Сибирский математический журнал
Июль—август, 1999. Том 40, № 4

УДК 517.54

СВОЙСТВО МОРФИЗМА ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИСКАЖЕНИЕМ НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА*)

Н. С. Даирбеков

Посвящаю Ю. Г. Решетняку
в связи с его 70-летием

Формулировка основного результата

Отображения с ограниченным искажением в евклидовых пространствах (см., например, [1]) были введены Ю. Г. Решетняком и представляют собой неоднолистный аналог квазиконформных отображений. Мостовым [2] было инициировано изучение квазиконформных отображений на группе Гейзенберга в связи с доказательством его известной теоремы жесткости локально симметрических пространств. В настоящее время теория квазиконформных отображений на группе Гейзенберга (а также на более общих стратифицированных нильпотентных группах (группах Карно)) доведена практически до той же степени полноты, что и в евклидовой ситуации [3, 4]. В [5] Хейнонен и Холопайнен продемонстрировали возможность построения теории отображений с ограниченным искажением (квазирегулярных отображений) на группах Карно, однако априорное предположение гладкости в [5] не является естественным и сильно ограничительно (в частности, квазиконформное отображение может быть не квазирегулярным в смысле [5]). В настоящей работе вводится общее аналитическое определение отображений с ограниченным искажением на группе Гейзенберга и для них доказывается свойство морфизма решений субэллиптических уравнений. Напомним, что для отображений с ограниченным искажением в евклидовом пространстве свойство морфизма решений соответствующих эллиптических уравнений было установлено Ю. Г. Решетняком, который также продемонстрировал его фундаментальное значение для теории пространственных отображений.

Нам удобно пользоваться следующей реализацией группы Гейзенберга $\mathbb{H}$: элементами $\mathbb{H}$ являются точки $q = (x, y, t) \in \mathbb{R}^3$, а умножение задается по правилу

$$(x, y, t)(x', y', t') = (x + x', y + y', t + t' + 2x'y - 2xy').$$

Векторные поля

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial t}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} - 2x\frac{\partial}{\partial t}, \quad T = \frac{\partial}{\partial t} \tag{1}$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Межвузовской НГП «Университеты России. Фундаментальные исследования» (код проекта №1797, финансирование осуществляется через Новосибирский госуниверситет).

составляют базис левоинвариантных векторных полей на $\mathbb{H}$, и между ними имеется единственное нетривиальное коммутационное соотношение

$$[X,Y] = -4T. \tag{2}$$

Подрасслоение касательного пространства T $(= T\mathbb{H})$, натянутое на X, Y, называется *горизонтальным касательным пространством* к $\mathbb{H}$ и обозначается через HT $(= HT\mathbb{H})$. Мы снабжаем слои HT скалярным произведением, объявляя $X(q), Y(q)$ ортонормированным базисом над каждой точкой $q \in \mathbb{H}$. Таким образом, $\mathbb{H}$ снабжено канонической субримановой структурой. Мера Лебега на $\mathbb{R}^3$ является биинвариантной мерой Хаара на $\mathbb{H}$.

Если $1 \leqslant s < \infty$ и $U \subset \mathbb{H}$ — открытое множество, мы определяем *горизонтальное соболевское пространство* $HW^{1,s}(U)$ следующим образом: функция $u : U \to \mathbb{R}$ принадлежит классу $HW^{1,s}(U)$, если $u \in L^s(U)$ и слабые производные Xu, Yu принадлежат пространству $L^s(U)$. Аналогичным образом определяется *локальное горизонтальное соболевское пространство* $HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U)$, $s \geqslant 1$. Для каждой функции $u \in HW^{1,1}_{\mathrm{loc}}(U)$ почти всюду в U определен *горизонтальный градиент*

$$\nabla u(q) = (Xu(q), Yu(q)).$$

Сопряженный оператор к ∇ обозначается через div. На гладких функциях u, v имеем

$$\operatorname{div}(u,v) = -(Xu + Yv).$$

Будем говорить, что $f : U \to \mathbb{H}$, $f = (f_1, f_2, f_3)$, — *отображение класса* $HW^{1,s}(U)$ $(HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U))$, $s \geqslant 1$, если каждая компонента отображения f принадлежит $HW^{1,s}(U)$ $(HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U))$. Если $f : U \to \mathbb{H}$ и $f \in HW^{1,1}_{\mathrm{loc}}(U)$, то для почти всех $q \in U$ определены векторы

$$Xf(q) = \begin{pmatrix} Xf_1(q) \\ Xf_2(q) \\ Xf_3(q) \end{pmatrix}, \quad Yf(q) = \begin{pmatrix} Yf_1(q) \\ Yf_2(q) \\ Yf_3(q) \end{pmatrix}.$$

Мы будем трактовать $Xf(q)$ и $Yf(q)$ как касательные векторы над точкой $f(q)$. Таким образом, $Xf(q), Yf(q) \in T_{f(q)}$.

Пусть $f : U \to \mathbb{H}$ — отображение класса $HW^{1,1}_{\mathrm{loc}}(U)$. Назовем f (*слабо*) *контактным*, если $Xf(q), Yf(q) \in HT_{f(q)}$ для почти всех точек $q \in U$. Если f — контактное отображение, то для почти всех $q \in U$ определен (*формальный*) *горизонтальный дифференциал* $Hf_*(q) : HT_q \to HT_{f(q)}$ следующим образом: $Hf_*(q)$ определен на базисных векторах X и Y равенствами

$$Hf_*(q)X = Xf(q) \in HT_{f(q)}, \quad Hf_*(q)Y = Yf(q) \in HT_{f(q)}$$

и продолжен на HT_q по линейности. Матрица формального горизонтального дифференциала имеет вид

$$Hf_* = \begin{pmatrix} Xf_1 & Yf_1 \\ Xf_2 & Yf_2 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы $Hf_*(q)$ называется *горизонтальным якобианом* f и обозначается через $HJ(q,f)$. Отображение $Hf_*(q)$ единственным образом продолжается до гомоморфизма алгебры Ли группы $\mathbb{H}$, и относительно базиса X, Y, T этот гомоморфизм имеет матрицу вида

$$f_*(q) = \begin{pmatrix} Hf_*(q) & 0 \\ 0 & HJ(q,f) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Определитель матрицы $f_*(q)$ называется *якобианом* f и обозначается через $J(q,f)$. В силу (3) $J(q,f) = (HJ(q,f))^2$.

Следующее определение является основным в данной работе.

