A. N. Sergeev, Analogue of the classical invariant theory for Lie superalgebras, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1992, Volume 26, Issue 3, 88–90

УДК 519.46

АНАЛОГ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИНВАРИАНТОВ ДЛЯ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ

А. Н. Сергеев

Пусть V — конечномерное суперпространство над $\mathbb{C}$ и $\mathfrak{g}$ — произвольная супералгебра Ли, содержащаяся в $\mathfrak{gl}(V)$. Под клaассической теорией инвариантов супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ подразумевается описание $\mathfrak{g}$-инвариантных элементов алгебры

$$\mathfrak{A}^{p,q}_{k,l} = S(V^k \oplus \pi(V)^l \oplus V^{*p} \oplus \pi(V)^{*q}).$$

Легко видеть, что $\mathfrak{A}^{p,q}_{k,l} = S(U \otimes V \oplus V^* \otimes W)$, где $\dim U = (k, l)$, a $\dim W = (p, q)$. Поэтому на алгебре $\mathfrak{A}^{p,q}_{k,l}$ действуют также супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(U)$ и $\mathfrak{gl}(W)$, а следовательно, и их универсальная обертывающая. Элементы этой последней алгебры будем называть операторами поляризации. Эти операторы коммутируют с естественным действием $\mathfrak{gl}(V)$. Назовем множество $\mathfrak{M}$ инвариантов супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ базисным, если алгебра инвариантов совпадает с наименьшей подалгеброй, содержащей $\mathfrak{M}$ и инвариантной относительно операторов поляризации.

Для каждой серии классических супералгебр Ли и их центральных расширений мы описываем множество $\mathfrak{M}$.

Введем $\mathbb{Z}_2$-градуированные множества

$$T = \{1, \ldots, k, \bar{1}, \ldots, \bar{l}\}, \quad S = \{1, \ldots, p, \bar{1}, \ldots, \bar{q}\}, \quad I = \{1, \ldots, n, \bar{1}, \ldots, \bar{m}\}$$

и выберем базисы в пространствах U, W, V, $\{u_t\}$, $t \in T$, $\{w_s\}$, $s \in S$ и $\{e_i\}$, $i \in I$. Четность базисного вектора совпадает с четностью соответствующего индекса. В пространстве V^* выберем базис $\{e_i^*\}$ — левый дуальный к базису $\{e_i\}$. Введем обозначения: $x_{ti} = u_t \otimes e_i$, $x_{is}^* = e_i^* \otimes w_s$, v_s — столбец, составленный из $x_{1s}^*, \ldots, x_{\bar{m}s}^*$, v_t^* — строка, составленная из $x_{t1}, \ldots, x_{t\bar{m}}$, (v_t^*, v_s) — скалярное произведение, $\Delta = \det(x_{ti})$, $t, i \in I_{\bar{0}}$, $\Delta^* = \det(x_{is}^*)$, $i, s \in I_{\bar{0}}$, $\omega = \det(x_{ti})$, $t, i \in I_{\bar{1}}$, $\omega^* = \det(x_{ti}^*)$, $t, i \in I_{\bar{1}}$.

Для данной супералгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ через $\mathfrak{sg}$ будет обозначаться подсупералгебра в $\mathfrak{g}$, состоящая из преобразований пространства V с нулевым суперследом.

Теорема 1. *Скалярные произведения (v_t^*, v_s), $t \in T$, $s \in S$, являются системой образующих алгебры $\mathfrak{gl}(V)$-инвариантов.*

Теорема 2. *Базисным множеством инвариантов супералгебры $\mathfrak{sgl}(V)$ являются:*

а) *скалярные произведения (v_t^*, v_s), $t \in T$, $s \in S$;*

б) *многочлены $f_k = (\Delta^*)^k \omega^k \prod (v_t^*, v_s)$, $t \in I_{\bar{1}}$, $s \in I_{\bar{0}}$, для $k > 0$ и многочлены $f_k = \Delta^{-k} (\omega^*)^{-k} \prod (v_t^*, v_s)$, $t \in I_{\bar{0}}$, $s \in I_{\bar{1}}$, для $k < 0$.*

Отметим, что $\mathfrak{gl}(V)$ — подмодуль, порожденный многочленом f^k, одномерный и изоморфный $(\mathrm{Ber}\, \pi(V))^{\otimes k}$ для $k > 0$ и $(\mathrm{Ber}\, V)^{\otimes(-k)}$ для $k < 0$.

