, касающийся экстремальных свойств главных решений для КПМС, переносится на СПМС, но доказательство отлично от доказательства Стилтьеса: оно основано на описании всех решений проблемы, которым Стилтьес не располагал.

Теорема 5.2. *Произвольная S-функция f, принадлежащая неопределенной СПМС, при любом $x > 0$ удовлетворяет неравенствам*

$$\underline{f}(-x) \leqslant f(-x) \leqslant \bar{f}(-x).$$

Если для некоторого $x_0 > 0$ имеет место равенство $f(-x_0) = \underline{f}(-x)$, соответственно $f(-x_0) = \bar{f}(-x_0)$, то $f = \underline{f}$, соответственно $f = \bar{f}$.

Доказательство. Воспользовавшись формулой (4.6) и тем, что определитель дробно-линейного преобразования (4.6) равен 1, получим

$$f(-x) - \underline{f}(-x) = \frac{\omega(-x)}{c(-x)d(-x)\omega(-x) + d^2(-x)},$$
$$f(-x) - \bar{f}(-x) = \frac{1}{c^2(-x)\omega(-x) + c(-x)d(-x)}.$$

Правые части этих равенств неотрицательны, так как $\omega(-x) \geqslant 0$, $c(-x)d(-x) > 0$. Первое неравенство вытекает из определения S-функции, для обоснования второго воспользуемся следующим предложением.

Предложение D [17]. Для того чтобы преобразование

$$\omega(z) \longrightarrow \frac{\alpha(z)\omega(z) + \beta(z)}{\gamma(z)\omega(z) + \delta(z)}$$

(об аналитических свойствах коэффициентов не делается никаких предположений) отображало класс $(\widetilde{S})$ в выпуклое множество, необходимо и достаточно, чтобы $\delta(z)/\gamma(z) \in (S)$.

Из этого предложения следует, что $d(z)/c(z) \in (S)$, поэтому $d(-x)/c(-x) > 0$ при $x > 0$, откуда $c(-x)d(-x) > 0$ при $x > 0$.

Если $f(-x_0) = \underline{f}(-x_0)$, то $\omega(-x_0) = 0$ и тогда $\omega(z) \equiv 0$, откуда $f = \underline{f}$. Если же $f(-x_0) = \bar{f}(-x_0)$, то $\omega(-x_0) = \infty$, так что $\omega(z) = \infty$ и $f = \bar{f}$.

Для изучения канонических решений предварительно приведем несколько простых предложений об S-функциях.

Назовем S-функцию f *квазимероморфной*, если в ее представлении (0.4) мера τ сосредоточена на дискретном множестве с двумя точками сгущения 0 и ∞. Очевидно, что точки этого множества являются простыми полюсами функции f, и ими исчерпываются все полюсы. Между соседними полюсами функция $f(x)$ регулярна, ее производная положительна, так что функция там строго возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Отсюда и из того, что отличная от тождественного нуля S-функция положительна на $(-\infty, 0)$, сразу получаем следующие предложения.

Лемма 5.1. *Все корни квазимероморфной S-функции положительные, простые и строго перемежаются с ее полюсами.*

Лемма 5.2. *Если S-функция $f(z)$ квазимероморфна, то при увеличении $t > 0$ каждый корень функции $t + f(z)$ смещается влево и при $t \to +\infty$ имеет своим пределом ближайший слева полюс функции $f(z)$.*

Теорема 5.3. *S-функции $\underline{f}$ и $\bar{f}$ квазимероморфны, их полюсы строго перемежаются.*

Доказательство. Функция $c(z) = d_1(z)b_2(1/z) + c_1(z)d_2(1/z) + hd_1(z)d_2(1/z)$ аналитична в $\mathbb{C} \setminus \{0, \infty\}$ и $\not\equiv 0$, поэтому она не может иметь точек сгущения корней, отличных от 0 и ∞. Докажем, что 0 является такой точкой. Функция $d_2(z)$ — целая, ее корни положительны и сгущаются к ∞ и, следовательно, корни функции $d_2(1/z)$ положительны и сгущаются к 0. Ввиду тождества

$$a_2(z)d_2(z) - b_2(z)c_2(z) = 1$$

функции $d_2(z)$ и $b_2(z)$ не могут иметь общих корней. Так как $b_2(z)/d_2(z) \in (S)$, то также $d_2(1/z)/b_2(1/z) \in (S)$, вследствие чего корни функций $d_2(1/z)$ и $b_2(1/z)$ строго перемежаются, поэтому в соседних корнях функции $d_2(1/z)$ функция $b_2(1/z)$ имеет значения противоположных знаков.

