

Заочная школа СУНЦ НГУ, *Kvant*, 2013, Number 3, 56–59

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.84

March 17, 2025, 02:04:25





Рис. 2

каждого троса $l = 7$ м, площадь сечения $S = 0,6 \text{ см}^2$. Под весом дерева тросы растянуты на $\Delta l = 3$ мм, а углы их наклона почти одинаковы и равны $\alpha = 45^\circ$. Коэффициент упругости стали (модуль Юнга) $E = 216$ Гпа. Определите, сколько апельсинов созрело на дереве, если частота его покачиваний по вертикали уменьшилась на 0,1%. Масса апельсина $m \approx 150$ г. (4 балла)

6. Винни-Пух подумал: «Это ж-ж-ж неспроста!» – и решил, как он сам говорит, «модернезировать» дупло с пчелами, подключив к нему лампочку. Для того чтобы получить питание для лампочки, он снова подумал: «Раз пчела жужжит, значит, она заряжена из-за трения о воздух». После такой умной мысли он смело поместил два контакта от идущих от лампы проводков в рой пчел, жужжащих вокруг меда. Один контакт он поместил в центр, а второй – на край роя радиусом R . Сове поручили нарисовать график зависимости потенциала $\phi(r)$ внутри роя пчел от расстояния r между произвольной точкой внутри роя и его центром. Умный Кролик, по просьбе Пуха, рассчитал $\Delta\phi$ –

5. Яффо – один из главных древних портов Израиля (через него проходил знаменитый Морской путь – Египет, Сирия, Анатолия и Месопотамия). Достопримечательность Яффо – висящее апельсиновое дерево (рис.2). Дерево растет с 1993 года в горшке-яйце, которое (из-за нехватки земли) подвешено тросами к домам. Дерево живет и плодоносит. Длина

напряжение на лампочке. Известно, что Пух убедил Кролика в том, что пчел очень много, их концентрация $n = a/r$, где a – постоянный коэффициент, а заряд одной пчелы q . Проверьте проведенные расчеты. И еще – Пух просил подсчитать, сколько там всего пчел. (7 баллов)

7. В тридевятом царстве, тридесятом государстве жил-был царь. Решил царь жениться – позвал царь Бабу-Ягу помочь ему стать моложе и чтобы лысина исчезла. Однако травки да поганки не помогали. Приказал тогда царь Ивану-дураку придумать, как быть. А Иван был не совсем-то уж дурак – предложил провести по верхнему краю серебряной короны царя (рис.3) медный провод с изоляцией, а по нему пустить ток, для «роста волос под действием магнитного поля». А еще, для убедительности, Иван рассчитал значение магнитного поля в районе макушки царя (т.е. в точке, лежащей в одной плоскости с шестью вершинами «зубов» короны и равноудаленной от них). Повторите расчет и скажите, во сколько раз изменилось бы магнитное поле, если бы контур с таким же током имел вид кругового витка, проходящего через те же вершины. (7 баллов)



Рис. 3

8. Атом мюония (рис.4) состоит из неподвижного протона и отрицательно заряженного мюона массой $m_\mu = 206m_e$, где m_e – масса электрона, и зарядом, равным заряду электрона e . Определите, во сколько раз атом мюония меньше атома водорода. (6 баллов)

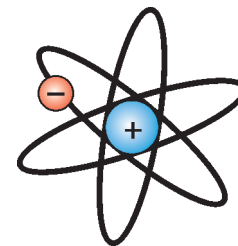


Рис. 4

Публикацию подготовил Е.Липовченко

ИНФОРМАЦИЯ

Заочная школа СУНЦ НГУ

В новосибирском Академгородке в составе Специализированного учебно-научного центра Новосибирского государственного университета (СУНЦ НГУ) физико-математического и химико-биологического профиля уже более 45 лет работает Заочная физико-математическая школа (ЗШ) для учащихся 5–11 классов общеобразовательных школ.

Учащиеся ЗШ, успешно выполнившие все задания, по окончании одиннадцатого класса получают удостоверение выпускников Заочной школы СУНЦ НГУ.

Преподаватели общеобразовательных учреждений могут работать по программам Заочной школы СУНЦ НГУ в форме факультативных занятий с группой учащихся.

Ежегодно лучшие ученики 9 и 10 классов ЗШ приглашаются в Летнюю школу, которая проводится в новосибирском Академгородке с 1 по 23 августа, для участия в конкурсе в СУНЦ НГУ.

