А. И. Назаров, Н. Н. Уральцева, Выпукло-монотонные оболочки и оценка максимума решения параболического уравнения, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1985, том 147, 95–109

А.И.Назаров, Н.Н.Уральцева

ВЫПУКЛО-МОНОТОННЫЕ ОБОЛОЧКИ И ОЦЕНКА МАКСИМУМА РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В настоящей работе усиливается принцип максимума Н.В.Крылова [I,2] для параболического оператора

$$\mathcal{L} = -\sigma(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x,t), \qquad (I)$$

коэффициенты которого определены в цилиндре $Q = \Omega \times [0,T]$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Отличие от [I,2] состоит в характере ограничений на коэффициенты b_i и c; мы не предполагаем их ограниченности, а требуем конечности некоторых интегральных норм для них. Речь идет об оценке вида $\sup\limits_Q u \leqslant \sup\limits_{\partial' Q} u + \mathrm{const}\, \|(\mathcal{L}u)_-\|_{n+1,Q}$ для произвольной функции u из $\overset{\circ}{W}{}^{2,1}_{n+1}(Q)$, где $\partial' Q$ – параболическая граница цилиндра Q, $f_\pm = \max\{\pm f; 0\}$, $W^{2,1}_m(Q)$ – банахово пространство с нормой $\|u\|_{W^{2,1}_m(Q)} = \|u\|_{m,Q} + \|u_t\|_{m,Q} + \sum\limits_{i=1}^{n}\|u_{x_i}\|_{m,Q} + \sum\limits_{i,j=1}^{n}\|u_{x_i x_j}\|_{m,Q}$, $\|\cdot\|_{m,Q}$ – норма в $L_m(Q)$. Такая оценка (при поточечных ограничениях на b_i и c) была установлена Н.В.Крыловым на основе идей и результатов А.Д.Александрова [3,4] по принципу максимума для эллиптических операторов $a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$ с b_i, $c \in L_n(\Omega)$, $c \leqslant 0$. Переход от эллиптического к параболическому случаю осуществлялся в [I] с помощью изучения подходящего параболического аналога уравнения Монжа-Ампера $z_t \cdot \det(z_{xx}) = f(x,t)$. Вместо этого мы непосредственно обобщаем на параболический случай метод А.Д.Александрова: получаем оценку $\sup\limits_Q u$ с помощью исследования выпукло-монотонной оболочки функции u.

Приведем формулировку основного результата для случая $c \leqslant 0$.

ТЕОРЕМА I. Пусть $\mathcal{L}$ – дифференциальный оператор вида (I), где $(a_{ij}) = a$ – симметричная неотрицательная матрица с измеримыми в Q элементами, σ – неотрицательная измеримая в Q функция, b – вектор с компонентами b_i, $i = 1, \dots, n$. Предположим, что $c \leqslant 0$, $\mathrm{Sp}\, a + \sigma > 0$ п.в.в. Q и для b конечна норма $|\!|\!| b |\!|\!|_{n+1,Q} = \| |b| (\sigma \det a)^{-1/n+1} \|_{n+1,Q}$.

Тогда для любой функции $u \in W^{2,1}_{n+1}(Q) \cap C(\overline{Q})$, такой что $|(\mathcal{L}u)_-|_{n+1,Q} < \infty$, справедлива оценка

$$\sup_{Q} u \leqslant \sup_{\partial' Q} u_+ + c_1 d^{\frac{n}{n+1}} \left(1 + d^{-1} |b|^{n+1}_{n+1,Q^+}\right) |(\mathcal{L}u)_-|_{n+1,Q^+}, \quad (2)$$

где $d = \operatorname{diam} \Omega$, $Q^+ = \{(x,t) \in Q : u(x,t) > \sup_{\partial' Q} u_+\}$, c_1 зависит лишь от n.

Некоторый аналог оценки (2) справедлив и в случае произвольной функции c, для которой конечна норма $|c_+|_{n+1,Q}$. Доказательство этих фактов дается в § 4. В § I приводятся геометрические критерии принадлежности функций классам $W^l_\infty(\Omega)$, $l = 1, 2$, и доказываются другие вспомогательные предложения. В §§ 2–3 исследуются свойства выпуклых и выпукло-монотонных оболочек; в частности, доказывается, что выпуклая оболочка любой финитной функции из $W^2_\infty(\Omega)$ также принадлежит $W^2_\infty(\Omega)$.

Авторы глубоко признательны В.А.Залгаллеру за ценные советы относительно доказательства ряда геометрических фактов.

Ниже используются следующие обозначения.

Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – точки $\mathbb{R}^n$, $X = (x, x_{n+1})$ – точки в $\mathbb{R}^{n+1}$, $\Pi = \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^1$, $Q = \Omega \times [0,T]$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$; $|u_x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u^2_{x_i}}$, $|u_{xx}| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n u^2_{x_i x_j}}$.

Если в $\overline{\Omega}$ определена функция $u(x)$, то $S_u = \{X \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = u(x),\ x \in \overline{\Omega}\}$ – график u, $\Pi^+_u = \{X \in \Pi : x_{n+1} \geqslant u(x)\}$ – надграфик u, $\Pi^-_u = \{X \in \Pi : x_{n+1} \leqslant u(x)\}$ – подграфик u.

Через $K_A(X^\circ)$ обозначается конус $K_A(X^\circ) = \{X \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} - x^\circ_{n+1} \leqslant -A|x - x^\circ|\}$, а через $B_{\rho,X}$ – открытый шар в $\mathbb{R}^{n+1}$ радиуса ρ, граница которого содержит точку X. Такое же обозначение сохраним для шаров в $\mathbb{R}^n$.

Выпуклая оболочка множеств $E_1, \ldots, E_m$ обозначается обычным образом $\operatorname{conv}\{E_1, \ldots, E_m\}$.

Выпуклой оболочкой функции u в Ω мы называем наименьшую из выпуклых вверх функций, мажорирующих u. Выпукло-монотонной оболочкой (в.м.о.) функции $u(x,t)$ в Q назовем наименьшую функцию $z(x,t)$, возрастающую по t при всех $x \in \Omega$, выпуклую вверх по x при всех $t \in [0,T]$, и такую, что $z \geqslant u$.