Ввиду того что $d_1(0) = \varphi(l, 0) = 1$, функция $d_1(z)$ положительна на отрезке $[0, \eta)$, где η — достаточно малое положительное число. Пусть α и β

— соседние корни функции $d_2(1/z)$, находящиеся в $[0,\eta)$, тогда значения $c(\alpha) = d_1(\alpha)b_2(1/\alpha)$ и $c(\beta) = d_1(\beta)b_2(1/\beta)$ имеют противоположные знаки, так что между α и β находится корень функции $c(z)$. Отсюда следует, что корни функции $c(z)$ сгущаются к нулю. Аналогично доказывается, что корни этой функции сгущаются к ∞. Итак, $\mathcal{S}$-функция $\bar{f}(z) = a(z)/c(z)$ квазимероморфна. Функция $\underline{f}(z) = b(z)/d(z)$ также квазимероморфна, это следует из того, что $d(z)/c(z) \in (\overline{\mathcal{S}})$ (см. предложение D), так что корни функций $c(z)$ и $d(z)$ строго перемежаются и поэтому корни функций $d(z)$ также сгущаются к 0 и к ∞. Из перемежаемости корней функций $c(z)$ и $d(z)$ также следует перемежаемость полюсов функций $\underline{f}$ и $\bar{f}$.

Пусть f — некоторая квазимероморфная $\mathcal{S}$-функция, принадлежащая СП-МС. Занумеруем ее полюсы с помощью целых чисел, выбрав каким-либо образом полюс, который нумеруется нулем:

$$(0<)\cdots < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

Интегральное представление этой функции превращается в ряд

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\rho_j}{\lambda_j - z} \quad (\rho_j > 0)$$

и в соответствии с этим

$$s_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \rho_j \lambda_j^k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Как это принято в проблеме моментов, для удобства речи число ρ_j будем называть массой соответствующего решения, а λ_j — точкой сосредоточения этой массы.

Обозначим через ξ_j, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ точки сосредоточения масс нижнего главного решения (корни функции $d(z)$), нумеруя их в порядке возрастания, выбрав в качестве ξ_0 любую из них. Точки сосредоточения масс верхнего главного решения обозначим через η_j, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, также нумеруя их в порядке возрастания; в качестве η_0 выбираем из них ближайшую к ξ_0 слева. В соответствии с теоремой 5.3 имеем

$$\cdots < \eta_{-1} < \xi_{-1} < \eta_0 < \xi_0 < \eta_1 < \xi_1 < \dots$$

Теорема 5.4. (a) *Точки λ_j сосредоточения масс канонического решения первого рода, определяемого формулой (5.2), при увеличении t от 0 до $+\infty$ сдвигаются влево, смещаясь от ξ_j до η_j.* (b) *Точки μ_j сосредоточения масс канонического решения второго рода, определяемого формулой (5.3), при увеличении t от 0 до $+\infty$ сдвигаются вправо, смещаясь от ξ_j до η_{j+1}.*

Доказательство. Точки сосредоточения масс канонического решения первого рода являются корнями функции $c(z)t + d(z)$ $(t > 0)$, а также функции

$$(c(z)t + d(z))/c(z) = t + (d(z)/c(z)).$$

Так как $d(z)/c(z)$ есть квазимероморфная $\mathcal{S}$-функция, то утверждение (a) следует из леммы 5.2.