Определение. Пусть $f : U \to \mathbb{H}$ — отображение открытого множества $U \subset \mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$. Мы называем f *отображением с ограниченным искажением* (*квазирегулярным отображением*), если

(a) f непрерывно,

(b) $f \in HW^{1,4}_{\mathrm{loc}}(U)$,

(c) f — контактное отображение,

(d) существует постоянная $K < \infty$ такая, что неравенство

$$\|Hf_*(q)\|^4 \leqslant KJ(q,f)$$

выполняется почти всюду в U. Здесь

$$\|Hf_*(q)\| = \max_{\xi \in HT_q, |\xi|=1} |Hf_*(q)\xi|$$

— операторная норма линейного отображения $Hf_*(q)$.

Замечание 1. Определение, данное выше, является в некотором смысле прямым переводом определения Ю. Г. Решетняка (см. [1]) отображений с ограниченным искажением с евклидовой ситуации на группу Гейзенберга. Аналогичное определение было дано в [5] с единственной, но существенной разницей. В [5] априорное предположение гладкости (п. (b) определения) значительно строже: $f \in W^{1,4}_{\mathrm{loc}}(U)$, где $W^{1,4}$ — стандартное соболевское пространство. В силу этого обстоятельства квазиконформные отображения на группе Гейзенберга могут быть не квазирегулярными в смысле [5].

Замечание 2. Из аналитического описания квазиконформных отображений на группах Карно, данного в [4], мы немедленно получаем, что гомеоморфизм $f : U \to \mathbb{H}$ области $U \subset \mathbb{H}$ является отображением с ограниченным искажением тогда и только тогда, когда f — квазиконформное отображение.

Замечание 3. Если f удовлетворяет всем условиям определения, кроме п. (a), т. е. f не обязательно непрерывно, то можно изменить f на множестве меры нуль так, что оно станет непрерывным в U и, следовательно, будет отображением с ограниченным искажением. Это утверждение будет доказано в конце статьи.

Одним из главных моментов при изучении отображений с ограниченным искажением евклидовых пространств является свойство морфизма решений соответствующих квазилинейных эллиптических уравнений, открытое Ю. Г. Решетняком. Плодотворность этого подхода в неевклидовой ситуации продемонстрирована в [5, 6]. Следующая теорема представляет основной результат настоящей работы. В ней мы устанавливаем свойство морфизма решений субэллиптических уравнений для отображений с ограниченным искажением.

Теорема. *Пусть $f : U \to V$ — отображение с ограниченным искажением открытого множества $U \subset \mathbb{H}$ в открытое множество $V \subset \mathbb{H}$. Предположим, что $w : V \to \mathbb{R}$ — C^2-гладкое решение уравнения*

$$\operatorname{div}(|\nabla w(q)|^2 \nabla w(q)) = 0 \tag{4}$$

в V. Тогда функция $w_f = w \circ f$ есть слабое решение уравнения

$$\operatorname{div} \mathscr{A}(q, \nabla w_f(q)) = 0, \tag{5}$$

где $\mathscr{A}(q,\xi) = \langle\theta(q)\xi,\xi\rangle\theta(q)\xi$, а (2×2)-матрица $\theta(q)$ равна

$$\theta(q) = J(q,f)^{1/2}(Hf_*(q))^{-1}(Hf_*(q))^{-1^T},$$

если $J(q,f)\neq 0$ (*заметим, что в этом случае матрица* $Hf_*(q)$ *невырожденна*), *и* $\theta(q) = \mathrm{Id}$ (*тождественная матрица*), *если* $J(q,f) = 0$.

Частными решениями уравнения (4) являются координатные функции x, y, t и функция $\ln|p|$, где $|p|$ — однородная норма элемента $p = (x,y,t)\in\mathbb{H}$:

$$|p| = ((x^2+y^2)^2+t^2)^{1/4}. \tag{6}$$

Таким образом, для каждого отображения f с ограниченным искажением координатные функции $f_i(q)$, $i = 1,2,3$, и функция $\ln|f(q)|$ являются решениями уравнения (5). Это обстоятельство является решающим при выводе свойств отображений с ограниченным искажением (см. [1] в евклидовой ситуации и [4] в случае групп Карно). Установив его для отображений с ограниченным искажением в смысле нашего определения, мы можем надеяться, что дальнейший анализ по схеме Ю. Г. Решетняка позволит вывести основные топологические свойства таких отображений (открытость, дискретность, сохранение ориентации).

Доказательство теоремы

Предварительно переформулируем условие контактности отображения в более удобных терминах.

Рассмотрим дифференциальные формы

$$dx, \quad dy, \quad \tau = 2x\,dy - 2y\,dx + dt. \tag{7}$$

Над каждой точкой $q = (x,y,t)\in\mathbb{H}$ эти формы задают базис кокасательного расслоения $T'\mathbb{H}$, двойственный базису (1). Следовательно, вектор $\xi\in T_q\mathbb{H}$ является горизонтальным тогда и только тогда, когда $\tau(\xi) = 0$. Таким образом, отображение $f: U\to\mathbb{H}$ класса $HW^{1,1}_{\mathrm{loc}}(U)$ является контактным тогда и только тогда, когда

$$\tau(Xf(q)) = 0, \quad \tau(Yf(q)) = 0 \tag{8}$$

для почти всех $q\in U$. Полезно записать эти равенства в развернутом виде:

$$\begin{aligned} 2f_1(q)Xf_2(q) - 2f_2(q)Xf_1(q) + Xf_3(q) = 0,\\ 2f_1(q)Yf_2(q) - 2f_2(q)Yf_1(q) + Yf_3(q) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Пусть теперь $w: V\to\mathbb{R}$ — C^2-гладкое решение уравнения (4). Тогда, интегрируя по частям, мы приходим к следующей интегральной форме уравнения (4):

$$\int\limits_V \left(|\nabla w(q)|^2 Xw(q)X\varphi(q) + |\nabla w(q)|^2 Yw(q)Y\varphi(q)\right)dq = 0 \tag{10}$$

для любой функции $\varphi: V\to\mathbb{R}$ класса $C_0^\infty(V)$. Перепишем интегральное уравнение (10) на языке дифференциальных форм. С этой целью введем дифференциальную форму

$$\sigma = (u\,dx + v\,dy)\wedge\tau,$$

полагая

$$u = -|\nabla w|^2 Yw, \quad v = |\nabla w|^2 Xw. \tag{11}$$

Тогда (10) эквивалентно тому, что

$$\int\limits_V \sigma \wedge d\varphi = 0, \tag{12}$$

где $d\varphi = X\varphi\, dx + Y\varphi\, dy + T\varphi\, \tau$ — дифференциал функции φ. В свою очередь, (12) означает, что обобщенный дифференциал формы σ равен нулю:

$$d\sigma = 0. \tag{13}$$

Предположим на минуту, что $f : U \to V$ — гладкое контактное отображение. В этом случае рассуждения хорошо известны, поэтому мы приведем только специфические детали.