Говоря о точечных свойствах функции u из $W^l_\infty(\Omega)$, мы всегда имеем в виду, что в классе эквивалентности, включающем функцию u, существует представитель, обладающий данным свойством.

§ 1. Вспомогательные предложения

Приведем некоторые полезные для дальнейшего факты, касающиеся элементов соболевских пространств $W^l_\infty(\Omega)$, $l=1,2$.

ЛЕММА 1. Пусть Ω – выпуклая область. Следующие условия на u эквивалентны:

a) $u \in W^1_\infty(\Omega)$, $\operatorname{ess}\sup\limits_{\Omega} |u_x| < A$;

в) $u \in \mathcal{L}ip_A(\Omega)$, т.е. $\sup\limits_{x,x'\in\Omega} \dfrac{|u(x)-u(x')|}{|x-x'|} < A$;

c) $\Pi \cap K_A(X^\circ) \subset \Pi^-_u$, $\forall X^\circ \in S_u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация а) $\Longrightarrow$ в), в) $\Longrightarrow$ с), с) $\Longrightarrow$ в) очевидны. Далее, если $u \in \mathcal{L}ip_A(\Omega)$, то для усреднений $u_\rho(x)$ в $\Omega' \subset\subset \Omega$ при $\rho, h < \frac{1}{2}\operatorname{dist}\{\Omega'; \partial\Omega\}$ имеем

$$u_\rho(x+h) - u_\rho(x) = \int\limits_\Omega \omega_\rho(x-y)[u(y+h)-u(y)]\,dy$$

и, очевидно, $\sup\limits_\Omega |u_{\rho x}| \leq A$. Отсюда следует существование $u_{x_i} \in L_{q,loc}(\Omega)$, $\forall q<\infty$, $i=1,\dots,n$, и так как u_{x_i} почти всюду в Ω совпадает с обычной производной, то $\operatorname{ess}\sup\limits_\Omega |u_x| \leq A$. Таким образом, доказана импликация в) $\Longrightarrow$ а). ∎

ЗАМЕЧАНИЕ. Если u липшицева по направлению x_i с постоянной A, то существует $u_{x_i} \in L_\infty(\Omega)$, $\operatorname{ess}\sup\limits_\Omega |u_{x_i}| \leq A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что u удовлетворяет условию нижнего (верхнего) шара B_δ, если для каждой точки $X^\circ \in S_u$ существует шар B_{δ,X°, такой что $X^\circ \in \partial B_{\delta,X^\circ}$ и

$\Pi \cap B_{\delta,X^\circ} \subset \Pi^-_u$ $(\Pi \cap B_{\delta,X^\circ} \subset \Pi^+_u)$.

ЛЕММА 2. Пусть Ω – выпуклая область. Если функция u принадлежит $\mathcal{L}ip_A(\Omega)$ и удовлетворяет условиям нижнего и верхнего шаров B_δ, то $u \in W^2_\infty(\Omega)$ и $\operatorname{ess}\sup\limits_\Omega |u_{xx}| \leq c(\delta^{-1}, A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что во внутренних точках Ω условия леммы обеспечивают существование касательной плоскости к графику S_u функции u. Пусть границы верхнего и нижнего шаров в окрестности точки $X^\circ = (x^\circ, u(x^\circ))$ задаются уравнениями $x_{n+1} = \varphi^+(x)$ и $x_{n+1} = \varphi^-(x)$ соответственно. Ясно, что $\varphi^\pm(x^\circ) =$

$= u(x^\circ)$, $\nabla\varphi^{\pm}(x^\circ) = \nabla u(x^\circ)$ и $|\nabla u(x^\circ)| \leqslant A$. Поэтому $|\nabla\varphi^{\pm}(x)| \leqslant 2A$, если $|x - x^\circ| \leqslant \varepsilon$, $x \in \Omega$, где ε зависит только от δ и A. В ε-окрестности точки x° $\varphi^- \leqslant u \leqslant \varphi^+$. Отсюда $\varphi^-(x) - \varphi^-(x^\circ) - \nabla\varphi^-(x^\circ)\cdot(x - x^\circ) \leqslant u(x) - u(x^\circ) - \nabla u(x^\circ)\cdot$

$(x - x^\circ) \leqslant \varphi^+(x) - \varphi^+(x^\circ) - \nabla\varphi(x^\circ)\cdot(x - x^\circ)$, так что

$$|u(x) - u(x^\circ) - \nabla u(x^\circ)\cdot(x - x^\circ)| \leqslant \sup_{|y - x^\circ| < \varepsilon} \frac{1}{2} |\varphi^{\pm}_{xx}(y)(x - x^\circ)(x - x^\circ)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\delta} \sup_{|y - x^\circ| < \varepsilon} [1 + |\nabla\varphi^{\pm}(y)|^2]^{3/2} |x - x^\circ|^2 \leqslant (2\delta)^{-1} [1 + 4A^2]^{3/2} |x - x^\circ|^2.$$

Поменяв местами x и x°, из неравенства треугольника имеем

$$|[\nabla u(x^\circ) - \nabla u(x)]\cdot(x - x^\circ)| \leqslant \delta^{-1}(1 + 4A^2)^{3/2} |x - x^\circ|^2 \text{ при } x, x^\circ \in \Omega,$$

$|x - x^\circ| \leqslant \varepsilon$. Возьмем теперь $x = x^\circ + h\vec{l}$, $|h| \leqslant \varepsilon$, $\vec{l} \in \mathbb{R}^n$, $|\vec{l}| = 1$. Тогда очевидно, $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ липшицева в направлении $\vec{l}$ в Ω, и потому существует $\frac{\partial^2 u}{\partial l^2} \in L_\infty(\Omega)$ и $\operatorname{ess}\sup_{\Omega} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial l^2}\right| \leqslant$ $\leqslant \sup\{\delta^{-1}(1 + 4A^2)^{3/2};\ 2A\varepsilon^{-1}\} \equiv c(\delta^{-1}, A)$. Далее, поскольку $\vec{l}$ – произвольно, то подобная оценка верна и для смешанных производных. Действительно, положим $y_k = \frac{x_k - x_i}{\sqrt{2}}$, $y_i = \frac{x_k + x_i}{\sqrt{2}}$, $y_s = x_s$ при $s \neq k, i$ и, перейдя к усреднениям, заметим, что $u_{x_i x_k} =$ $= \frac{1}{2}(u_{y_k y_k} - u_{y_i y_i})$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко видеть, что если $u \in W^2_\infty(\Omega)$, то u удовлетворяет условиям нижнего и верхнего шаров.

ЛЕММА 3. Если Ω – область с гладкой границей, $g: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ – непрерывно дифференцируемая функция, тогда для любой функции $v \in W^{2,1}_\infty(Q)$, равной нулю на $\partial\Omega \times (0, T)$, верно соотношение

$$\int_\Omega v \det v_{xx}\, g(|v_x|)\,dx \Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t}\int_\Omega v_t \det v_{xx} \left[(n+1) g(|v_x|) + |v_x| g'(|v_x|)\right] dx\,dt \tag{3}$$

при п.в. $t_0, t \in [0, T]$.

При $g \equiv 1$ этот результат получен Крыловым [I].

Докажем лемму для гладких функций v. Нужный результат затем получится замыканием.

Обозначим $\mathcal{D} = \det v_{xx}$, $v_i = v_{x_i}$, $v_{ij} = v_{x_i x_j}$, $\mathcal{D}_{ij} = \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial v_{ij}}$, $f_t = \frac{\partial f}{\partial t}$.

Интегрируя по частям, получим

$$\int_\Omega v\mathcal{D}g\,dx\Big|_{t_0}^{t}=\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dt}\int_\Omega v\mathcal{D}g\,dx\,dt=\int_{t_0}^{t}\int_\Omega\Big[v_t\mathcal{D}g+v\mathcal{D}_{ij}v_{ijt}g+$$

$$+v\mathcal{D}g'\frac{v_i v_{it}}{|v_x|}\Big]dx\,dt=\int_{t_0}^{t}\int_\Omega\Big[v_t\mathcal{D}g-v_i\mathcal{D}_{ij}v_{jt}g-v\frac{d\mathcal{D}_{ij}}{dx_i}v_{jt}g-$$

$$-v\mathcal{D}_{ij}v_{jt}g'\frac{v_k v_{ki}}{|v_x|}+v\mathcal{D}g'\frac{v_i v_{it}}{|v_x|}\Big]dx\,dt=\int_{t_0}^{t}\int_\Omega\Big[v_t\mathcal{D}g+v_{ij}\mathcal{D}_{ij}v_t g+$$

$$+v_i\mathcal{D}_{ij}v_t g'\frac{v_k v_{kj}}{|v_x|}-v\mathcal{D}_{ij}v_{jt}g'\frac{v_k v_{ki}}{|v_x|}+v\mathcal{D}g'\frac{v_i v_{it}}{|v_x|}\Big]dx\,dt=$$

$$=\int_{t^0}^{t}\int_\Omega v_t\mathcal{D}\big[(n+1)g+|v_x|g'\big]dx\,dt.$$

Здесь использовались следующие элементарные соотношения: $\frac{d\mathcal{D}_{ij}}{dx_i}=0$ $\forall i$; $v_{ij}\mathcal{D}_{ij}=n\mathcal{D}$; $v_{ij}\mathcal{D}_{jk}=\delta_i^k\mathcal{D}$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае выпуклой по x функции v в равенстве (3) вместо $\det v_{xx}$ можно писать $|\det v_{xx}|$.

СЛЕДСТВИЕ. Если w_1 и w_2 – выпуклые вверх функции из $W^2_\infty(\Omega)$, равные нулю на $\partial\Omega$, и если $w_1(x)\geqslant w_2(x)$ в Ω , $g(\tau)\geqslant 0$, $\tau g'(\tau)+(n+1)g(\tau)\geqslant 0$ при $\tau\geqslant 0$, то

$$\int_\Omega w_1|\det w_{1xx}|\,g(|w_{1x}|)\,dx\geqslant\int_\Omega w_2|\det w_{2xx}|\,g(|w_{2x}|)\,dx. \qquad (4)$$

Доказательство достаточно провести для гладких функций. Положим в соотношении (3) $v(x,t)=tw_2(x)+(1-t)\,w_1(x)$ и продифференцируем его по t . Тогда, учитывая, что v выпукла по x , получим

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega v(x,t)|\det v_{xx}|g(|v_x|)dx=\int_\Omega v_t|\det v_{xx}|\big[(n+1)g(|v_x|)+|v_x|g'(|v_x|)\big]dx\,dt\leqslant 0,$$

так что

$$\int_\Omega v(x,0)|\det v_{xx}(x,0)|\,g(|v_x(x,0)|)dx\geqslant\int_\Omega v(x,1)|\det v_{xx}(x,1)|\,g(|v_x(x,1)|)\,dx.$$

■

§ 2. Свойства выпуклых оболочек

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что область Ω удовлетворяет условию внутреннего шара радиуса δ, если для каждой точки $x^\circ \subset \partial\Omega$ существует $B_{\delta,x^\circ} \subset \Omega$, такой что $x^\circ \in \partial B_{\delta,x^\circ}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Область Ω при этом может иметь входящие внутрь углы и даже нулевые заострения.

В этом пункте доказывается следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть Ω – ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию внутреннего шара радиуса δ_0, $u \in \mathcal{L}ip_A(\Omega)$ – неотрицательная финитная в Ω функция, удовлетворяющая условию нижнего шара B_δ, z – выпуклая оболочка функции u в Ω (очевидно, $z > 0$ в Ω, если $u \not\equiv 0$, и $z|_{\partial\Omega} = 0$). Тогда $z \in W^2_\infty(\Omega) \cap \mathcal{L}ip_A(\Omega)$,

$$\operatorname{ess}\sup_{\Omega} |z_{xx}| \leqslant c(A, \delta, \delta_0, \rho_0, \operatorname{diam}\Omega)$$, где $\rho_0 = \operatorname{dist}\{\operatorname{supp} u;\ \partial\Omega\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $u \in W^2_\infty(\Omega)$, $u \geqslant 0$ и финитна в Ω, то она удовлетворяет условиям теоремы 2.

