E. V. Mel'nikov, Bilinear maps of locally convex spaces, *Mat. Zametki*, 1990, Volume 47, Issue 3, 58–64

https://www.mathnet.ru/eng/mzm3195

Математические заметки

том 47 выпуск 3 март 1990

О БИЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВ

Е. В. Мельников

1. Пусть u — билинейное отображение произведения $X \times Y$ индуктивных пределов $X = \operatorname{ind} \lim X_i$ и $Y = \operatorname{ind} \lim Y_j$ в локально выпуклое пространство Z. В настоящей работе выясняется связь между непрерывностью, раздельной непрерывностью и гипонепрерывностью отображения u и соответствующей непрерывностью его сужений u_{ij} на $X_i \times Y_j$.

Приведем необходимые определения (см. также [1—3]).

Определение 1. Пусть X, Y, Z — топологические векторные пространства. Билинейное отображение u: $X \times Y \to Z$ называется *раздельно непрерывным*, если непрерывны частичные отображения $u(x, \cdot)$: $Y \to Z$ $(x \in X)$, $u(\cdot, y)$: $X \to Z$ $(y \in Y)$; и *гипонепрерывным*, если для любых ограниченных множеств $B \subset X$, $M \subset Y$ множества линейных операторов $\{u(x, \cdot) \mid x \in B\}$, $\{u(\cdot, y) \mid y \in M\}$ равностепенно непрерывны.

Определение 2. Пусть $\{X_i\}$ $(i \in I)$ — семейство топологических векторных пространств, X — векторное пространство, φ_i: $X_i \to X$ $(i \in I)$ — линейные отображения и $X = \operatorname{lo}(\bigcup_{i \in I} \varphi_i[X_i])$ (через $\operatorname{lo}(M)$ и $\operatorname{abs\,co}(M)$ обозначаем соответственно линейную и абсолютно выпуклую оболочку множества M). Сильнейшая локально выпуклая топология на X, при которой непрерывны все отображения φ_i $(i \in I)$, называется *индуктивной топологией*, а само пространство X, наделенное этой топологией, называется *индуктивным пределом* семейства топологических векторных пространств $\{X_i\}$ $(i \in I)$ относительно отображений φ_i $(i \in I)$ и обозначается $\operatorname{ind} \lim X_i$.

Определение 3. Индуктивный предел $X = \operatorname{ind} \lim X_i$ назовем *квазирегулярным*, если ограниченность подмножества B в X равносильна существованию таких индексов $i_1, \ldots, i_n$ и ограниченных множеств $B_1 \subset X_{i_1}, \ldots, B_n \subset X_{i_n}$, что

$$B \subset \operatorname{abs\,co}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(B_k)\right).$$

Определение 4. Индуктивный предел $X = \operatorname{ind} \lim X_i$ назовем *внутренним*, если все X_i $(i \in I)$ — векторные подпространства пространства X, φ_i $(i \in I)$ — вложения, и при $X_{i_1} \subset \subset X_{i_2}$ соответствующее вложение непрерывно.

Всюду далее, где не оговорено противное, предполагается, что $X = \operatorname{ind} \lim X_i$ относительно отображений φ_i $(i \in I)$, $Y = \operatorname{ind} \lim Y_j$ относительно отображений ψ_j $(j \in J)$, Z — локально выпуклое пространство, u: $X \times Y \to Z$ — билинейное отображение. Все векторные пространства рассматриваются над общим полем (вещественных или комплексных чисел). Для $i \in I$, $j \in J$ положим $u_{ij}(\cdot, \cdot) = u(\varphi_i(\cdot), \psi_j(\cdot))$. Билинейные отображения u_{ij}: $X_i \times Y_j \to Z$ можно рассматривать как сужения отображения u на $X_i \times Y_j$ $(i \in I, j \in J)$.

2. Перейдем к формулировке и доказательству основных теорем.

ТЕОРЕМА 1.

а) *Для раздельной непрерывности отображения u необходима и достаточна раздельная непрерывность отображений u_{ij} $(i \in I, j \in J)$.*

б) *Если u гипонепрерывно, то гипонепрерывны все отображения u_{ij} $(i \in I, j \in J)$.*

в) *Если X и Y — квазирегулярные индуктивные пределы, то гипонепрерывность u равносильна гипонепрерывности отображений u_{ij} $(i \in I, j \in J)$.*

г) *Если u непрерывно, то непрерывны все отображения u_{ij} $(i \in I, j \in J)$.*

Доказательство. а) Необходимость. Пусть $x \in X_i$. Тогда $\varphi_i(x) \in X$ и отображение $u(\varphi_i(x), \cdot)$: $Y \to Z$ непрерывно. Отсюда вытекает непрерывность всех отображений $u_{ij}(x, \cdot)$: $Y_j \to Z$ $(j \in J)$ [2, с. 596; 3, с. 73]. Аналогично получаем, что для всякого $y \in Y_j$ непрерывны отображения $u_{ij}(\cdot, y)$: $X_i \to Z$ $(i \in I)$. Таким образом, отображения u_{ij} $(i \in I, j \in J)$ раздельно непрерывны.

Достаточность. Пусть $x \in X$. Тогда найдутся индексы $i_1, \ldots, i_n$ такие, что $x = \varphi_{i_1}(x_1) + \ldots + \varphi_{i_n}(x_n)$ для некоторых $x_k \in X_{i_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Для произвольной окрестности W нуля в Z найдется такая абсолютно выпуклая окрестность W' нуля в Z, что $nW' \subset W$. Согласно условию существуют окрестности V_j^k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ нуля в Y_j $(j \in J)$ такие, что $u_{i_k j}(\{x_k\} \times V_j^k) \subset W'$. Положим $V^k = \operatorname{abs\,co}(\bigcup_{j \in J} \psi_j(V_j^k))$. Тогда V^k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ — окрестности нуля в Y и $u^k(V^k) \subset W'$, где $u^k = u(\varphi_{i_k}(x_k), \cdot)$. Теперь, положив $V = \bigcap_{k=1}^{n} V^k$, получим

$$u(\{x\} \times V) \subset u^1(V^1) + \ldots + u^n(V^n) \subset W' + \ldots + W' \subset nW' \subset W,$$

следовательно, отображение $u(x, \cdot)$ непрерывно. Аналогично доказывается непрерывность отображений $u(\cdot, y)$ $(y \in Y)$.

б) Зафиксируем произвольные $i \in I$, $j \in J$. Пусть B — произвольное ограниченное в X_i множество. В силу непрерывности

φ_i множество $\varphi_i[B]$ ограничено в X, поэтому для всякой окрестности W нуля в Z найдется окрестность V нуля в Y такая, что $u(\varphi_i[B] \times V) \subset W$. Таким образом, $u_{ij}(B \times V_j) \subset W$, где $V_j = \psi_j^{-1}[V]$ — окрестность нуля в Y_j. Аналогичное соотношение получаем для ограниченного подмножества в Y_j. Итак, отображения u_{ij} $(i \in I, j \in J)$ гипонепрерывны.

в) Предположим, что отображения u_{ij} $(i \in I, j \in J)$ гипонепрерывны. Для произвольного ограниченного в X множества B найдутся индексы $i_1, \ldots, i_n$ и ограниченные множества $B_1 \subset \subset X_{i_1}, \ldots, B_n \subset X_{i_n}$ такие, что $B \subset \operatorname{abs}\operatorname{co}(\bigcup_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(B_k))$. Пусть W — произвольная абсолютно выпуклая окрестность нуля в Z. Для всякого $j \in J$ найдется такая окрестность V_j нуля в Y_j, что $u_{i_k j}(B_k \times V_j) \subset W$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Тогда

$$u(B \times \psi_j(V_j)) \subset u(\operatorname{abs}\operatorname{co}(\bigcup_{k=1}^{n}\varphi_{i_k}[B_k]) \times \psi_j(V_j)) \subset W$$

для всех $j \in J$. Таким образом, $u(B \times V) \subset W$, где $V = \operatorname{abs}\operatorname{co}(\bigcup_{j \in J} V_j)$ — окрестность нуля в Y. Следовательно, множество $\{u(x, \cdot) \mid x \in B\}$ равностепенно непрерывно. Аналогично получаем равностепенную непрерывность множества $\{u(\cdot, y) \mid y \in \in M\}$ для всякого ограниченного подмножества M в Y.

г) Вытекает из непрерывности отображений φ_i $(i \in I)$ и ψ_j $(j \in J)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Для непрерывности и необходимо и достаточно, чтобы для всякой окрестности W нуля в Z можно было указать окрестности U_i нуля в X_i $(i \in I)$ и окрестности V_j нуля в Y_j $(j \in J)$ такие, что $u_{ij}(U_i \times V_j) \subset W$.*

Доказательство. Необходимость. Для произвольной окрестности W нуля в Z найдем окрестность U нуля в X и окрестность V нуля в Y, такие, что $u(U \times V) \subset W$. Тогда $U_i = \varphi_i^{-1}[U]$ и $V_j = \psi_j^{-1}[V]$ — окрестности нуля в X_i и Y_j соответственно, причем $u_{ij}(U_i \times V_j) \subset W$ $(i \in I, j \in J)$.

Достаточность. Для произвольной окрестности W нуля в Z найдется абсолютно выпуклая окрестность W' нуля в Z такая, что $W' \subset W$. По условию существуют окрестности нуля U_i в X_i $(i \in I)$ и окрестности V_j нуля в Y_j $(j \in J)$ такие, что $u_{ij}(U_i \times V_j) \subset W'$. Тогда

$$u((\bigcup_{i \in I}\varphi_i[U_i]) \times (\bigcup_{j \in J}\psi_j[V_j])) = \bigcup_{i \in I,\, j \in J} u_{ij}(U_i \times V_j) \subset W'.$$

Следовательно, $u(U \times V) \subset W' \subset W$, где $U = \operatorname{abs}\operatorname{co}(\bigcup_{i \in I}\varphi_i[U_i])$ — окрестность нуля в X, а $V = \operatorname{abs}\operatorname{co}(\bigcup_{j \in J}\psi_j[V_j])$ — окрестность нуля в Y. Таким образом, отображение u непрерывно в нуле, а значит, и непрерывно [3, с. 113]. Теорема доказана.

Следствие. *Если пространства X_i $(i \in I)$, Y_j $(j \in J)$ локально выпуклые, то для непрерывности и необходимо и достаточно, чтобы для любой непрерывной полунормы p в Z можно было указать непрерывные полунормы p_i в X_i $(i \in I)$ и непрерывные полунормы q_j в Y_j $(j \in J)$ такие, что $p(u_{ij}(x, y)) \leqslant \leqslant p_i(x)\, q_j(y)$ для всех $i \in I$, $j \in J$, $x \in X_i$, $y \in Y_j$.*

Аналогично теореме 2 доказывается

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $X = \operatorname{ind}\lim X_i$, Y — *топологическое векторное, а* Z — *локально выпуклое пространства. Тогда для непрерывности билинейного отображения* u: $X \times Y \to Z$ *необходимо и достаточно, чтобы для всякой окрестности* W *нуля в* Z *можно было указать окрестность* V *нуля в* Y *и окрестности* U_i *нуля в* X_i ($i \in I$) *такие, что* $u\,(\varphi_i\,[U_i] \times V) \subset W$.