По известному правилу

$$d(f^*\sigma) = f^* d\sigma, \tag{14}$$

где $f^*\sigma$ — прообраз формы σ под действием f. В силу (13) получаем

$$d(f^*\sigma) = 0. \tag{15}$$

Перепишем (15) в виде интегрального тождества:

$$\int\limits_U f^*\sigma \wedge d\varphi = 0 \tag{16}$$

для любой функции $\varphi : U \to \mathbb{R}$ класса $C_0^\infty(U)$. Теперь выразим (16) снова на языке дифференциальных уравнений. Для этого вычислим форму $f^*\sigma$. Имеем

$$f^*\sigma = \big((u \circ f) f^* dx + (v \circ f) f^* dy\big) \wedge f^*\tau. \tag{17}$$

Далее,

$$\begin{aligned} f^* dx &= X f_1\, dx + Y f_1\, dy + T f_1\, \tau, \\ f^* dy &= X f_2\, dx + Y f_2\, dy + T f_2\, \tau, \\ f^*\tau &= \tau(Xf)\, dx + \tau(Yf)\, dy + \tau(Tf)\, \tau. \end{aligned} \tag{18}$$

Заметим, что для гладкого контактного отображения верны следующие соотношения:

$$\tau(Xf) = \tau(Yf) = 0, \quad \tau(Tf) = HJ(f)\tau. \tag{19}$$

Используя (18) и (19) в (17), мы находим, что $f^*\sigma$ равна форме

$$HJ(f)((Xf_1(u \circ f) + Xf_2(v \circ f))\, dx + (Yf_1(u \circ f) + Yf_2(v \circ f))\, dy) \wedge \tau. \tag{20}$$

Таким образом, (16) принимает следующий вид:

$$\int\limits_U HJ(f)((Xf_1(u\circ f)+Xf_2(v\circ f))\, dx+(Yf_1(u\circ f)+Yf_2(v\circ f))\, dy)\wedge\tau\wedge d\varphi = 0 \tag{21}$$

для любой функции $\varphi : U \to \mathbb{R}$ класса $C_0^\infty(U)$. Интегральное тождество (21) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\operatorname{div} HJ(f)(-Xf_1(u \circ f) - Xf_2(v \circ f), Yf_1(u \circ f) + Yf_2(v \circ f)) = 0. \tag{22}$$

Осталось убедиться, что (22) совпадает с (5). Заметим, что для $w_f = w \circ f$ имеем $\nabla w_f = Hf_*^T \nabla w$. В точках, где $HJ(f) \neq 0$, матрица

Hf_* обратима и, следовательно, $\nabla w = Hf_*^{-1^T}\nabla w_f$. Используя последнее равенство и (11), выразим $u \circ f$ и $v \circ f$ через ∇w_f в таких точках и подставим результат в (22). В точках, где $HJ(f) = 0$, имеем $Hf_* = 0$ и, следовательно, $\nabla w_f = 0$. После простых алгебраических преобразований приходим к желаемому результату (5).

Пусть теперь $f : U \to V$ — произвольное отображение с ограниченным искажением. Приведенное выше рассуждение теряет силу начиная с формулы (14), хотя бы потому, что прообраз формы σ под действием f уже не определен. Однако заметим, что начиная с (21) все величины, участвующие в формулах, определены и последующие выкладки законны.

Изменим доказательство следующим образом. Усредним f, обозначая результат усреднения через f^ε (усреднение на группе Гейзенберга мы подробно рассмотрим в следующем параграфе). Тогда формулы (14)–(18) верны с заменой f на f^ε, поскольку их вывод не опирается на контактность отображения. В следующем параграфе мы докажем, что вместо (19) верны формулы

$$\begin{gathered} \tau(Xf^\varepsilon) \to 0, \quad \tau(Yf^\varepsilon) \to 0 \quad \text{в } HW^{1,2}_{\mathrm{loc}}(U), \\ \tau(Tf^\varepsilon) \to HJ(f) \quad \text{в } L^2_{\mathrm{loc}}(U) \end{gathered} \tag{19$'$}$$

при $\varepsilon \to 0$. Опираясь на эти соотношения, мы докажем в следующем параграфе, что при $\varepsilon \to 0$ форма $(f^\varepsilon)^*\sigma$ стремится к форме (20) в слабом смысле, т. е.

$$\int_U (f^\varepsilon)^*\sigma \wedge \omega \to \int_U HJ(f)((Xf_1(u \circ f) + Xf_2(v \circ f))\,dx \\ + (Yf_1(u \circ f) + Yf_2(v \circ f))\,dy) \wedge \tau \wedge \omega, \quad \varepsilon \to 0, \tag{20$'$}$$

для любой гладкой 1-формы ω с компактным носителем в U. Таким образом, мы снова приходим к (21), но уже для произвольного отображения f с ограниченным искажением. Как отмечалось, справедливость этого тождества эквивалентна выполнению уравнения (5). Теорема доказана с точностью до справедливости соотношения (20$'$).

Свойства усреднения на группе Гейзенберга

В данном разделе установим нужные свойства усреднения на группе Гейзенберга, в частности, докажем соотношение (20$'$). Усреднение функции есть свертка функции с усредняющим ядром. Поэтому мы начинаем со свертки.

Напомним, что если u и v — измеримые функции на $\mathbb{H}$, то *свертка* u и v на группе $\mathbb{H}$ определяется таким образом (см. [7]):

$$u * v(p) = \int_{\mathbb{H}} u(q)v(q^{-1}p)\,dq = \int_{\mathbb{H}} u(pq^{-1})v(q)\,dq, \quad p \in \mathbb{H}, \tag{23}$$

при условии, что интегралы сходятся. Мы будем использовать следующие свойства свертки (23).

Для функции $w \in L^s(U)$, $U \subset \mathbb{H}$, $s \geqslant 1$, обозначим L^s-норму w через $\|w\|_{s,U}$:

$$\|w\|_{s,U} = \Bigl(\int_U |u(q)|^s\,dq\Bigr)^{1/s},$$

причем мы опускаем обозначение U, если $U = \mathbb{H}$.