В ЗШ СУНЦ НГУ принимаются все желающие, независимо от возраста. Прием в школу ведется круглогодично. Чтобы стать учеником ЗШ, необходимо прислать заявление, указав класс и отделения, на которых вы хотите учиться, свои фамилию, имя и отчество (печатными буквами), свой под-

робный адрес с индексом и выполненное первое задание. Задание выполняется в обычной ученической тетради и высылается простой или заказной бандеролью.

Можно присылать работы и по электронной почте. Требования к оформлению работ в электронном виде и подробную информацию можно найти на сайте Заочной школы:

<http://zfmsh.nsu.ru>

Наш адрес: 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, Заочная школа СУНЦ НГУ

Телефон/факс: (383) 363-4066

E-mail: distant@sesc.nsu.ru или zfmsh@yandex.ru

ПЕРВЫЕ ЗАДАНИЯ НА 2013/14 УЧЕБНЫЙ ГОД

Математическое отделение

МАТЕМАТИКА

5 класс

1. В прямоугольнике сумма двух каких-то сторон равна 9,5 см, а сумма трех каких-то сторон равна 7,5 см. Найдите периметр этого прямоугольника.

2. Автомобиль от пункта А до пункта Б, двигаясь с некоторой постоянной скоростью, едет 25 минут. Если бы

он ехал со скоростью на 3 км/ч больше, то весь путь проехал бы за 24 минуты. Найдите расстояние от пункта А до пункта В.

3. Найдите количество трехзначных номеров, записываемых цифрами от 0 до 9 включительно, у которых первая и последняя цифры не совпадают.

4. Представьте число 60 в виде суммы нескольких (больше одного) подряд идущих натуральных чисел.

5. Решите уравнение $1 - (2 - (3 - \dots - (100 - x) \dots)) = 100x$.

6. Все натуральные числа от 1 до 2013 включительно выписали подряд и нашли сумму всех цифр. Найдите, какой остаток получится при делении этой суммы на 9.

6 класс

1. Решите уравнение $1 - (2 - (3 - \dots - (1000 - x) \dots)) = 1000x$.

2. См. задачу 2 для 5 класса.

3. Найдите количество трехзначных номеров, записываемых цифрами от 0 до 9 включительно, у которых средняя цифра не совпадает ни с одной из крайних.

4. Представьте число 90 в виде суммы нескольких (больше одного) подряд идущих натуральных чисел.

5. Найдите, как нужно разрезать прямоугольник со сторонами 8 см и 4,5 см на две равные части, из которых можно составить квадрат.

6. Докажите, что на клетчатой бумаге треугольник с вершинами в узлах сетки не может иметь площадь, которая в единицах измерения площади, равных площади одной клетки, записывается в виде несократимой дроби со знаменателем 4.

7 класс

1. Решите уравнение $1 + 1 : (1 + 1 : (1 + 1 : (x + 2013))) = (1,2)^2$.

2. В стоячей воде скорость теплохода 35 км/ч, а скорость катера 55 км/ч. По реке из пункта А в пункт В вниз по течению теплоход идет 40 минут, а катер – 30 минут. Найдите расстояние от пункта А до пункта В.

3. Найдите количество трехзначных чисел, которые делятся на 3, но не делятся на 7.

4. В квадрате ABCD точка M на стороне AB и точка N на диагонали AC расположены так, что $AM : MB = 3 : 4$, $AN : NC = 5 : 2$. Докажите, что угол DNM прямой.

5. Представьте число 100 в виде суммы нескольких (больше одного) подряд идущих натуральных чисел.

6. См. задачу 6 для 6 класса.

8 класс

1. См. задачу 2 для 7 класса.

2. Решите уравнение $|x - 1| + |x - 3| + |x - 7| = 6$.

3. В прямоугольнике ABCD точки M и N – середины сторон AB и CD соответственно. Через точку M проводится прямая, пересекающая диагональ AC в точке P и продолжение стороны BC в точке Q, причем точка B лежит между точками C и Q. Докажите, что $\angle MNP = \angle MNQ$.

4. Докажите, что число $(\sqrt{2} - 1)^{100}$ можно представить в виде $\sqrt{m+1} - \sqrt{m}$, где m – натуральное число.

5. Докажите, что из любых 23 натуральных чисел можно выбрать ровно 12, сумма которых делится на 12.

6. Найдите, как нужно разрезать квадрат на 20 равных треугольников, чтобы из полученных частей можно было составить 5 равных квадратов.

9 класс

1. Найдите, при каком наименьшем значении a уравнение $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \dots + |x - 9| = a$ имеет решения.

2. Докажите, что число $(\sqrt{3} + 1)^{10}$ можно представить в виде $\sqrt{m+1024} + \sqrt{m}$, где m – натуральное число.