Доказательству теоремы 2 предпошлем две леммы геометрического характера. В них предполагается, что $u \not\equiv 0$ и выполнены условия теоремы 2.

ЛЕММА 4. Для любой точки $X^\circ \in S_z$, такой что $x_0 \in \Omega$, множество $K_A^+(X^\circ) = \{X \in K_A(X^\circ) : x_{n+1} \geqslant 0\}$ лежит в Π_z^-, и существует шар $B_{\rho(X^\circ), X^\circ} \subset \Pi_z^-$, где $\rho(X^\circ) = \min\{\delta; \frac{1}{2}\rho_0\} \cdot \operatorname{dist}\{x^\circ; \partial\Omega\} (\operatorname{diam}\Omega)^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Каратеодори [5] существуют точки $X^1, \dots, X^{m+1} \in S_u$, $m \leqslant n$, и положительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}$, $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1$, такие что $X^\circ = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i X^i$. Другими словами, точка $X^\circ \in S_z$ является внутренней точкой m-мерного симплекса $\sigma_m = \operatorname{conv}\{X^1, \dots, X^{m+1}\}$. Так как $X^i \in S_u$, $i = 1, \dots, m+1$, то $\sigma_m \subset \operatorname{conv}\Pi_u^- = \Pi_z^-$ и, следовательно, в силу выпуклости z, $\sigma_m \subset S_z$.

Пусть $X^1, \dots, X^k$ не лежат на $\partial\Omega \times \{0\}$, а $X^{k+1}, \dots, X^{m+1}$ – лежат (в частности, может быть $k = m+1$, т.е. все X^i не лежат на $\partial\Omega \times \{0\}$). Рассмотрим точку $X' = \frac{\lambda_1 X^1 + \dots + \lambda_k X^k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} = (x', z(x'))$. Для нее $x' \in \operatorname{conv}\operatorname{supp} u$ и $\operatorname{dist}\{x'; \partial\Omega\} \geqslant$

$\geq \operatorname{dist}\{\operatorname{conv} \operatorname{supp} u ; \partial\Omega\}=\rho_0$. Легко видеть, что $K_A^+(X^i)\subset \Pi_u^-$ и $\exists B_{\hat\rho,X^i}\subset \Pi_u^-$ при $\hat\rho=\min\{\delta;\frac{1}{2}\rho_0\}$, $i=1,\dots,k$. Отсюда следует, что $K_A^+(X')\subset \operatorname{conv}\{K_A^+(X^i)\}_{i=1}^k\subset \operatorname{conv}\Pi_u^-=\Pi_z^-$ и существует шар $B_{\hat\rho,X'}\subset \operatorname{conv}\{B_{\hat\rho,X^i}\}_{i=1}^k\subset\Pi_z^-$.

Если $k=m+1$, то доказательство закончено.

Если $k<m+1$, то $X''=\dfrac{\lambda_{k+1}X^{k+1}+\dots+\lambda_{m+1}X^{m+1}}{\lambda_{k+1}+\dots+\lambda_{m+1}}\in\partial\Omega\times\{0\}$ (иначе бы во внутренней точке $x''\in\Omega$ $z(x'')=0$, что невозможно для $u\neq 0$). Так как $X=\lambda X'+(1-\lambda)X''$, $\lambda\in(0,1)$, то $K_A^+(X^\circ)\subset\operatorname{conv}\{X'',K_A^+(X')\}\subset\Pi_z^-$ и существует $B_{\lambda\hat\rho,X^\circ}\subset K''\equiv\operatorname{conv}\{X'',B_{\hat\rho,X'}\}\subset\Pi_z^-$. Поскольку $\lambda=\dfrac{|x^\circ-x''|}{|x'-x''|}\geq$ $\geq(\operatorname{diam}\Omega)^{-1}\cdot\operatorname{dist}\{x^\circ;\partial\Omega\}$, то для указанного в лемме значения $\rho(X^\circ)$ имеем $B_{\rho(X^\circ),X^\circ}\subset\Pi_z^-$. ■

Рассмотрим теперь наряду с множеством $K''=\operatorname{conv}\{X'';B_{\hat\rho,X'}\}$, введенным в лемме 4, множество $K'^+=\operatorname{conv}\{X',\bar\Omega\times\{0\}\}$. Очевидно, что отрезок, соединяющий точки X' и X'', содержится в $\partial K'^+$, $\partial K''$ и S_z. Кроме того, K'^+ и K'' лежат в Π_z^-.

ЛЕММА 5. Кривизна боковой поверхности конуса K', усечением которого является множество K'^+, в точках $X\in\partial\Omega\times\{0\}$ не превосходит $\delta_0^{-1}\rho_0^{-2}(\operatorname{diam}\Omega)^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В касательной плоскости к конусу K' в точке X возьмем двумерную плоскость, содержащую $\vec{l}=X'-X$ и направление $\vec{\gamma}$ максимальной кривизны поверхности $\partial K'$ в точке X. Пусть эта плоскость пересекается с плоскостью $x_{n+1}=0$ вдоль направления $\vec{\tau}$, которое, очевидно, касательно к $\partial\Omega$. Обозначим через $k_{\vec{n}}$ кривизну $\partial K'$ в точке X в направлении $\vec{n}$. Поскольку $k_{\vec\tau}\leq\delta_0^{-1}$ и $k_{\vec l}=0$, то из соотношения $k_{\vec\tau}=k_{\vec l}\cos^2\varphi+k_{\vec\gamma}\sin^2\varphi$, где φ – угол между $\vec l$ и $\vec\tau$, получаем оценку $k_{\vec\gamma}\leq\delta_0^{-1}(\sin\varphi)^{-2}$. Легко видеть, что $\sin\varphi\geq\dfrac{\operatorname{dist}\{x';\partial\Omega\}}{|x'-x''|}\geq\dfrac{\rho_0}{\operatorname{diam}\Omega}$ и, следовательно, $k_{\vec\gamma}\leq\delta_0^{-1}\rho_0^{-2}(\operatorname{diam}\Omega)^2$. ■