(a) *Предположим, что* $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ *и* $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1} + 1$. *Если* $u \in L^p(\mathbb{H})$ *и* $v \in L^q(\mathbb{H})$, *то* $u * v \in L^r(\mathbb{H})$ *и*

$$\|u * v\|_r \leqslant \|u\|_p \|v\|_q \quad \text{(неравенство Юнга).}$$

(b) *Если* L *— левоинвариантное векторное поле на* $\mathbb{H}$, *то*

$$L(u * v) = u * (Lv),$$

по крайней мере для гладких функций с компактным носителем.

Пусть $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ — правоинвариантные векторные поля такие, что $\widetilde{X}|_0 = X|_0$ и $\widetilde{Y}|_0 = Y|_0$:

$$\widetilde{X} = \frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial t}, \quad \widetilde{Y} = \frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial t}.$$

Заметим, что

$$X = \widetilde{X} + 4yT, \quad Y = \widetilde{Y} - 4xT, \quad [\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = 4T. \tag{24}$$

(c) *Если* u *и* v *— гладкие функции с компактным носителем, то*

$$(Xu) * v = u * (\widetilde{X}v), \quad (Yu) * v = u * (\widetilde{Y}v).$$

Обозначим через δ_r, $r > 0$, однородное растяжение на $\mathbb{H}$:

$$\delta_r(x, y, t) = (rx, ry, r^2 t), \quad (x, y, t) \in \mathbb{H}.$$

Результат растяжения часто записывается следующим образом:

$$\delta_r(q) = rq, \quad \delta_{1/r}(q) = q/r.$$

Напомним, что δ_r является гомоморфизмом группы Ли $\mathbb{H}$, причем для однородной нормы (6) имеем $|\delta_r(q)| = r|q|$.

Если ϕ — функция на $\mathbb{H}$ и $\varepsilon > 0$, то определим ϕ_ε так:

$$\phi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^4}\phi \circ \delta_{1/\varepsilon}, \quad \psi_\varepsilon(q) = \frac{1}{\varepsilon^4}\psi(\delta_{1/\varepsilon}(q)) = \frac{1}{\varepsilon^4}\psi(q/\varepsilon).$$

Заметим, что если $\phi \in L^1(\mathbb{H})$, то $\int\limits_{\mathbb{H}} \phi_\varepsilon(q)\, dq = \int\limits_{\mathbb{H}} \phi(q)\, dq$ для всех $\varepsilon > 0$.

(d) *Предположим, что* $\phi \in L^1$ *и* $\int\limits_{\mathbb{H}} \phi(q)\, dq = a$. *Тогда*

(i) *если* $u \in L^s$ $(1 \leqslant s < \infty)$, *то* $\|u * \phi_\varepsilon - au\|_s \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$,

(ii) *если* u *ограничено на* $\mathbb{H}$ *и непрерывно на открытом множестве* $\Omega \subset \mathbb{H}$, *то* $u * \phi_\varepsilon - au \to 0$ *равномерно на компактных подмножествах* Ω *при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательства свойств (a)–(d) можно найти в [7].

Однородная норма (6) порождает однородную метрику на $\mathbb{H}$ по формуле

$$\rho(p, q) = |p^{-1}q|. \tag{25}$$

Обозначим через $B_R(q)$ *шар в однородной метрике с центром* $q \in \mathbb{H}$ *и радиусом* $R > 0$:

$$B_R(q) = \{p \in \mathbb{H} \mid |p^{-1}q| < R\}.$$

Пусть теперь $\psi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ — бесконечно дифференцируемая неотрицательная функция с носителем в единичном шаре $B_1(0)$ и такая, что

$$\int\limits_{\mathbb{H}} \psi(q)dq = 1. \tag{26}$$

Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим функцию ψ_ε (*усредняющее ядро*). Очевидно, что ψ_ε — бесконечно дифференцируемая неотрицательная функция, имеющая носитель в шаре $B_\varepsilon(0)$, причем $\int\limits_{\mathbb{H}} \psi_\varepsilon(q)\,dq = 1$.

Допустим, что $u : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ — локально интегрируемая функция. Определим *усреднение* u^ε по формуле

$$u^\varepsilon(p) = u * \psi_\varepsilon(p). \tag{27}$$

Если $U \subset \mathbb{H}$ и $u : U \to \mathbb{R}$, то мы определяем усреднение u^ε по формуле $u^\varepsilon = (\bar{u})^\varepsilon$, где $\bar{u}$ — продолжение u нулем вне U.

Мы формулируем нужные свойства усреднения функций в следующей лемме.

Лемма 1. (a) *Если u — непрерывно в U, то $u^\varepsilon \to u$ локально равномерно в U при $\varepsilon \to 0$. Если $u \in L^s(U)$, $1 \leqslant s < \infty$, то $u^\varepsilon \to u$ в $L^s(U)$ при $\varepsilon \to 0$.*

(b) *Существуют функции $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ со свойствами:*

(i) *$\kappa, \lambda, \mu, \nu \in C_0^\infty(B_1(0))$, причем*

$$\int\limits_{\mathbb{H}} \kappa(q)\,dq = \int\limits_{\mathbb{H}} \nu(q)\,dq = 1, \qquad \int\limits_{\mathbb{H}} \lambda(q)\,dq = \int\limits_{\mathbb{H}} \mu(q)\,dq = 0;$$

(ii) *если $u \in HW^{1,1}_{\mathrm{loc}}(U)$ и $V \subset U$ — компакт, то для $p \in V$ и $\varepsilon < \operatorname{dist}(V, \partial U)$, где $\operatorname{dist}(V, \partial U)$ — расстояние от V до границы U в однородной метрике (25), выполняются равенства*

$$X(u^\varepsilon) = (Xu) * \kappa_\varepsilon + (Yu) * \lambda_\varepsilon, \quad Y(u^\varepsilon) = (Xu) * \mu_\varepsilon + (Yu) * \nu_\varepsilon.$$

(c) *Предположим, что $\gamma \in C_0^\infty(B_1(0))$. Если $u \in HW^{1,s}(U)$, $v \in L^s(U)$, $s \geqslant 2$, L — горизонтальное левоинвариантное векторное поле на $\mathbb{H}$ и V — компактное подмножество U, то*

$$L\big(u^\varepsilon(v * \gamma_\varepsilon) - (uv) * \gamma_\varepsilon\big) \to 0$$

в $L^{s/2}(V)$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. П. (a) очевиден из свойства (d) свертки.

Для доказательства п. (b) положим

$$\kappa = \psi + \widetilde{Y}(y\psi), \qquad \lambda = -\widetilde{X}(y\psi), \qquad \lambda = -\widetilde{Y}(x\psi), \qquad \nu = \psi + \widetilde{X}(x\psi).$$

Выполнение свойства (i) очевидно. Проверим выполнение свойства (ii). Без потери общности мы можем считать, что $u \in C_0^\infty(U)$. Тогда в силу свойства (b) свертки имеем в V

$$X(u^\varepsilon) = X(u * \psi_\varepsilon) = u * (X\psi_\varepsilon). \tag{28}$$

Используя равенства (24), выводим

$$\begin{aligned} X\psi_\varepsilon &= (\widetilde{X} + 4yT)\psi_\varepsilon = \widetilde{X}\psi_\varepsilon + y(\widetilde{X}\widetilde{Y} - \widetilde{Y}\widetilde{X})\psi_\varepsilon = \widetilde{X}\psi_\varepsilon + y\widetilde{X}\widetilde{Y}\psi_\varepsilon - y\widetilde{Y}\widetilde{X}\psi_\varepsilon \\ &= \widetilde{X}\psi_\varepsilon + \widetilde{X}(y\widetilde{Y}\psi_\varepsilon) - \widetilde{Y}(y\widetilde{X}\psi_\varepsilon) + \widetilde{X}\psi_\varepsilon = \widetilde{X}\psi_\varepsilon + \widetilde{X}(\widetilde{Y}(y\psi_\varepsilon) - \psi_\varepsilon) - \widetilde{Y}(\widetilde{X}(y\psi_\varepsilon)) + \widetilde{X}\psi_\varepsilon \\ &= \widetilde{X}(\psi_\varepsilon + \widetilde{Y}(y\psi_\varepsilon)) - \widetilde{Y}(\widetilde{X}(y\psi_\varepsilon)) = \widetilde{X}\kappa_\varepsilon + \widetilde{Y}\lambda_\varepsilon. \end{aligned}$$

Тогда в силу свойства (c) свертки (28) влечет справедливость первого равенства из свойства (ii). Проверка справедливости второго равенства из (ii) совершенно аналогична.

Перейдем к доказательству п. (c). Утверждение достаточно очевидно, если v — гладкая функция. В силу плотности гладких функций в L^s, п. (с) будет установлен, если для достаточно малых ε мы докажем неравенство

$$\|L(u^\varepsilon(v*\gamma_\varepsilon)-(uv)*\gamma_\varepsilon)\|_{s/2,V}\leqslant C\|\nabla u\|_{s,U}\|v\|_{s,U} \tag{29}$$

с постоянной C, не зависящей от v и ε. Мы докажем (29) для $\varepsilon<(1/2)\operatorname{dist}(V,\partial U)$, причем C также не зависит от u.

Положим

$$\widetilde U=\left\{q\in U\mid \operatorname{dist}(q,\partial U)>\frac12\operatorname{dist}(V,\partial U)\right\}.$$

Для $p\in V$ и $\varepsilon<(1/2)\operatorname{dist}(V,\partial U)$ имеем

$$\begin{aligned}u^\varepsilon(p)(v*\gamma_\varepsilon)(p)&=\int\limits_{\widetilde U}\psi_\varepsilon(q^{-1}p)u(q)\,dq\int\limits_{\widetilde U}\gamma_\varepsilon(r^{-1}p)v(r)\,dr\\&=\iint\limits_{\widetilde U\times\widetilde U}\psi_\varepsilon(q^{-1}p)\gamma_\varepsilon(r^{-1}p)u(q)v(r)\,dqdr.\end{aligned}$$

Используя (26), аналогично выводим

$$(uv)*\gamma_\varepsilon(p)=\iint\limits_{\widetilde U\times\widetilde U}\psi_\varepsilon(q^{-1}p)\gamma_\varepsilon(r^{-1}p)u(r)v(r)\,dq\,dr.$$

Следовательно,

$$u^\varepsilon(p)(v*\gamma_\varepsilon)(p)-(uv)*\gamma_\varepsilon(p)=\iint\limits_{\widetilde U\times\widetilde U}\psi_\varepsilon(q^{-1}p)\gamma_\varepsilon(r^{-1}p)[u(q)-u(r)]v(r)\,dqdr.$$

Далее, дифференцируя под знаком интеграла, получаем

$$\begin{aligned}&L\big(u^\varepsilon(v*\gamma_\varepsilon)-(uv)*\gamma_\varepsilon\big)(p)\\&=\iint\limits_{\widetilde U\times\widetilde U}\{(L(p)\psi_\varepsilon(q^{-1}p))\gamma_\varepsilon(r^{-1}p)+\psi_\varepsilon(q^{-1}p)(L(p)\gamma_\varepsilon(r^{-1}p))\}[u(q)-u(r)]v(r)\,dqdr.\end{aligned}$$

Так как L — горизонтальное левоинвариантное векторное поле, имеем

$$L(p)\psi_\varepsilon(q^{-1}p)=\frac{1}{\varepsilon^4}\frac{1}{\varepsilon}(L\psi)(q^{-1}p/\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}(L\psi)_\varepsilon(q^{-1}p).$$

Аналогично

$$L(p)\gamma_\varepsilon(q^{-1}p)=\frac{1}{\varepsilon}(L\gamma)_\varepsilon(q^{-1}p).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&|L(u^\varepsilon(v*\gamma_\varepsilon)-(uv)*\gamma_\varepsilon)(p)|\\&\leqslant\iint\limits_{\widetilde U\times\widetilde U}\{|(L\psi)_\varepsilon(q^{-1}p)||\gamma_\varepsilon(r^{-1}p)|+\psi_\varepsilon(q^{-1}p)|(L\gamma)_\varepsilon(r^{-1}p)|\}\frac{|u(q)-u(r)|}{\varepsilon}|v(r)|\,dqdr.\end{aligned}\tag{30}$$

Так как $\widetilde U$ компактно вложено в U и $u\in HW^{1,s}(U)$, существует функция $g\in L^s(\widetilde U)$ такая, что для почти всех $q,r\in\widetilde U$ верно неравенство

$$|u(q)-u(r)|\leqslant\rho(q,r)(g(q)+g(r)), \tag{31}$$

причем $\|g\|_{s,\widetilde{U}} \leqslant C\|\nabla u\|_{s,U}$ с постоянной C, не зависящей от функции u (см., например, [4, 8]).

Заметим, что подынтегральное выражение в (30) отлично от нуля, только если $|q^{-1}p| < \varepsilon$ и $|r^{-1}p| < \varepsilon$, т. е. $\rho(q,r) < 2\varepsilon$. Учитывая этот факт и (31), выводим из (30) следующее неравенство:

$$
\begin{aligned}
|L(u^\varepsilon(v*\gamma_\varepsilon) - (uv)*\gamma_\varepsilon)(p)| &\leqslant 2\iint\limits_{\widetilde{U}\times\widetilde{U}} \{|(L\psi)_\varepsilon(q^{-1}p)|\,|\gamma_\varepsilon(r^{-1}p)| \\
&\quad + \psi_\varepsilon(q^{-1}p)|(L\gamma)_\varepsilon(r^{-1}p)|\}(g(q)+g(r))|v(r)|\,dqdr \\
&= 2\Big\{\int\limits_{\widetilde{U}} |(L\psi)_\varepsilon(q^{-1}p)|g(q)\,dq \int\limits_{\widetilde{U}} |\gamma_\varepsilon(r^{-1}p)||v(r)|\,dr \\
&\quad + \int\limits_{\widetilde{U}} |(L\psi)_\varepsilon(q^{-1}p)|\,dq \int\limits_{\widetilde{U}} |\gamma_\varepsilon(r^{-1}p)|g(r)|v(r)|\,dr \\
&\quad + \int\limits_{\widetilde{U}} \psi_\varepsilon(q^{-1}p)g(q)\,dq \int\limits_{\widetilde{U}} |(L\gamma)_\varepsilon(r^{-1}p)||v(r)|\,dr \\
&\quad + \int\limits_{\widetilde{U}} \psi_\varepsilon(q^{-1}p)\,dq \int\limits_{\widetilde{U}} |(L\gamma)_\varepsilon(r^{-1}p)|g(r)|v(r)|\,dr\Big\} \\
&= 2\{(g*|(L\psi)_\varepsilon|)(p)(|v|*|\gamma_\varepsilon|)(p) + a((g|v|)*|\gamma_\varepsilon|)(p) \\
&\quad + (g*\psi_\varepsilon)(p)(|v|*|(L\gamma)_\varepsilon|)(p) + ((g|v|)*|(L\gamma)_\varepsilon|)(p)\},
\end{aligned}
$$

где

$$
a = \int\limits_{\mathbb{H}} |(L\psi)_\varepsilon(q^{-1}p)|\,dq = \int\limits_{\mathbb{H}} |L\psi|(q)\,dq.
$$

Из неравенства Гёльдера и свойства (a) свертки получаем

$$
\begin{aligned}
&\|L(u^\varepsilon(v*\gamma_\varepsilon) - (uv)\gamma_\varepsilon)\|_{s/2,V} \\
&\leqslant 2\{\|g*|(L\psi)_\varepsilon|\|_{s,V}\||v|*|\gamma_\varepsilon|\|_{s,V} + a\|(g|v|)*\gamma_\varepsilon\|_{s/2,V} \\
&\quad + \|g*\psi_\varepsilon\|_{s,V}\||v|*|(L\gamma)_\varepsilon|\|_{s,V} + \|(g|v|)*|(L\gamma)_\varepsilon|\|_{s/2,V}\} \\
&\leqslant 2\{\|(L\psi)_\varepsilon\|_1\|g\|_{s,\widetilde{U}}\|\gamma_\varepsilon\|_1\|v\|_{s,\widetilde{U}} + a\|\gamma_\varepsilon\|_1\|g|v|\|_{s/2,\widetilde{U}} \\
&\quad + \|\psi_\varepsilon\|_1\|g\|_{s,\widetilde{U}}\|(L\gamma)_\varepsilon\|_1\|v\|_{s,\widetilde{U}} + \|(L\gamma)_\varepsilon\|_1\|g|v|\|_{s/2,\widetilde{U}}\} \\
&\leqslant C\|g\|_{s,\widetilde{U}}\|v\|_{s,\widetilde{U}} \leqslant C\|\nabla u\|_{s,U}\|v\|_{s,U},
\end{aligned}
$$

завершая доказательство леммы.

Рассмотрим отображение $f: U \to \mathbb{H}$, $f = (f_1, f_2, f_3)$, открытого множества $U \subset \mathbb{H}$. Определим *усреднение отображения* f покомпонентно: $f^\varepsilon = (f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon, f_3^\varepsilon)$. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. *Если $f: U \to \mathbb{H}$ — отображение класса $HW^{1,s}_{\mathrm{loc}}(U)$, $s \geqslant 2$, и V — открытое подмножество U такое, что замыкание $\operatorname{cl} U$ компактно и лежит в U, то*

$$
\tau(X(f^\varepsilon)) - \big\{\tau(Xf)*\kappa_\varepsilon + \tau(Yf)*\lambda_\varepsilon\big\} \to 0 \quad \text{в } HW^{s/2}(V) \text{ при } \varepsilon \to 0,
$$

$$
\tau(Y(f^\varepsilon)) - \big\{\tau(Xf)*\mu_\varepsilon + \tau(Yf)*\nu_\varepsilon\big\} \to 0 \quad \text{в } HW^{s/2}(V) \text{ при } \varepsilon \to 0,
$$

где функции $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ определены в п. (b) леммы 1.

Доказательство. Докажем первое соотношение. В соответствии с п. (b) леммы 1 для $q \in V$ и достаточно малых ε имеем

$$\begin{aligned}\tau(X(f^\varepsilon))(q) &= 2f_1^\varepsilon(q)X(f_2^\varepsilon)(q) - 2f_2^\varepsilon(q)X(f_1^\varepsilon)(q) + X(f_3^\varepsilon)(q) \\ &= 2f_1^\varepsilon(q)((Xf_2)*\kappa_\varepsilon(q) + (Yf_2)*\lambda_\varepsilon(q)) \\ &- 2f_2^\varepsilon(q)((Xf_1)*\kappa_\varepsilon(q) + (Yf_1)*\lambda_\varepsilon(q)) + ((Xf_3)*\kappa_\varepsilon(q) + (Yf_3)*\lambda_\varepsilon(q)) \\ &= 2f_1^\varepsilon(q)[(Xf_2)*\kappa_\varepsilon(q)] - 2f_2^\varepsilon(q)[(Xf_1)*\kappa_\varepsilon(q)] + (Xf_3)*\kappa_\varepsilon(q) \\ &+ 2f_1^\varepsilon(q)[(Yf_2)*\lambda_\varepsilon(q)] - 2f_2^\varepsilon(q)[(Yf_1)*\lambda_\varepsilon(q)] + (Yf_3)*\lambda_\varepsilon(q).\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\tau(Xf)*\kappa_\varepsilon(q) &= (2f_1Xf_2 - 2f_2Xf_1 + Xf_3)*\kappa_\varepsilon(q) \\ &= 2(f_1Xf_2)*\kappa_\varepsilon(q) - 2(f_2Xf_1)*\kappa_\varepsilon(q) + (Xf_3)*\kappa_\varepsilon(q),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau(Yf)*\lambda_\varepsilon(q) &= (2f_1Yf_2 - 2f_2Yf_1 + Yf_3)*\lambda_\varepsilon(q) \\ &= 2(f_1Yf_2)*\lambda_\varepsilon(q) - 2(f_2Yf_1)*\lambda_\varepsilon(q) + (Yf_3)*\lambda_\varepsilon(q).\end{aligned}$$