3. Докажите, что число $2015^4 + 4$ не является простым.

4. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проводится прямая, пересекающая окружности в точках M и N так, что AB является биссектрисой в треугольнике AMN. Докажите, что отношение отрезков BM и BN равно отношению радиусов окружностей.

5. Найдите количество трехзначных номеров, записываемых цифрами от 0 до 9 включительно, у которых сумма цифр делится на 3.

6. См. задачу 6 для 8 класса.

10 класс

1. По дорожке стадиона длиной 400 м из одной точки одновременно в одном направлении выбегают три спортсмена со скоростями 12 км/ч, 15 км/ч и 17 км/ч. Найдите, через какое наименьшее время спортсмены поравняются.

2. См. задачу 3 для 9 класса.

3. Решите уравнение $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{386 - x} = 6$.

4. Биссектрисы двух углов перпендикулярны, а их стороны пересекаются в четырех точках. Докажите, что эти точки расположены на одной окружности.

5. Найдите, на какую наибольшую степень числа 3 делится произведение всех натуральных чисел от 1 до 2013 включительно.

6. Найдите, как нужно разрезать квадрат на 60 равных треугольников, чтобы из полученных частей можно было составить 10 равных квадратов.

11 класс

1. В квадрате ABCD со стороной 1 точки M, N, K и L – середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Найдите площадь квадрата с вершинами в точках пересечения отрезков AN, BK, CL и DM.

2. Представьте число 10000 в виде суммы нескольких (больше одного) подряд идущих натуральных чисел.

3. Сфера касается ребер AB, BC, CD и DA пирамиды в точках M, N, K и L. Докажите, что точки M, N, K и L расположены в одной плоскости.

4. Решите уравнение $1 + x^2 + 5 \log_2^2 x = (2x + 1) \log_2 x^2$.

5. См. задачу 6 для 10 класса.

6. Докажите, что для каждой прямой на координатной плоскости можно найти параллельную ей прямую, которая не содержит ни одной точки с целочисленными координатами.

Физическое отделение

ФИЗИКА

7 класс

1. Пассажир поезда смотрит на вагоны встречного поезда. В момент, когда последний вагон встречного поезда прошел мимо его вагона, пассажир ощутил (по виду из его окна), что движение его вагона резко замедлилось. Почему? Объясните подробнее.

2. Определите высоту дома, если длина его тени равна L, а длина тени от вертикального столба высотой h равна l.

3. Почему падающие вертикально дождевые капли в безветренную погоду оставляют наклонные прямые полосы на стеклах равномерно движущегося вагона?

4. Муха летает со скоростью u между двумя баранами, которые хотят столкнуться лбами. Определите путь мухи до столкновения баранов, если скорости баранов v , а начальное расстояние между ними L .

5. Измерьте линейкой длину, ширину и высоту твердой коробки, например из-под обуви. Определите площадь каждой поверхности и объем коробки. Оцените ошибку каждого из проведенных выше измерений.

6. Измерьте диаметр цветного карандаша из набора карандашей с помощью обычной линейки с минимально возможной ошибкой.

8 класс

1. Оцените силу давления воды на плотину ГЭС, если ее длина $L = 1$ км, а высота $H = 100$ м.

2. Тело в воде весит в три раза меньше, чем в воздухе. Чему равна плотность тела?

3. Катер, двигаясь по течению реки из пункта A в пункт B , прошел весь путь за время t_1 , а двигаясь против течения, — за время t_2 . Расстояние между пунктами s . Найдите скорость течения реки.

4. Два поезда длиной $L_1 = 150$ м и $L_2 = 100$ м движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = 10$ м/с и $v_2 = 15$ м/с. В течение какого времени проходит первый поезд перед окном второго?

5. Тело массой m , упавшее с некоторой высоты, приобрело скорость v . С какой высоты упало тело? Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы поднять тело на эту высоту?

6. Штангист поднимает штангу массой $m = 140$ кг на высоту $H = 0,8$ м за время $t = 0,4$ с. Какую мощность он развивает?

9 класс

1. Из деревни Простоквашино по одной дороге одновременно в одном направлении отправляются Кот Матроскин и Дядя Федор. Дядя Федор идет пешком, а Матроскин катит на велосипеде. Через время t Матроскин догоняет Федора. С какой скоростью двигался Матроскин, если он ехал в четыре раза быстрее Федора, а дорога была круговой и имела радиус R ?

2. Шарик прикреплен к нитке. Если за нитку тянуть вверх с силой F_1 , он плавает, наполовину погрузившись в воду (рис.1). Для того чтобы шарик утонул, нитку нужно тянуть вниз с силой F_2 . Определите массу шарика.