3. Выясним условия, при которых из непрерывности отображений u_{ij} ($i \in I$, $j \in J$) вытекает непрерывность u. Сначала приведем две вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть* X, Y, Z — *локально выпуклые пространства, причем на* Z *есть непрерывная норма, а на* Y — *нет. Тогда всякое билинейное отображение* u: $X \times Y \to Z$, *удовлетворяющее условию* $\forall y \in Y \setminus \{0\}$ $\exists x \in X$ $u\,(x, y) \neq 0$, *не является непрерывным.*

Доказательство. Предположим, что u непрерывно. Пусть p — непрерывная норма на Z, а p_1 и p_2 — непрерывные полунормы в X и Y соответственно такие, что $p\,(u\,(x, y)) \leqslant p_1\,(x)\,p_2\,(y)$ для всех $x \in X$, $y \in Y$. Пусть y — ненулевой элемент из $\overset{-1}{p_2}\,[0]$. Тогда для всякого $x \in X$ $p\,(u\,(x, y)) = 0$, а значит, и $u\,(x, y) = 0$, что противоречит условию. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Если топологию локально выпуклого пространства* Y *можно задать такой системой полунорм* $\mathcal{P}$, *что для любых* $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ *полунорма* $\max\{p_1, \ldots, p_n\}$ *не является нормой, то на* Y *нет непрерывных норм.*

Доказательство очевидно.

Следующие два примера опровергают утверждение Р. Эдвардса [2, с. 670] о том, что непрерывность u равносильна непрерывности отображений u_{ij} ($i \in I$, $j \in J$).

Пример 1 [1, с. 192]. Пусть $X = \operatorname{ind}\lim \mathbf{R}^n$, Y — пространство всех вещественных последовательностей с топологией покоординатной сходимости, $Z = \mathbf{R}$, $u\,(x, y) = \sum_{n \geqslant 1} x_n y_n$, где $x = \{x_n\} \in X$, $y = \{y_n\} \in Y$. Полагая $X_n = \mathbf{R}^n$, получаем непрерывность отображений u_n: $X_n \times Y \to Z$ ($n \in \mathbf{N}$). Вместе с тем в силу леммы 1 само отображение u не является непрерывным.

Пример 2. Пусть $X = Z = \mathcal{D}^m\,(\mathbf{R})$, $Y = C^m\,(\mathbf{R})$, $m \in \mathbf{N}$ [2, с. 591]. Топология на Y определяется системой полунорм вида

$$q_i\,(\varphi) = \sup\{|\,\varphi^{(k)}\,(t)|;\ \ 0 \leqslant k \leqslant m,\ \ i - 1 \leqslant |\,t\,| \leqslant i\},$$

$i \in \mathbf{N}$, $\varphi \in Y$. Пространство Y является пространством Фреше, причем согласно лемме 2 на Y нет непрерывных норм.

Пространство X является внутренним индуктивным пределом последовательности банаховых пространств $X_n = \mathcal{D}^m\,(\mathbf{R}, K_n)$, где $K_n = [-n, n]$ ($n \in \mathbf{N}$). Топологии на пространствах X_n ($n \in \mathbf{N}$) задаются общей нормой

$$\|\,\varphi\,\| = \sup\{|\,\varphi^{(k)}\,(t)|;\ 0 \leqslant k \leqslant m,\ t \in \mathbf{R}\}.$$

Топология на X задается семейством норм

$$p_c(\varphi) = \sum_{i\geqslant 1} c_i q_i(\varphi),$$

где $c = \{c_i\}$ пробегает все последовательности положительных чисел.

Билинейное отображение u: $X \times Y \to Z$ определим по формуле $u(\varphi, \psi) = \varphi\psi$, $\varphi \in X$, $\psi \in Y$. Тогда, как нетрудно заметить, для всех $\varphi \in X$, $\psi \in Y$ справедливы оценки

$$p_c(u(\varphi, \psi)) = p_c(\varphi\psi) \leqslant 2^m \sum_{i\geqslant 1} c_i q_i(\varphi) q_i(\psi),$$