Следовательно, для $q \in V$

$$\begin{aligned}&\tau(X(f^\varepsilon)) - \{\tau(Xf)*\kappa_\varepsilon + \tau(Yf)*\lambda_\varepsilon\} \\ &= 2\{f_1^\varepsilon(q)[(Xf_2)*\kappa_\varepsilon(q)] - (f_1Xf_2)*\kappa_\varepsilon(q)\} - 2\{f_2^\varepsilon(q)[(Xf_1)*\kappa_\varepsilon(q)] - (f_2Xf_1)*\kappa_\varepsilon(q)\} \\ &+ 2\{f_1^\varepsilon(q)[(Yf_2)*\lambda_\varepsilon(q)] - (f_1Yf_2)*\lambda_\varepsilon(q)\} - 2\{f_2^\varepsilon(q)[(Yf_1)*\lambda_\varepsilon(q)] - (f_2Yf_1)*\lambda_\varepsilon(q)\}.\end{aligned}$$

Теперь сходимость каждого слагаемого к нулю в $HW^{1,s/2}(V)$ при $\varepsilon \to 0$ следует из п. (c) леммы 1. Доказательство второго соотношения леммы полностью аналогично. Лемма доказана.

В частности, лемма 2 влечет справедливость соотношений в первой строке (19′) для контактного отображения f класса $HW^{1,4}_{\mathrm{loc}}(U)$. Для обоснования соотношения во второй строке (19′) докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Если $f : U \to \mathbb{H}$ — C^2-гладкое отображение, то*

$$\tau(Tf) = (Xf_1)(Yf_2) - (Yf_1)(Xf_2) - \frac{1}{4}\{X(\tau(Yf)) - Y(\tau(Xf))\}. \tag{32}$$

Доказательство. Так как $T = -\frac{1}{4}[X,Y] = -\frac{1}{4}(XY - YX)$, имеем

$$\begin{aligned}\tau(Tf) &= 2f_1Tf_2 - 2f_2Tf_1 + Tf_3 \\ &= -\frac{1}{4}\{2f_1XYf_2 - 2f_1YXf_2 - 2f_2XYf_1 + 2f_2YXf_1 + XYf_3 - YXf_3\} \\ &= -\frac{1}{4}\{X(2f_1Yf_2) - 2(Xf_1)(Yf_2) - Y(2f_1Xf_2) + 2(Yf_1)(Xf_2) \\ &- X(2f_2Yf_1) + 2(Xf_2)(Yf_1) + Y(2f_2Xf_1) - 2(Yf_2)(Xf_1) + XYf_3 - YXf_3\} \\ &= -\frac{1}{4}\{X(2f_1Yf_2 - 2f_2Yf_1 + Yf_3) - Y(2f_1Xf_2 - 2f_2Xf_1 + Xf_3) \\ &- 4[(Xf_1)(Yf_2) - (Yf_1)(Xf_2)]\} \\ &= (Xf_1Yf_2 - Yf_1Xf_2) - \frac{1}{4}\{X(\tau(Yf)) - Y(\tau(Xf))\}.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

В частности, (32) и соотношения из первой строки (19′) влекут справедливость соотношения во второй строке (19′) для контактного отображения f класса $HW^{1,4}_{\mathrm{loc}}(U)$.

Лемма 4. *Если $f : U \to V$ — непрерывное контактное отображение класса $HW^{1,4}_{\mathrm{loc}}(U)$ и $\sigma = (u\,dx + v\,dy) \wedge \tau$ — форма с непрерывно дифференцируемым коэффициентами $u, v : V \to \mathbb{R}$, то при $\varepsilon \to 0$*

$$(f^\varepsilon)^*\sigma \to HJ(f)((Xf_1(u\circ f) + Xf_2(v\circ f))\,dx + (Yf_1(u\circ f) + Yf_2(v\circ f))\,dy) \wedge \tau$$

в слабом смысле, т. е. верно (20′) для любой гладкой 1-формы ω с компактным носителем в U. Это заключение также верно, если f не обязательно непрерывно, но коэффициенты формы σ являются аффинными функциями от (x, y, t): $u = u_1x + u_2y + u_3t + u_0$, $v = v_1x + v_2y + v_3t + v_0$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}(f^\varepsilon)^*\sigma &= ((u\circ f^\varepsilon)(f^\varepsilon)^*dx + (v\circ f^\varepsilon)(f^\varepsilon)^*dy) \wedge (f^\varepsilon)^*\tau \\ &= u\circ f^\varepsilon\{(Xf_1^\varepsilon\tau(Yf^\varepsilon) - Yf_1^\varepsilon\tau(Xf^\varepsilon))\,dx\wedge dy + (Xf_1^\varepsilon\tau(Tf^\varepsilon) - Tf_1^\varepsilon\tau(Xf^\varepsilon))\,dx\wedge\tau \\ &+ (Yf_1^\varepsilon\tau(Tf^\varepsilon) - Tf_1^\varepsilon\tau(Yf^\varepsilon))\,dy\wedge\tau\} + v\circ f^\varepsilon\{(Xf_2^\varepsilon\tau(Yf^\varepsilon) - Yf_2^\varepsilon\tau(Xf^\varepsilon))\,dx\wedge dy \\ &+ (Xf_2^\varepsilon\tau(Tf^\varepsilon) - Tf_2^\varepsilon\tau(Xf^\varepsilon))\,dx\wedge\tau + (Yf_2^\varepsilon\tau(Tf^\varepsilon) - Tf_2^\varepsilon\tau(Yf^\varepsilon))\,dy\wedge\tau\}.\end{aligned}$$

Ввиду соотношений (19′) достаточно доказать, что слагаемые, имеющие множителем Tf_1^ε или Tf_2^ε, стремятся к нулю в пространстве распределений. Докажем это для слагаемого $(u\circ f^\varepsilon)Tf_1^\varepsilon\tau(Xf^\varepsilon)$ (для остальных слагаемых такого вида все выкладки аналогичны).