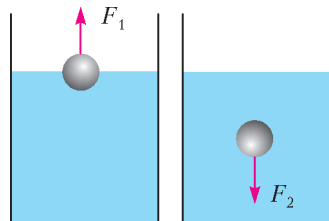


Рис. 1

3. Остановившись на ночлег, турист развел костер и повесил над костром котелок со снегом. После того как снег растаял, котелок оказался неполным, и турист бросил в него новую порцию снега. На рисунке 2 показан график изменения температуры в котелке. Во сколько раз

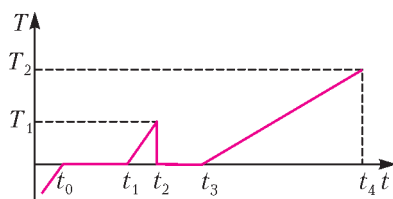


Рис. 2

новая порция снега увеличила количество воды в котелке, если она была добавлена в момент времени t_2 ? Оцените температуру снега, считая теплоемкости снега и воды одинаковыми.

4. Имеется бухта проволоки и диэлектрический щит, на котором смонтированы три клеммы, расположенные в вершинах правильного треугольника (рис.3). Сопротивление прямого отрезка проволоки между двумя клеммами равно R . Можно ли, подключая к клеммам разное количество прямых отрезков проволоки, получить сопротивление между клеммами с точным значением $(1/5)R$, $(2/5)R$, $(3/5)R$ и $(4/5)R$? Как это сделать?

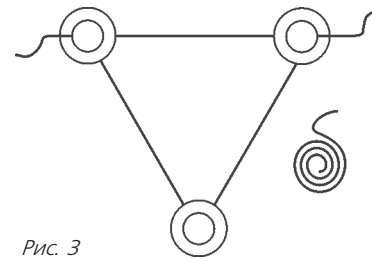


Рис. 3

10 класс

1. На рисунке 4 изображена карта. Красная линия на карте — дорога. По дороге движется автобус. В момент времени $t_1 = 12$ ч 30 мин он находился в точке A , а через двадцать минут — в точке B . Турист шел по прямой тропинке, изображенной синей линией. Он находился в точке A_1 , когда часы показывали время $t_3 = 8$ ч, и в точке B_1 — в 10 ч. Сколько времени турист будет на обочине дороги дожидаться автобуса?

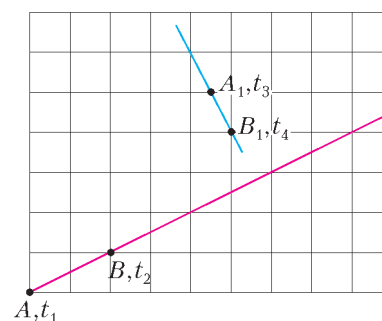


Рис. 4

2. Два встречных поезда одинаковой длины L двигались, разгоняясь с одним и тем же по модулю ускорением. В момент времени, когда встретились головы поездов, их скорости были v_1 и v_2 . Определите скорости поездов, когда разошлись их последние вагоны, если это произошло на расстоянии L_1 от места встречи в направлении движения первого поезда.

3. На весах стоит чашка (рис.5). В чашке плавает, погруженный на $3/4$ в воду, деревянный брусок кубической формы. Весы показывают P_1 . После того как брусок, приложив некоторую силу, утопили, показания весов стали P_2 . Когда брусок аккуратно вынули, весы стали показывать P_3 . Какая масса воды вылилась из чашки?

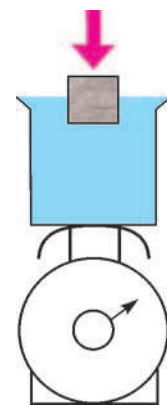


Рис. 5

4. Решите задачу 3 для 9 класса.

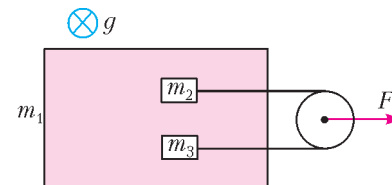


Рис. 6

5. Коврик массой m_1 и невесомый блок находятся на гладком столе (рис.6). На коврике лежат два бруска массами m_2 и m_3 , связанные переброшенной через блок невесомой нитью. При какой минимальной приложенной к блоку силе F оба бруска будут скользить по коврику? Коэффициент трения между брусками и ковриком μ . Трение между остальными предметами отсутствует.