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. Из доказательства леммы 4 видно, что любая точка $X^\circ\in S_z$ представима в виде $X^\circ=\lambda X'+(1-\lambda)X''$ с некоторым $\lambda\in[0,1]$, где $X''\in\partial\Omega\times\{0\}$, а проекция

x' точки X' на плоскость $x_{n+1} = 0$ принадлежит $\mathrm{conv}\,\mathrm{supp}\,u$. При этом существует шар $B_{\lambda\hat\rho,X^0} \subset \Pi_z^-$, $\hat\rho = \min\{\delta, \frac{1}{2}\rho_0\}$. С другой стороны, из леммы 5 вытекает наличие шара $B_{\tau,X''} \subset K'$ при $\tau = \frac{1}{2}\delta_0\rho_0^2(\mathrm{diam}\,\Omega)^{-2}$, а, следовательно, и шара $B_{(1-\lambda)\tau,X^0} \subset$ $\subset \mathrm{conv}\{B_{\tau,X''}; X'\} \subset K'$. Так как $K' \cap \Pi \subset \Pi_z^-$, то $B_{(1-\lambda)\tau,X^0} \cap \Pi \subset$ $\subset K' \cap \Pi \subset \Pi_z^-$.

Полагая $\rho = \frac{1}{2}\min\{\hat\rho; \tau\}$, получим, что S_z удовлетворяет условию нижнего шара B_ρ с $\rho = \frac{1}{2}\min\{\delta; \frac{1}{2}\delta_0\rho_0^2(\mathrm{diam}\,\Omega)^{-2}\}$

Поскольку z выпукла вверх, то она удовлетворяет условию верхнего шара B_ρ с любым $\rho > 0$. Из лемм 4, I и 2 следуют требуемые утверждения. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Если область Ω невыпукла, но удовлетворяет условию внутреннего шара радиуса δ_0, то рассуждением, аналогичным доказательству леммы 4, проверяется, что выпуклая оболочка области Ω удовлетворяет этому же условию. Поэтому, если изначально область Ω невыпукла, то возьмем $\hat\Omega = \mathrm{conv}\,\Omega$, продолжим u нулем на $\hat\Omega \setminus \Omega$ и к полученной функции будем применять теорему 2, приняв во внимание, что $\mathrm{dist}\{\mathrm{supp}\,u; \partial\hat\Omega\} \geqslant$ $\geqslant \mathrm{dist}\{\mathrm{supp}\,u; \partial\Omega\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие $u \in \mathcal{L}ip_A(\Omega)$ в теореме 2 можно ослабить, требуя лишь $u \in C(\bar\Omega)$. При этом $z \in \mathcal{L}ip_A(\Omega)$ с $A = \rho_0^{-1}\sup_\Omega u$.

§ 3. Выпукло-монотонные оболочки

Сначала предположим, что Ω – ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^n$ и функция $u(x,t)$ непрерывна в цилиндре $\bar Q = \bar\Omega \times [0,T]$.

ЛЕММА 6. (Способ построения в.м.о.) Рассмотрим функцию

$$\bar u(x,t) = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant t} u(x,\tau).$$

Построим для нее (при каждом фиксированном t) выпуклую оболочку $\bar{\bar u}$. Полученная функция совпадает с в.м.о. функции u.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z(x,t)$ – в.м.о. функции u. Тогда $z \geqslant \bar u$, так как $\bar u$ – минимальная монотонная оболочка u. Отсюда $z \geqslant \bar{\bar u}$ в силу выпуклости z. С другой стороны, $\bar{\bar u} \geqslant u$, $\bar{\bar u}$ выпукла по x. Покажем, что $\bar{\bar u}$ монотонна по t. Действительно, если $t > t_0$, то по теореме Каратеодори для любой $X \in S_{\bar{\bar u}(\cdot,t_0)}$ существуют точки $X^1,\dots,X^{n+1} \in S_{\bar u(\cdot,t_0)}$ и неотрицательные числа $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}$, $\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i = 1$, такие что $X = \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i X^i$, т.е. $x=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x^i$ и $\overline{\overline{u}}(x,t_0)=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i \overline{u}(x^i,t_0)$. А тогда в силу выпуклости $\overline{\overline{u}}(\cdot,t)$ и монотонности $\overline{u}(x,\cdot)$ имеем

$$\overline{\overline{u}}(x,t)\geqslant\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\overline{u}(x^i,t)\geqslant\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\overline{u}(x^i,t_0)=\overline{\overline{u}}(x,t_0).$$

Таким образом, $\overline{\overline{u}}$ – выпукла по x, монотонна по t, не меньше u. Т.к. z – минимальная функция, удовлетворяющая этим условиям, то $z\leqslant\overline{\overline{u}}$. Следовательно, $z=\overline{\overline{u}}$. ■

ЛЕММА 7. Если $u(x,t)$ удовлетворяет условию Липшица по t с постоянной A, то и $z(x,t)$ удовлетворяет этому условию с той же постоянной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t\geqslant t_0$, $x\in\overline{\Omega}$. Тогда

$$0\leqslant\overline{u}(x,t)-\overline{u}(x,t_0)\leqslant A(t-t_0).$$

Далее, существуют $x^1,\dots,x^{n+1}\in\overline{\Omega}$ и $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}\geqslant 0,\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1$, такие что $x=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x^i$ и $z(x,t)=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\overline{u}(x^i,t)$. Т.к. $z(\cdot,t_0)$ – выпуклая оболочка $\overline{u}(\cdot,t_0)$, то $z(x,t_0)\geqslant\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\overline{u}(x^i,t_0)$. Поэтому $0\leqslant z(x,t)-z(x,t_0)\leqslant\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i[\overline{u}(x^i,t)-\overline{u}(x^i,t_0)]\leqslant A(t-t_0)$. ■