Для функции $\varphi : U \to \mathbb{R}$ класса $C_0^\infty(U)$ выводим

$$\begin{aligned}\int\limits_U (u\circ f^\varepsilon)Tf_1^\varepsilon\tau(Xf^\varepsilon)\varphi &= -\frac{1}{4}\int\limits_U (u\circ f^\varepsilon)(XY - YX)f_1^\varepsilon\tau(Xf^\varepsilon)\varphi \\ &= \frac{1}{4}\int\limits_U g\{X(\varphi(u\circ f^\varepsilon)\tau(Xf^\varepsilon))Yf_1^\varepsilon - Y(\varphi(u\circ f^\varepsilon)\tau(Xf^\varepsilon))Xf_1^\varepsilon g\} \\ = \frac{1}{4}\int\limits_U g\{((u\circ f^\varepsilon)\tau(Xf^\varepsilon)X\varphi &+ \varphi X(u\circ f^\varepsilon)\tau(Xf^\varepsilon) + \varphi(u\circ f^\varepsilon)X(\tau(Xf^\varepsilon)))Yf_1^\varepsilon \\ - ((u\circ f^\varepsilon)\tau(Xf^\varepsilon)Y\varphi &+ \varphi Y(u\circ f^\varepsilon)\tau(Xf^\varepsilon) + \varphi(u\circ f^\varepsilon)Y(\tau(Xf^\varepsilon)))Xf_1^\varepsilon g\}.\end{aligned} \tag{33}$$

Заметим, что при $\varepsilon \to 0$

$$Xf_1^\varepsilon \to Xf_1 \text{ локально в } L^4 \text{ на } U, \tag{34}$$

$$Yf_1^\varepsilon \to Yf_1 \text{ локально в } L^4 \text{ на } U, \tag{35}$$

$$X(\tau(Xf^\varepsilon)), Y(\tau(Xf^\varepsilon)) \to 0 \text{ локально в } L^2 \text{ на } U, \tag{36}$$

$$u\circ f^\varepsilon \to u\circ f \text{ локально равномерно в } U, \tag{37}$$

$$\tau(Xf^\varepsilon) \to 0 \text{ локально в } L^4 \text{ на } U, \tag{38}$$

$$X(u\circ f^\varepsilon) \to ((Xu)\circ f)Xf_1 + ((Yu)\circ f)Xf_2 \text{ локально в } L^4 \text{ на } U, \tag{39}$$

$$Y(u\circ f^\varepsilon) \to ((Xu)\circ f)Yf_1 + ((Yu)\circ f)Yf_2 \text{ локально в } L^4 \text{ на } U. \tag{40}$$

Соотношения (34)–(37) следуют из вышеперечисленных свойств свертки и утверждений лемм 1 и 2. Обоснования требуют только три последних соотношения. Докажем соотношение (38). Имеем

$$\begin{aligned}\tau(Xf^\varepsilon) &= \tau(Xf^\varepsilon) - \tau(Xf) \\ &= 2f_1^\varepsilon Xf_2^\varepsilon - 2f_2^\varepsilon Xf_1^\varepsilon + Xf_3^\varepsilon - 2f_1Xf_2 + 2f_2Xf_1 - Xf_3 \\ &= 2(f_1^\varepsilon Xf_2^\varepsilon - f_1Xf_2) - 2(f_2^\varepsilon Xf_1^\varepsilon - f_2Xf_1) + (Xf_3^\varepsilon - Xf_3).\end{aligned}$$

Так как $f_i^\varepsilon \to f_i$ локально равномерно в U, а $Xf_i^\varepsilon \to Xf_i$ локально в L^4 на U, $i = 1, 2, 3$, то каждое слагаемое в последней сумме стремится к нулю локально в L^4 на U, что завершает доказательство соотношения (38).

Докажем соотношение (39). Имеем

$$X(u\circ f^\varepsilon) = ((Xu)\circ f^\varepsilon)Xf_1^\varepsilon + ((Yu)\circ f^\varepsilon)Xf_2^\varepsilon + ((Tu)\circ f^\varepsilon)\tau(Xf^\varepsilon).$$

Так как $(Xu)\circ f^\varepsilon \to (Xu)\circ f$, $(Yu)\circ f^\varepsilon \to (Yu)\circ f$ и $(Tu)\circ f^\varepsilon \to (Tu)\circ f$ локально равномерно в U, а $Xf_1^\varepsilon \to Xf_1$, $Xf_2^\varepsilon \to Xf_2$ и $\tau(Xf^\varepsilon) \to 0$ локально в L^4 на U, то (39) доказано. Последнее соотношение (40) устанавливается аналогично.

Записав интеграл в (33) как сумму интегралов, мы видим, что в силу установленных выше соотношений (34)–(40) каждое слагаемое в сумме стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, что завершает доказательство леммы в данном случае.

Если f не обязательно непрерывно, но форма σ имеет коэффициенты u и v, аффинно зависящие от x, y и t, то соотношения (34)–(36) и (39), (40) остаются верными, а соотношения (37)–(38) принимают следующий вид:

$$u\circ f^\varepsilon \to u\circ f \quad \text{локально в } L^4 \text{ на } U, \tag{37'}$$

$$\tau(Xf^\varepsilon) \to 0 \quad \text{локально в } L^2 \text{ на } U, \tag{38'}$$

и нужный результат следует из аналогичных соображений. Лемма доказана.

В частности, мы завершили доказательство формулы (20′) и тем самым доказательство теоремы.

В заключение обоснуем замечание 3.

Из леммы 4 и доказательства теоремы мы видим, что утверждение теоремы верно, когда w — одна из координатных функций. Таким образом, компоненты отображения, удовлетворяющего условиям замечания 3, являются решениями уравнения (5). Но в этом случае каждая из них становится непрерывной после изменения на множестве меры нуль, что доказывает замечание 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
2. *Mostow G. D.* Strong rigidity of locally symmetric spaces. Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1973. (Ann. Math. Studies; N 78).
3. *Korányi A., Reimann H. M.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. 1995. V. 111, N 1. P. 1–87.
4. *Водопьянов С. К.* Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1269–1295.
5. *Heinonen J., Holopainen I.* Quasiregular maps on Carnot groups. Helsinki, 1994. 36 p. (Preprint / Univ. of Helsinki, Reports of the Department of Mathematics; 50.)
6. *Capogna L.* Regularity of quasi-linear equations in the Heisenberg group // Comm. Pure Appl. Math. 1997. V. 50. P. 867–889.
7. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1982. (Princeton Mathematical Notes; 28).
8. *Hajlasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric space // Potential Anal. 1996. V. 5, N 4. P. 403–415.

г. Новосибирск *Статья поступила 18 сентября 1998 г.*