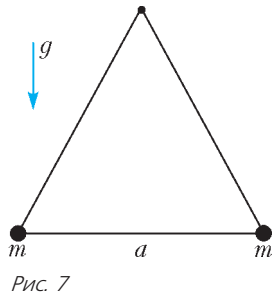


Рис. 7

11 класс

1. Решите задачу 1 для 10 класса.
2. Две одинаковые заряженные бусинки массой m каждая нанизаны на кольцо из легкой нити. Нить подвешена, и бусинки в положении равновесия образуют с точкой подвеса правильный треугольник со стороной a (рис.7). Определите заряд бусинок.

3. В проволочном квадрате две противоположные стороны соединили отрезком той же самой проволоки, из которой сделан квадрат. Определите отношение сопротивлений между точками A и B при двух разных способах соединения (рис.8).

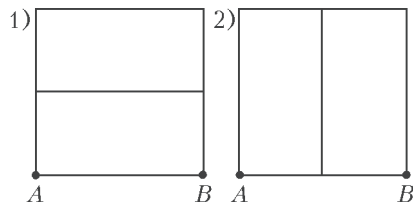


Рис. 8

4. Герметичный бак разделен горизонтальной перегородкой на

две части: нижняя имеет высоту h , а верхняя — $2h$ (рис.9). Верхняя секция бака наполовину заполнена жидкостью. Свободные объемы бака заполнены воздухом с давлением p . В перегородке открылась течь

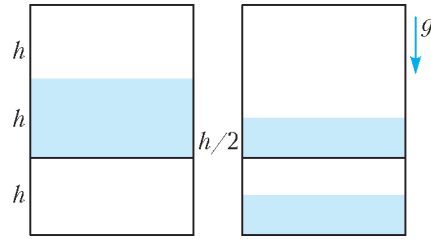


Рис. 9

— половина жидкости просочилась в нижний отсек, после чего процесс утечки остановился. Определите плотность жидкости.

5. Два одинаковых бруска лежат друг за другом на горизонтальном столе (рис.10). С левого края левого бруска с начальной скоростью v пускают шайбу. Она скользит по поверхности первого бруска, переходит на второй и прекращает скольжение посередине второго бруска. Трение брусков о стол отсутствует. Определите конечные скорости тел. Шайба и бруски имеют одинаковые массы.



Рис. 10

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №2)

1. По 50 рублей.

Пусть магазин покупал фломастеры у производителя по цене x рублей за один набор. Тогда выгода магазина от продажи одного набора равна $100 - x$ рублей. При покупке двух наборов покупатель получает третий в подарок, поэтому выгода магазина в этом случае составляет $2(100 - x) - x = 200 - 3x$ рублей. Приравняв эти две величины, находим, что $x = 50$.

2. На рисунке 1 показано, как комендант выполнял приказы своих начальников.



Рис. 1

3. Можно.

Из условия задачи следует, что в кармане у Пети все монеты, кроме, быть может, двух, точно рублевые, а все, кроме, воз-

можно, трех, обязательно двухрублевые. Поэтому из пяти вытасненных монет три будут рублевыми, а две — двухрублевыми.

4. 7 см или 11 см.

Докажем, что суммы длин кусочков, отпиленных от противоположных ножек табуретки, равны. Так как ножки параллельны друг другу, то плоскость, проведенная через любые две соседние ножки, будет параллельна плоскости, проведенной через две другие ножки. Значит, эти две плоскости пересекают любую третью плоскость (которая им не параллельна) по двум параллельным прямым.

Поскольку после Васиной диверсии табуретка стоит на полу, касаясь его всеми четырьмя ножками, то четырехугольник, образованный концами ножек, лежит в плоскости пола. Из сказанного в предыдущем абзаце следует, что этот четырехугольник — параллелограмм. Значит, его диагонали делятся точкой пересечения O пополам. Пусть Q — центр квадратного сидения табуретки. Рассмотрим трапецию, основаниями которой являются остатки противоположных ножек табуретки. Отрезок OQ — ее средняя линия, поэтому сумма оснований равна $2OQ$. Аналогично, точно такой же будет сумма оснований трапеции, построенной на другой паре противоположных ножек. Получается, что суммы длин оставшихся «противоположных» ножек равны. Так как изначально ножки у табуретки были одинаковыми, то и суммы длин «противоположных» отпиленных кусочков равны.

Пусть теперь x — длина потерянного кусочка. Есть три варианта, какой из оставшихся кусочков был по диагонали от потерянного. Рассмотрим каждый из вариантов, получим уравнения

$$8 + x = 9 + 10,$$

$$9 + x = 8 + 10,$$

$$10 + x = 8 + 9.$$

Решая их, находим, что потерянный кусочек мог иметь длину 7, 9 или 11 см. Но так как длины всех кусочков различны, то 9 см не подходит.