Точки сосредоточения масс канонического решения второго рода являются корнями функции $c(z)(-t/z) + d(z)$ $(t > 0)$, а также функции

$$(c(z)(-t/z) + d(z))/td(z) = -\frac{c(z)}{zd(z)} + \frac{1}{t}.$$

Снова воспользуемся тем, что функция $\underline{f}(z) = d(z)/c(z)$ есть квазимероморфная $\mathcal{S}$-функция. Одновременно с ней квазимероморфной $\mathcal{S}$-функцией также является $-1/z\underline{f}(z) = -c(z)/(zd(z))$, так что и в этом случае для обоснования утверждения (b) можно воспользоваться леммой 5.2.

Непосредственным следствием доказанной теоремы является

Теорема 5.5. *Для каждого $\xi > 0$ существует, и притом единственное, каноническое решение неопределенной СПМС с массой, сосредоточенной в точке ξ. Это решение является нижним главным, если $\xi = \xi_j$ для некоторого $j \in \mathbb{Z}$; оно является верхним главным, если $\xi = \eta_j$ для некоторого $j \in \mathbb{Z}$; оно является каноническим первого рода, если $\xi \in (\eta_j, \xi_j)$ для некоторого $j \in \mathbb{Z}$, оно является каноническим второго рода, если $\xi \in (\xi_j, \eta_{j+1})$ для некоторого $j \in \mathbb{Z}$.*

Список литературы

[1] Shohat J., Tamarkin J., *The problem of moments*, Amer. Math. Soc., New York, 1943.

[2] Ахиезер Н. И., *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею*, Физматгиз, М., 1961.

[3] Jones W. B., Thron W. J., Waadeland H., *A strong Stieltjes moment problem*, Trans. Amer. Math. Soc. **261** (1980), 503-528.

[4] Jones W. B., Thron W. J., *Survey of continued fraction methods of solving moment problems and related topics*, Analytic Theory of Continued Fractions (Loen, 1981), Lecture Notes in Math., vol. 932, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982, pp. 4-37.

[5] Njåstad O., *Solutions of the strong Stieltjes moment problem*, Methods Appl. Anal. **2** (1995), no. 3, 320-347.

[6] Нудельман А. А., *О применении вполне и абсолютно монотонных последовательностей к проблеме моментов*, Успехи мат. наук **8** (1953), № 6, 119-124.

[7] Натансон И. П., *Добавление к теоремам Хаусдорфа о моментных последовательностях*, Докл. АН СССР **106** (1956), № 2, 191-194.

[8] Крейн М. Г., *Общие теоремы о позитивных функционалах*, Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн, О некоторых вопросах теории моментов, ГОНТИ Украины, Харьков, 1938, сс. 121-150.

[9] Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г., *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем*, Гостехиздат, М.-Л., 1950.

[10] Крейн М. Г., *Об одном обобщении исследований Стилтьеса*, Докл. АН СССР **87** (1952), № 6, 881-884.

[11] Кац И. С., Крейн М. Г., *О спектральных функциях струны*, Доп. II к кн.: Ф. Аткинсон, Дискретные и непрерывные граничные задачи, Мир, М., 1968, сс. 648-737.

[12] Стилтьес Т., *Исследования о непрерывных дробях*, ГОНТИ Украины, Харьков-Киев, 1936.

[13] Кац И. С., Крейн М. Г., *R-функции — аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя*, Доп. I к кн.: Ф. Аткинсон, Дискретные и непрерывные граничные задачи, Мир, М., 1968, сс. 629-647.

[14] Крейн М. Г., Нудельман А. А., *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*, Наука, М., 1973.

[15] Кац И. С., *Степенные моменты отрицательных порядков главной спектральной функции струны*, Укр. мат. ж. **48** (1996), № 9, 1209-1222.

[16] Ахиезер Н. И., Крейн М. Г., *L-проблема моментов*, Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн, О некоторых вопросах теории моментов, ГОНТИ Украины, Харьков-Киев, 1938, сс. 4-120.

[17] Nudel'man A. A., *Some properties of linear-fractional transformations and the harmonic mean of matrix-functions*, Matrix and Operator Valued Functions, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 72, Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 171-184.

Одесская государственная
академия пищевых технологий
Украина, 270039, Одесса, Канатная, 112

Поступило 2 февраля 1996 г.

Одесская государственная
академия строительства и архитектуры
Украина, 270029, Одесса, ул. Дидрихсона, 4