Пусть $m = 2r$ и $\mathrm{osp}(V)$ — супералгебра Ли, сохраняющая тензор

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^* \otimes e_{n-i+1}^* + \sum_{j=1}^{r} (e^*_{\overline{m-j+1}} \otimes e_{\bar{j}}^* - e_{\bar{j}}^* \otimes e^*_{\overline{m-j+1}}).$$

тогда скалярные произведения

$$(v_t, v_s) = \sum_{i=1}^{n} x^*_{it} x^*_{n-i+1s} + (-1)^{p(t)} \sum_{j=1}^{r} (x^*_{m-j+1t} x^*_{\bar{j}s} - x^*_{\bar{j}t} x^*_{\overline{m-j+1}s})$$

для t, $s \in S$ являются $\operatorname{osp}(V)$-инвариантами. Можно показать, что существует такой инвариантный многочлен Ω, что

$$\Omega^2 = [\det(v_s, v_t)]^{2r+1}, \quad s, \ t \in I_{\bar{0}}.$$

Наличие четной $\operatorname{osp}(V)$-инвариантной формы определяет изоморфизм алгебр и $\operatorname{osp}(V)$-модулей $\mathfrak{A}^{p,\, q}_{k,\, l} = \mathfrak{A}^{p+k,\, q+l}$. Поэтому можно считать, что $k = l = 0$.

Теорема 3. *Базисным множеством инвариантов супералгебры Ли* $\operatorname{osp}(V)$ *являются:*

а) *скалярные произведения* (v_t, v_s), t, $s \in S$;

б) *многочлен* Ω.

Пусть $\dim V = (n, n)$ и $p(V)$ — супералгебра Ли, сохраняющая тензор $\sum_{i=1}^{n} (e_i^* \otimes e_{\bar{i}}^* + e_{\bar{i}}^* \otimes e_i^*)$, тогда скалярные произведения

$$(v_t, v_s) = \sum_{i=1}^{n} ((-1)^{p(t)} x^*_{it} x^*_{\bar{i}s} + x^*_{\bar{i}t} x^*_{is})$$

являются $p(V)$-инвариантами. Наличие нечетной $p(V)$-инвариантной формы определяет изоморфизм алгебр и $p(V)$-модулей $\mathfrak{A}^{p,\, q}_{k,\, l} = \mathfrak{A}^{p+l,\, q+k}$. Поэтому можно считать, что $k = l = 0$.

Теорема 4. *Алгебра* $p(V)$*-инвариантов порождается скалярными произведениями* (v_t, v_s), t, $s \in S$.

Теорема 5. *Базисным множеством инвариантов супералгебры Ли* $\operatorname{sp}(V)$ *являются:*

а) *скалярные произведения* (v_t, v_s), t, $s \in S$;

б) *многочлены* $p_k = (\Delta^*)^k \prod_{s \leq t} (v_s, v_t)$, s, $t \in I_0$, *для* $k > 0$ *и* $p_k = (\omega^*)^{-k} \prod_{s<t} (v_s, v_t)$, s, $t \in I_{\bar{1}}$, *для* $k < 0$.

Если L — $p(V)$-подмодуль, порожденный p_1, то имеет место изоморфизм $p(V)$-модулей $L \otimes L = \operatorname{Ber} \pi(V)$.

Пусть $\dim V = (n, n)$ и $q(V)$ — супералгебра Ли, сохраняющая тензор

$$\sum_{i=1}^{n} (e_i \otimes e_{\bar{i}}^* + e_{\bar{i}} \otimes e_i^*),$$

тогда выражение $\langle v_t^*, v_s \rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_{it} x^*_{\bar{i}s} + x_{\bar{i}t} x^*_{is})$ для $t \in T_{\bar{0}}$, $s \in S_{\bar{0}}$ является $q(V)$-инвариантом. Имеет место изоморфизм $q(V)$-модулей и алгебр $\mathfrak{A}^{p,\, q}_{q,\, l} = \mathfrak{A}^{p+q}_{k+l}$, поэтому можно считать, что $q = l = 0$.