Ниже в теореме 3 мы не требуем выпуклости Ω, но переходим к ее выпуклой оболочке.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – ограниченная область, удовлетворяющая условию внутреннего шара радиуса δ_0, функция $u(x,t)\geqslant 0$ в цилиндре $Q=\Omega\times[0,T]$ при каждом t удовлетворяет условию нижнего шара B_δ, равномерно по t финитна в Ω, и $u\in\mathcal{L}ip_A(Q)$. Продолжим u нулем на $\hat{Q}\setminus Q$, где $\hat{Q}=conv\,\Omega\times[0,T]$ и построим в $\hat{Q}$ ее выпукло-монотонную оболочку $z(x,t)$. Тогда $z\in W_\infty^{2,1}(\hat{Q})$ и $(z-u)z_t\det z_{xx}=0$ почти всюду в $\hat{Q}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $u\in W_\infty^{2,1}(Q)$, то $u(\cdot,t)\in W_\infty^2(\Omega)$ при каждом $t\in[0,T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим при каком-либо $t\in[0,T]$ точку $X\in S_{\overline{u}(\cdot,t)}$. Найдется $t_0\in[0,t]$, такое что $\overline{u}(x,t)=u(x,t_0)$, т.е. $X\in S_{u(\cdot,t_0)}$. Ясно, что $\Pi^-_{u(\cdot,t_0)}\subset\Pi^-_{\overline{u}(\cdot,t_0)}\subset\Pi^-_{\overline{u}(\cdot,t)}$. Из условий теоремы немедленно получаем, что $\overline{u}(\cdot,t)$ при всех t удовлетворяет условию c) леммы I с константой A и условию нижнего шара B_δ. По лемме I, и теореме 2 $z(\cdot,t)\in W_\infty^2(\hat{\Omega})\cap\mathcal{L}ip_A(\hat{\Omega})$, где $\hat{\Omega}=conv\,\Omega$, причем $\operatorname{ess}\sup\limits_{\Omega}|z_{xx}| \leq c(A,\delta;\delta_0, \operatorname{dist}\{\operatorname{supp} u; \partial\Omega\}, \operatorname{diam}\Omega)$. Лемма 7 и замечание к лемме I гарантируют существование производной $z_t \in L_\infty(\hat{Q})$.

Осталось проверить, что $z_t \det z_{xx} = 0$ п.в. на множестве, где $z(x,t) > u(x,t)$. Это множество открытое. Возьмем точку (x°, t°) из него, в которой существуют z_{xx} и z_t. Пусть L - касательная плоскость к поверхности $S_{z(\cdot,t^\circ)}$ в точке $X^\circ = (x^\circ, z(x^\circ,t^\circ))$. Если L касается $S_{u(\cdot,t^\circ)}$ в точке $\tilde{X} \neq X^\circ$, то отрезок, соединяющий X° и $\tilde{X}$, лежит на $S_{z(\cdot,t^\circ)}$ и, следовательно, $\det z_{xx}(x^\circ, t^\circ) = 0$. Если же это не так, то L лежит выше $S_{u(\cdot,t)}$ при $t \in [t^\circ, t^\circ+\delta]$ при достаточно малом $\delta > 0$. Иначе говоря, если $x_{n+1} = f(x)$ - уравнение L , то $f(x) > u(x,t)$ при $t \in [t^\circ, t^\circ+\delta]$. Функция $v(x,t) = \begin{cases} z(x,t), & t \notin [t^\circ, t^\circ+\delta] \\ \min\{z(x,t); f(x)\}, & t \in [t^\circ, t^\circ+\delta] \end{cases}$ монотонна по t , выпукла по x и $v(x,t) \geq u(x,t)$, $\forall t \in [0,T]$, и так как z - минимальная из таких функций, то $z(x,t) \leq f(x)$ при $t \in [t^\circ, t^\circ+\delta]$. Но поскольку $f(x^\circ) = z(x^\circ,t^\circ) \leq z(x^\circ,t)$, $t > t^\circ$, то $z(x^\circ,t) = f(x^\circ)$ на интервале $[t^\circ, t^\circ+\delta]$, т.е. $z_t(x^\circ,t^\circ) = 0$. ■

§ 4. Оценка $\sup\limits_{Q} u$.

Докажем теорему I в предположении, что $c \equiv 0$, т.е. для оператора $\mathcal{L}_0 = -\sigma\frac{\partial}{\partial t} + a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b_i\frac{\partial}{\partial x_i}$; случай произвольной $c(x,t) \leq 0$ сводится к этому, ибо $(\mathcal{L}_0 u)_- = (\mathcal{L}u - cu)_- \leq (\mathcal{L}u)_-$ при $(x,t) \in Q^+$. Достаточно ограничиться рассмотрением гладких функций u и областей с гладкими границами и предполагать, что a - положительная матрица с ограниченными элементами, σ - положительная ограниченная функция. Для этого заметим, что нормы в правой части (2) не изменятся, если все коэффициенты оператора умножить не одну и ту же положительную функцию. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать что $\operatorname{Sp} a + \sigma = 1$ п.в.в Q , $a_{ij} \in L_\infty(Q)$, $\sigma \in L_\infty(Q)$. Далее, аппроксимируя u гладкими функциями, а Ω - областями Ω_k с гладкими границами, такими что $\overline{\Omega}_k \subset \Omega$, при любом $\varepsilon > 0$ получим оценку

$$\sup_{Q} u \leqslant \sup_{\partial Q} u_+ + \mathrm{const}\left[\int_{Q^+} \frac{[\mathcal{L}_0 u + \varepsilon(\Delta u - u_t)]_-^{n+1}}{(\sigma+\varepsilon)\det(a_{ij}+\varepsilon\delta_i^j)}\,dx\,dt\right]^{1/n+1}$$

Наконец, можно перейти к пределу по $\varepsilon \longrightarrow 0$, замечая, что $\int\limits_{Q} \frac{\varepsilon^{n+1}|\Delta u - u_t|^{n+1}}{(\sigma+\varepsilon)\det(a_{ij}+\varepsilon\delta_i^j)}\,dx\,dt \leqslant \varepsilon\,\|\Delta u - u_t\|_{n+1,Q}^{n+1} \longrightarrow 0$. Без ограничения общности считаем также, что $u|_{\partial' Q} < 0$.

Пусть $\hat{\Omega} = \mathrm{conv}\,\Omega$, $\hat{Q} = \hat{\Omega}\times[0,T]$, $z(x,t)$ – выпукло-монотонная оболочка функции $u_+(x,t)$, продолженной нулем на $\hat{Q}\setminus Q$. Так как $u \in C^{2,1}(\overline{Q})$, $\partial\Omega$ – гладкая, $u|_{\partial' Q} < 0$ то из теоремы 3 следует, что $z \in W_\infty^{2,1}(\hat{Q})$ и $z_t \cdot \det z_{xx} = 0$ п.в. на множестве, где $z \neq u$. Кроме того, $z|_{\partial' Q} = 0$. Обозначим $Q_t^{\circ} = \{(x,\tau) \in \hat{\Omega}\times[0,t] : u(x,\tau) = z(x,\tau)\}$.

Согласно замечанию к лемме 3

$$\int\limits_{\hat{\Omega}} z\,|\det z_{xx}|\,g(|z_x|)\,dx\,\Big|^t = \int\limits_{Q_t^{\circ}} z_t\,|\det z_{xx}|\,[(n+1)\,g(|z_x|) +$$

$$+|z_x|\,g'(|z_x|)]\,dx\,dt\,, \qquad t\in[0,T],$$

если g – непрерывно дифференцируема. Рассмотрим матрицы

$$C = \begin{pmatrix} -z_{xx} & 0 \\ 0 & z_t \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

Учитывая, что $(\det CA)^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \frac{1}{n+1}\,\mathrm{Sp}\,CA$, получим

$$\int\limits_{\hat{\Omega}} z\,|\det z_{xx}|\,g(|z_x|)\,dx\,\Big|^t \leqslant$$

$$\leqslant (n+1)^{-(n+1)} \int\limits_{Q_t^{\circ}} \frac{[-a_{ij}u_{x_ix_j} + \sigma u_t]^{n+1}}{\sigma\det a}\,[(n+1)\,g(|u_x|) + |u_x|\,g'(|u_x|)]\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \int\limits_{Q^+} \frac{[(\mathcal{L}_0 u)_- + |b_i u_{x_i}|]}{\sigma \det a}^{n+1} \left[(n+1) g(|u_x|) + |u_x| g'(|u_x|)\right] dx\, dt. \qquad (5)$$

Положим $F = |(\mathcal{L}_0 u)_-|_{n+1, Q^+} + \varepsilon, \ \varepsilon > 0, \ B = |b|^{n+1}_{n+1, Q^+}$,

$$g(\tau) = (d \cdot \tau^{n+1} + F^{n+1})^{-1}, \quad h = \max_Q u = u(x^\circ, t^\circ).$$

Заметим, что $(n+1) g(\tau) + \tau g'(\tau) = \dfrac{(n+1) F^{n+1}}{(d\tau^{n+1} + F^{n+1})^2} > 0$.

По следствию из леммы 3, взяв $w_1 = z(\cdot, t^\circ)$, получим

$$\int\limits_{\hat\Omega} w_2 |\det w_{2xx}| g(|w_{2x}|)\, dx \leqslant \int\limits_{\hat\Omega} z |\det z_{xx}| g(|z_x|)\, dx \Big|^{t_0}.$$

В качестве $w_2(x) \leqslant w_1(x, t^\circ)$ возьмем функцию, задающую конус K^{ε_1} с вершиной в точке $X^\circ = (x^\circ, h)$ и основанием $\hat\Omega$, сглаженный в ε_1-окрестности точки X°. Тогда $\det w_{2xx} = 0$ при $w_2 < h - \varepsilon_1$. Поэтому

$$(h - \varepsilon_1) \int\limits_{\hat\Omega} |\det w_{2xx}| g(|w_{2x}|)\, dx \leqslant \int\limits_{\hat\Omega} z |\det z_{xx}| g(|z_x|)\, dx \Big|^{t_0}.$$

Но левая часть здесь равна $(h - \varepsilon_1) \int\limits_{\nu(K^{\varepsilon_1})} g(|p|)\, dp$, где $\nu(K^{\varepsilon_1})$ – нормальное изображение $\hat\Omega$ с помощью сглаженного конуса, т.е. $\nu(K^{\varepsilon_1}) = \{ p \in \mathbb{R}^n : p = w_{2x}(x), \ x \in \hat\Omega \}$. Легко видеть, что n-мерный шар $B_{h/d} \subset \nu(K^{\varepsilon_1})$, так что

$$(h - \varepsilon_1) \int\limits_{B_{h/d}} g(|p|)\, dp \leqslant \int\limits_{\hat\Omega} z |\det z_{xx}| g(|z_x|)\, dx \Big|^{t_0}.$$

В силу произвольности $\varepsilon_1 > 0$ отсюда и из (5) выводим

$$\omega_n h \int\limits_0^{h/d} \rho^{n-1} g(\rho)\, d\rho \leqslant \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \int\limits_{Q^+} \frac{[(\mathcal{L}_0 u)_- + |b||u_x|]^{n+1} [(n+1) g(|u_x|) + |u_x| g'(|u_x|)]}{\sigma \det a}\, dx\, dt,$$

где ω_n – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$. По неравенству Гельдера числитель в правой части не превосходит

$$\left\{\left[\frac{(\mathcal{L}_0 u)}{F}\right]^{n+1}+\frac{|b|^{n+1}}{d}\right\}\left(F^{\frac{n+1}{n}}+d^{\frac{1}{n}}|u_x|^{\frac{n+1}{n}}\right)^{n}\frac{(n+1)F^{n+1}}{(d|u_x|^{n+1}+F^{n+1})^2}\leq$$

$$\leq 2^{n}(n+1)\left\{\left[\frac{(\mathcal{L}_0 u)_-}{F}\right]^{n+1}+d^{-1}|b|^{n+1}\right\},$$

так что $\omega_n h\int\limits_0^{h/d}\rho^{n-1}g(\rho)d\rho\leq\left(\frac{2}{n+1}\right)^n(1+d^{-1}B)$.

Заменив переменную, получим

$$\frac{\omega_n h}{Fd^{n/n+1}}\int\limits_0^{hF^{-1}d^{-\frac{n}{n+1}}}\frac{\tau^{n-1}d\tau}{\tau^{n+1}+1}\leq\left(\frac{2}{n+1}\right)^n(1+d^{-1}B).$$

Если $h\geqslant F d^{\frac{n}{n+1}}$, то так как $\int\limits_0^1\frac{\tau^{n-1}d\tau}{\tau^{n+1}+1}\geqslant\frac{1}{2n}$,

имеем

$$h\leq\frac{2n}{\omega_n}\left(\frac{2}{n+1}\right)^n d^{\frac{n}{n+1}}F(1+d^{-1}B).$$

Отсюда всегда $h\leq c_1 d^{\frac{n}{n+1}}F(1+d^{-1}B)$, где

$c_1=max\left\{1;\frac{2n}{\omega_n}\left(\frac{2}{n+1}\right)^n\right\}$ При $\varepsilon\longrightarrow 0$ получаем оценку (2).■

Приведем некоторые простые следствия из теоремы I.

СЛЕДСТВИЕ I. В случае $c\equiv 0$ из оценки (2) вытекает, что

$$\sup_Q u\leq K+c_1 d^{\frac{n}{n+1}}\left(1+d^{-1}\|b\|^{n+1}_{n+1,Q^K}\right)\|(\mathcal{L}_0 u)_-\|_{n+1,Q^K},$$

где $Q^K=\{(x,t)\in Q: u(x,t)>K\},\quad\forall K\geqslant\sup_{\partial' Q}u.$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\mathcal{L}_0$ – равномерно параболический оператор вида (I) с $c\equiv 0$, $a_{ij}\in L_\infty(Q)$, $a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\nu\xi^2$, $\nu=const>0$, $b_i\in L_{n+1}(Q)$, то для любой функции $u\in W^{2,1}_{n+1}(Q)\cap C(\bar{Q})$ верна оценка

$$\sup_Q u\leq K+c_2 d^{\frac{n}{n+1}}\left(1+d^{-1}\|b\|^{n+1}_{n+1,Q^K}\right)\|(\mathcal{L}_0 u)_-\|_{n+1,Q^K}$$

с $c_2 = c_2(n,\nu)$, $Q^k = \{(x,t)\in Q : u(x,t) > k\}$, $\forall k \geqslant \sup_{\partial' Q} u$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть в условиях теоремы I предположение заменено требованием $|c_+|_{n+1,Q^\circ} < \infty$, $Q^\circ = \{(x,t)\in Q : u(x,t) > 0\}$. Тогда

$$\sup_Q u \leqslant 2e^{\lambda T}\left[\sup_{\partial' Q} u_+ + c_3 |(\mathcal{L}u)_-|_{n+1,Q^\circ}\right],$$

где $c_3 = c_1 d^{\frac{n}{n+1}}\left(1 + d^{-1}|b|^{n+1}_{n+1,Q^\circ}\right)$, а λ зависит от c_3 и скорости стремления к нулю $|(c-k\sigma)_+|_{n+1,Q^\circ}$ при $k \to +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $v = e^{-\lambda t}u$, $\lambda > 0$. Для нее $e^{-\lambda t}\mathcal{L}u = \mathcal{L}_0 v + (c - \lambda\sigma)v$ и потому $(\mathcal{L}_0 v)_- \leqslant (\mathcal{L}u)_- + (c-\lambda\sigma)_+ v$ при $(x,t)\in Q^\circ$. Применяя к функции v и оператору $\mathcal{L}_0$ теорему I, получим

$$\sup_Q v \leqslant \sup_{\partial' Q} v_+ + c_3|(\mathcal{L}u)_-|_{n+1,Q^\circ} + c_3 \sup_{Q^\circ} v\,|(c-\lambda\sigma)_+|_{n+1,Q^\circ}.$$

Так как $|c_+|_{n+1,Q^\circ} < \infty$, то $\sigma > 0$ п.в. там, где $c_+ > 0$, и, более того, $\forall \varepsilon > 0$, существует $\lambda > 0$, для которого $|(c-\lambda\sigma)_+|_{n+1,Q^\circ} \leqslant \varepsilon$. Положив $\varepsilon = \frac{1}{2c_3}$, имеем

$$\sup_Q u \leqslant e^{\lambda T}\sup_Q v \leqslant 2e^{\lambda T}\left[\sup_{\partial' Q} u_+ + c_3|(\mathcal{L}u)_-|_{n+1,Q^\circ}\right]. \blacksquare$$

Литература

1. К р ы л о в Н.В. Последовательности выпуклых функций и оценки максимума решения параболического уравнения. - Сиб.матем. журн., 1976, XVII, № 2, с.290-303.
2. К р ы л о в Н.В. О принципе максимума для нелинейных параболических и эллиптических уравнений. - Изв.АН СССР, сер.матем. 1978, 42, № 5, с.1050-1062.
3. А л е к с а н д р о в А.Д. Исследования о принципе максимума. - Изв.высш.учебн.завед., сер.матем., 1961, № 1, с.3-20.
4. А л е к с а н д р о в А.Д. Мажорирование решений линейных уравнений второго порядка. - Вестн.ЛГУ, сер.матем., мех. и астр., 1966, № 1, вып.1, с.5-25.
5. Р о к а ф е л л а р Р. Выпуклый анализ. М., 1973.

Nasarov A.I., Ural'ceva N.N.

Convex-monotonous hulls and an estimate of maximum for solutions of the parabolic equation.

N.V.Krylov's estimate of maximum for solutions of the linear parabolic equation is extended to more general class of operators. On the way some properties of convex and convex-monotonous hulls are investigated.