из которых вытекает непрерывность всех сужений u_n: $X_n \times Y \to Z$ $(n \in \mathbf{N})$. Само же отображение u: $X \times Y \to Z$ в силу леммы 1 непрерывным не является.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть X и Y — внутренние индуктивные пределы возрастающих последовательностей локально ограниченных топологических векторных пространств $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ соответственно. Тогда для непрерывности билинейного отображения u: $X \times Y \to Z$ необходима и достаточна непрерывность билинейных отображений $u_{n,n}$: $X_n \times Y_n \to Z$ $(n \in \mathbf{N})$.*

Доказательство. Необходимость была доказана раньше. Докажем достаточность. Поскольку φ_n, ψ_n $(n \in \mathbf{N})$ — вложения, то вместо $u_{n,n}$: $X_n \times Y_n \to Z$ естественно писать u: $X_n \times Y_n \to Z$. По условию для всякого $n \in \mathbf{N}$ и любой абсолютно выпуклой окрестности W нуля в Z найдутся ограниченные окрестности нуля U_n в X_n и V_n, в Y_n, такие, что $u(U_n \times V_n) \subset W$. Так как вложения $X_n \subset X_{n+1}$, $Y_n \subset Y_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ непрерывны, то U_n (соответственно V_n) ограничено в X_{n+1} (соответственно в Y_{n+1}). Положим $\varepsilon_1 = 1$ и предположим, что найдены такие $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in (0, 1]$, что $u(\tilde{U}_n \times \tilde{V}_n) \subset W$, где $\tilde{U}_n = \bigcup_{k=1}^{n} \varepsilon_k U_k$, $\tilde{V}_n = \bigcup_{k=1}^{n} \varepsilon_k V_k$. Очевидно, что при $n = 1$ это условие выполнено. Так как множества $\tilde{U}_n$ и $\tilde{V}_n$ ограничены соответственно в X_{n+1} и Y_{n+1}, то найдется $\varepsilon_{n+1} \in (0, 1]$ такое, что $\varepsilon_{n+1}\tilde{U}_n \subset U_{n+1}$, $\varepsilon_{n+1}\tilde{V}_n \subset V_{n+1}$. Теперь получаем

$$\begin{aligned} u(\tilde{U}_{n+1} \times \tilde{V}_{n+1}) &= u([\tilde{U}_n \cup \varepsilon_{n+1}U_{n+1}] \times [\tilde{V}_n \cup \varepsilon_{n+1}V_{n+1}]) = \\ &= u(\tilde{U}_n \times \tilde{V}_n) \cup u(\tilde{U}_n \times \varepsilon_{n+1}V_{n+1}) \cup u(\varepsilon_{n+1}U_{n+1} \times \tilde{V}_n) \cup \\ &\cup \varepsilon_{n+1}^2 u(U_{n+1} \times V_{n+1}) \subset W \cup u(\varepsilon_{n+1}\tilde{U}_n \times V_{n+1}) \cup u(U_{n+1} \times \varepsilon_{n+1}\tilde{V}_n) \cup \\ &\cup \varepsilon_{n+1}^2 W \subset W \cup u(U_{n+1} \times V_{n+1}) \cup u(U_{n+1} \times V_{n+1}) \cup \varepsilon_{n+1}^2 W \subset W. \end{aligned}$$

Итак, по индукции построена последовательность $\{\varepsilon_n\} \subset (0, 1]$ такая, что для всякого $n \in \mathbf{N}$

$$u([\bigcup_{k=1}^{n} \varepsilon_k U_k] \times [\bigcup_{k=1}^{n} \varepsilon_k V_k]) \subset W.$$

Следовательно,

$$u([\bigcup_{n\geqslant 1} \varepsilon_n U_n] \times [\bigcup_{n\geqslant 1} \varepsilon_n V_n]) \subset W,$$

откуда в силу абсолютной выпуклости W получаем включение $u(U \times V) \subset W$, где $U = \operatorname{abs\,co}(\bigcup_{n\geqslant 1} \varepsilon_n U_n)$ и $V =$

$= \text{abs co}\,(\bigcup_{n\geqslant 1} \varepsilon_n V_n)$ — окрестности нуля в X и Y соответственно. Таким образом, отображение u непрерывно в нуле, а значит, и непрерывно. Теорема доказана.

Следствие 1. *В условиях теоремы непрерывность и гипонепрерывность отображения и равносильны.*

Следствие 2. *Если в условиях теоремы 4 пространства X_n $(n \in \mathbf{N})$ бэровские, то раздельная непрерывность отображения и равносильна его непрерывности.*

Замечание 1. Утверждение теоремы 4 справедливо и в том случае, когда пространства X_n и Y_n $(n \in \mathbf{N})$ не являются локально ограниченными, но выполнено условие: для всякой абсолютно выпуклой окрестности W нуля в Z существуют такие окрестности нуля U_n в X_n и V_n в Y_n $(n \in \mathbf{N})$, что $u\,(U_n \times V_n) \subset W$ и U_{n+1} (соответственно V_{n+1}) поглощает U_n (соответственно V_n) для всякого $n \in \mathbf{N}$.

Замечание 2. Приведенные выше примеры 1 и 2 показывают существенность условий, наложенных на пространства X и Y в теореме 4.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $X = \text{ind lim}\, X_i$, Z — локально выпуклое, а Y — локально ограниченное топологические векторные пространства. Тогда для непрерывности билинейного отображения u: $X \times Y \to Z$ необходимо и достаточно непрерывности билинейных отображений u_i: $X_i \times Y \to Z$ $(i \in I)$.*

Доказательство. Пусть отображения $u_i = u\,(\varphi_i(\cdot), \cdot)$ $(i \in I)$ непрерывны. Тогда для произвольной окрестности W нуля в Z найдутся окрестности нуля U_i в X_i и V_i в Y $(i \in I)$ такие, что $u_i\,(U_i \times V_i) \subset W$. Пусть V — ограниченная окрестность нуля в Y, тогда для всякого $i \in I$ найдется число $\varepsilon_i > 0$ такое, что $\varepsilon_i V \subset V_i$. Множество $\tilde{U}_i = \varepsilon_i U_i$ является окрестностью нуля в X_i $(i \in I)$, причем

$$u_i\,(\tilde{U}_i \times V) = u_i\,(U_i \times \varepsilon_i V) \subset u_i\,(U_i \times V_i) \subset W.$$

Таким образом, по теореме 3 отображение u непрерывно. Теорема доказана.

Следствие. *Если в условиях теоремы пространства X_i $(i \in I)$ бэровские, то раздельная непрерывность отображения и равносильна его непрерывности.*

Замечание. Если в условии теоремы 5 вместо локальной ограниченности пространства Y потребовать всего лишь его метризуемость (пусть даже и полноту), то теорема будет неверна (см. примеры 1 и 2).

4. В заключение отметим, что доказанные выше утверждения останутся справедливы и в случае, когда вместо одного билинейного отображения u рассматривается произвольное множество $\mathcal{U}$ билинейных отображений $X \times Y$ в Z, а речь идет уже о равностепенной (раздельной, гипо-) непрерывности $\mathcal{U}$.

Из доказанного, а также из наличия взаимно однозначного соответствия между билинейными отображениями $X \times Y$ в Z и линейными отображениями $X \otimes Y$ в Z [3, с. 119—124] вытекает, что $X \otimes Y = \operatorname{ind}\lim (X_i \otimes Y_j)$ в случае, когда указанные тензорные произведения наделены индуктивной топологией [3, с. 124]. А вот проективная топология π на $X \otimes Y$ [3, с. 119], вообще говоря, слабее топологии индуктивного предела $\operatorname{ind}\lim (X_i \otimes_\pi Y_j)$. Вместе с тем в условиях теоремы 4 имеем $X \otimes_\pi Y = \operatorname{ind}\lim (X_n \otimes_\pi Y_n)$.

Омский государственный
университет

Поступило
06.05.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М.: ИЛ, 1959.
[2] Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969.
[3] Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.