Теорема 6. *Скалярные произведения* (v_t^*, v_s), $\langle v_t^*, v_s \rangle$, $t \in T_{\bar{0}}$, $s \in S_{\bar{0}}$ *являются системой образующих алгебры* $q(V)$*-инвариантов.*

Пусть $\mathrm{sq}(V)$ — подсуперапгебра Ли в $q(V)$, состоящая из операторов с нулевым нечетным следом. Обозначим через Z матрицу вида

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 \\ Z_1 & Z_0 \end{pmatrix}, \quad Z_0=\{(v_t^*, v_s)\}, \quad Z_1=\{\langle v_t^*, v_s\rangle\}, \quad t, s\in I_{\bar 0}.$$

Через Y обозначим матрицу такого же вида с $Y_0=\{x_{is}^*\}$, $Y_1=\{x_{it}^*\}$, i, $s\in I_{\bar 0}$, а $t\in I_{\bar 1}$. Можно показать, что для разбиения λ: $\lambda_1>\ldots>\lambda_n>0$ выражение $q_\lambda=\mathrm{otr}\,Z^{\lambda_1}\ldots\mathrm{otr}\,Z^{\lambda_n}\,\mathrm{odet}\,Y$ (где otr — нечетный след, а odet — нечетный определитель) является многочленом.

Теорема 7. *Базисным множеством инвариантов супералгебры Ли* $\mathrm{sq}(V)$ *являются*:

а) *скалярные произведения* (v_t^*, v_s), $\langle v_t^*, v_s\rangle$, $t\in T^0$, $s\in S^0$;

б) *многочлены* q_λ, *где* λ *пробегает все разбиения вида* $\lambda_1>\ldots>\lambda_n>0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления.— М.: ИЛ, 1947. 2. *Лейтес Д. А.* Теория супермногообразий.— Петрозаводск, 1983. 3. *Сергеев А. Н.* // Мат. сб.— 1984.— Т. 123.— С. 422—430.

Саратовский политехнический институт. Балаковский филиал

Поступило в редакцию 15 октября 1990 г.

УДК 512.554.31+512.667.7

О КВАНТОВОМ МНОГООБРАЗИИ ФЛАГОВ

Я. С. Сойбельман

1. Квантовое многообразие флагов является интересным примером квантового G-пространства. Интерес к нему понятен, например, с точки зрения возможных приложений к (еще не построенной) «геометрической теории представлений» квантовых групп. Цель настоящей заметки — показать, что теоретико-представленческий подход из [1] переносится в квантовую ситуацию. Так же как и в других работах по квантовым многообразиям флагов (см. [5, 7, 8]), мы имеем дело с «общим» значением параметра квантования q (или, что более или менее одно и то же, с алгебрами над кольцом формальных рядов $\mathbb{C}[[h]]$). Заметим, что, в отличие от [4, 5, 7, 8], наш подход не ограничен конечномерностью квантовой группы. Но мы приводим лишь конечномерные результаты.

2. Пусть $\Lambda\in P_+$ — доминантный вес, $L(\Lambda)$ — конечномерный простой $U_q(\mathscr{G})$-модуль. Здесь $U_q(\mathscr{G})$ — квантованная универсальная обертывающая [2] конечномерной простой алгебры Ли $\mathscr{G}$. Пусть $v_\Lambda\in L(\Lambda)$ — старший вектор. Зафиксируем в $L(\Lambda)$ весовой базис $v_1=v_\Lambda$, v_2, $v_3, \ldots, v_N$, $N=\dim L(\Lambda)$. Под квантовым флаговым многообразием $\mathrm{P}\mathrm{v}_\Lambda$ мы будем понимать проективизацию орбиты $\mathrm{v}_\Lambda=G(\mathbb{C}v_1)$ прямой, проходящей через старший вектор [1], где G — соответствующая $\mathscr{G}$ простая группа Ли.

Определение 1. *Алгеброй регулярных функций на квантовом многообразии* v_Λ (обозначение $\mathbb{C}[\mathrm{v}_\Lambda]_q$) называется подалгебра в $\mathbb{C}[G]_q[G]$, порожденная матричными элементами вида $l(\rho_\Lambda(\xi)v_1)$, где $l\in L^*(\Lambda)$, ρ_Λ: