УДК 514.763

А. П. Норден

ТЕОРИЯ КОМПОЗИЦИЙ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Бурбаки насчитывают три порождающих структуры: (les structures mères): порядка, групповую и топологическую или структуру непрерывности. Экстраполируя историко-математическое мышление вглубь тысячелетий, мы находим на заре человеческой мысли три операции, с помощью которых первобытный человек пытался упорядочить свою деятельность и ее планирование. Соответственно, — это счет, группировка, измерение. Относительно счета это очевидно. Что касается группировки, то не на ней ли основана позиционная система записи чисел и далее (а может быть и ранее) умножение, как сложение групп с одинаковым числом предметов?

Наконец, измерение, возникшее как замена невозможного счета числа зерен или капель, применением меры, т. е. первоначально сосуда постоянной вместимости, однако этот способ оценки хозяйственно важных сыпучих или жидких тел был неизбежно приближенным, а понятие приближения выкристаллизовалось в дальнейшем в понятие окрестности, породив топологию.

Однако рассматривая фактическое содержание математики, которое, казалось бы должно охватываться структурами Бурбаки, мы замечаем странную вещь. Действительно, куда отнести такой ряд фундаментальных понятий, как взаимно однозначные соответствия, функции (как соответствия однозначные в одну сторону), соответствия общего вида и, наконец, понятие декартова произведения множеств? Попытки произвести это включение приводят нас к мысли, что в число основных структур Бурбаки не попала очень важная четвертая структура, которую мы предлагаем назвать структурой композиции.

Бросим теперь взгляд на историю развития промежуточных понятий, принадлежащих этой незамеченной структуре. Понятием однозначного соответствия человек пользуется, в сущности говоря, употребляя в виде простейшей математической машины пальцы рук и ног. Труднее проследить историю сознательного возникновения понятия функциональной зависимости, но, несомненно, оно использовалось постоянно и до того, когда впервые математики стали употреблять слово функция. Требование того, чтобы функция была определена при любых значениях целочисленных аргументов, привело к таким обобщениям понятия числа, как отрицательные и дробные числа. То же требование для функции, определенной на множестве сходящихся последовательностей, привело к понятию иррационального числа. Комплексное число возникает также при распространении операции извлечения корня на область отрицательных чисел. Наконец, понятие декартова произведения невидимо присутствовало при рождении таких фундаментальных величин механики и физики, какой является, например, работа (Галилей, Понселе).

Сейчас я затрудняюсь указать примеры использования понятия соответствия общего вида. В деталях оно начало разрабатываться только в новейшее время, когда возникли такие термины, как биекция, сюръекция и т. д. Что касается геометрии, то в ней идея соответствия приводит к понятиям преобразования подобия, аффинитета, проекцивитета и конформности, а требование взаимной однозначности двух последних порождает несобственные элементы и, наконец, концепции проективного и конформного пространства.

Идея декартова произведения проявляется, пожалуй, прежде всего в понятии класса римановых пространств, которые были названы П. А. Широковым *ламеллярными* [46], а теперь называются по Картану *приводимыми*. Идея декартова произведения лежит и в основе концепции расслоенного пространства, которое в начале также называлось косым произведением [26]. Основной мыслью о декартовой композиции [19], я считаю, то, что там предлагается рассматривать сеть в смысле Дубнова, как топологическое произведение двух базисных линий. Это позволило, в дальнейшем, перенести многие понятия из теории сетей в общую теорию композиций (Е. К. Леонтьев [7]—[9] и Г. Н. Тимофеев [22], [27]—[31]). К этим работам мы еще вернемся.

Понятие композиции лежит и в основе настоящей работы. С точки зрения этого понятия, мы рассматриваем в ней различные темы, занимающие представителей геометрии «в малом». Однако чтобы не перейти всякие границы в размерах статьи, а также в целях унификации терминологии, нам придется просить снисходительного отношения читателя к тому, что мы предлагаем здесь несколько необычную терминологию, введение которой, как нам кажется, оправдывает себя.

Глава 1

КОМПОЗИЦИЯ ВЕКТОРНОГО РАССЛОЕНИЯ

§ 1. СВЯЗНОСТИ НА ВЕКТОРНОМ РАССЛОЕНИИ

Будем называть расслоение векторным, если оно представляет собой композицию дифференцируемого, нужное число раз, пространства X_r, r-измерений (база) и линейного векторного пространства B_n над алгеброй ранга ρ (для простоты предположим ее коммутативной). Такое расслоение мы будем обозначать символом $(\rho n)^r$, называя r его степенью, n — его формальным, а ρn — реальным числом измерений.

Если точка базы задается координатами u^i $(i=\overline{1, r})$, то для них допускаются преобразования, при которых

$$du^{i'} = p_i^{i'} du^i, \tag{1.1}$$

с невырожденной якобиевой матрицей

$$(P') = \| p_i^{i'} \|, \tag{1.2}$$

которая допускает обратную матрицу

$$(P) = \| p_{i'}^i \|. \tag{1.3}$$

С другой стороны, координаты вектора v^a $(a=\overline{1, n})$ слоя преобразуются по закону

$$v^{a'} = A_a^{a'} v^a, \tag{1.4}$$

где $A_a^{a'}$ — дифференцируемые по u^i (нужное число раз) функции от u^i.

Из формул (1.4) обычным образом выводятся законы преобразований координат ковекторов и тензоров слоя.

Будем говорить, что на расслоении задана связность, если задан закон параллельного перенесения (трансляции) вектора в виде уравнений:

$$dv^a + \Gamma^a_{ib} v^b du^i = dv^a + \omega^a_b v^b = 0. \qquad (1.5)$$

Формы $\omega_b{}^a$ назовем формами связности, а величины $\Gamma_{ia}{}^b$ — координатами транслятора. Условие (1.5) позволяет определить понятие абсолютного дифференциала и ковариантной производной для векторов, ковекторов и тензоров. Так, для вектора:

$$\delta v^a = dv^a + \omega^a_b v^b; \quad \nabla_i v^a = \partial_i v^a + \Gamma^a_{ib} v^b. \qquad (1.6)$$

Требование инвариантности определения трансляции приводит, вследствие

$$\delta v^a = \delta\left(A^a_{a'} v^{a'}\right) = A^a_{a'} \delta v^{a'} + \left(\delta A^a_{a'}\right) dv^{a'},$$

к закону преобразования координат транслятора.

Условие

$$\delta A_a^{a'} = \delta A_a^{a'} + \omega^{a'}_{b'} A_a^{b'} - \omega^b_a A_b^{a'} = 0 \qquad (1.7)$$

выражает, с одной стороны, свойство единичного аффинора, заданного сразу в двух различных системах линейных координат. С другой стороны, оно позволяет записать закон преобразования координат транслятора.

Может случиться, что на базе тоже задана связность[1] формами

$$\omega_j{}^i = \Gamma_{kj}{}^i du^k \qquad (1.8)$$

или транслятором $\Gamma_{kj}{}^i$. В таком случае мы можем рассматривать вторые ковариантные производные и их альтернации. Для вектора, например, мы будем иметь

$$\nabla_{[j}\nabla_{i]} v^a = 2R_{jib}{}^a v^b, \qquad (1.9)$$

где

$$R_{jia}{}^b = 2\left(\partial_{[j}\Gamma_{i]a}{}^b + \Gamma_{[jc}{}^b \Gamma_{i]a}{}^c\right) \qquad (1.10)$$

есть смешанный тензор кривизны. Выражения альтернированных вторых ковариантных производных ковекторов и тензоров составляются по обычным правилам.

Если базовая связность задана не произвольно, а определяется инвариантно связностью расслоения, то мы будем говорить, что она индуцируется последней или является ее реализацией на базе.

Предположим, например, что число реальных измерений ρn равно степени r, т. е. рассмотрим расслоение[2]: $(r)^r$.

---

[1] Здесь и в дальнейшем мы будем предполагать, что эти связности лишены кручения.

[2] Такое расслоение мы назовем совершенным.

В таком случае матрица **связующего аффинора**

$$v_i^a = \partial_i v^a$$

(где v^a вектор) будет квадратной неособенной.

Требование

$$\delta v_i^a = dv_i^a + \omega_b^a v^b - \omega_i^j v_j^a = 0,$$

$$\nabla_j v_i^a = \partial_j v_i^a + \Gamma_{jb}^a v_i^b - \Gamma_{ji}^k v_k^a \qquad (1.11)$$

однозначно определяет связность на базе, которая является реализацией связности на расслоении. Такой способ определения реализации связности в пространстве над алгебрами рассматривался в явном виде в [20*a*] и, в сущности говоря, он уже был использован и в [3].

Второе ковариантное дифференцирование в применении к соотношению (1.11) дает выражение для тензора кривизны базовой связности

$$R_{jik}{}^l = A_k^a A_b{}^l R_{jia}{}^b. \qquad (1.12)$$

Отметим, наконец, что все приведенные рассуждения не теряют смысла для расслоения $(\rho n)^1$. Вышеприведенные формулы принимают при этом следующий вид[1]:

$$v^{*'} = Av^* \qquad (1.4')$$

$$\delta v^* = dv^* + \omega v^* = (\partial_l v^* + \Gamma_l v^*)\, du^l, \qquad (1.6')$$

$$\delta A = dA + \omega' A - A\omega = 0 \qquad (1.7')$$

$$\nabla_{[j}\nabla_{i]} v^* = 2R_{ji*}v^* = 2R_{ji}v^* \qquad (1.9')$$

$$R_{ji} = 2\,\partial_{[j}\Gamma_{i]} \qquad (1.10')$$

причем, легко видеть, что R_{ji} есть бивектор на базе и он инвариантен при замене координат на слое.

Полученные формулы исчерпывают, в основном, теорию так называемого продолженного дифференцирования.

§ 2. АДАПТИРОВАННЫЙ РЕПЕР

Обозначим через x_α векторы репера, связанного со всякой точкой векторного расслоения[2] $(n)^r$.

Образуя формально абсолютный дифференциал

$$\delta x_\alpha = dx_\alpha - \omega_\alpha^\beta x_\beta, \quad \alpha, \beta = \overline{1, n}, \qquad (2.1)$$

---

[1] Оказывается удобным в этом случае заменять единственный свободный индекс каким-либо значком, например *, который ставится вверху или внизу для индекса, обозначающего контравариантную или ковариантную валентность; соответственно.

[2] Начиная с этого момента, мы будем считать слой линейным векторным пространством над полем действительных чисел так, что ранг алгебры $\rho = 1$, хотя многие дальнейшие результаты будут справедливы и в более общих случаях.

где ω_α^β — формы связности, заданные на расслоении, придем к следующим деривационным формулам

$$\delta x_\alpha = b_\alpha^\beta x_\beta. \tag{2.2}$$

Формы β_α^β будем называть формами девиации. Коэффициенты $\beta_{i\alpha}^\beta$ в выражениях

$$\omega_\alpha^\beta = b_{i\alpha}^\beta du^i \tag{2.3}$$

определяют тензор девиации.

Предполагая, что на базе задана аффинная связность, составим условия интегрируемости уравнений

$$\nabla_i x_\alpha = b_{i\alpha}^\beta x_\beta, \tag{2.4}$$

равносильных (2.2). Дифференцируя вторично, получим

$$\nabla_j \nabla_i x_\alpha = \nabla_j b_{i\alpha}^\beta x_\beta + b_{i\alpha}^\beta b_{j\beta}^\gamma x_\gamma,$$

а после альтернации[1] —

$$-\frac{1}{2} R_{ji\alpha}{}^\gamma x_\gamma = (\nabla_{[j} b_{i]\alpha}^\gamma + b_{[i\alpha}^\beta b_{j]\beta}^\gamma)\, x_\gamma,$$

откуда

$$R_{ji\alpha}{}^\gamma = -2(\nabla_{[j} b_{i]\alpha}^\gamma + b_{[i\alpha}^\beta b_{j]\beta}^\gamma). \tag{2.5}$$

Рассмотрим репер, образованный ковекторами ξ^β. Назовем его просто корепером для репера x_β, если они связаны условием взаимности:

$$\xi^\beta x_\alpha = \delta_\alpha^\beta. \tag{2.6}$$

Легко видеть, что деривационные уравнения для корепера имеют вид

$$\delta \xi^\beta = -\omega_\alpha^\beta \xi^\alpha \tag{2.7}$$

и их условия интегрируемости не дают ничего нового.

Расслоение назовем плоским, если его тензор девиации

$$\beta_{i\alpha}^\beta = 0. \tag{2.8}$$

Из (2.5) следует, что для плоского расслоения

$$R_{ji\alpha}{}^\beta = 0, \tag{2.9}$$

которое необходимо, но недостаточно для того, чтобы расслоение было плоским. Векторы репера плоского расслоения удовлетворяют системе уравнений

$$\partial_i x_\alpha = \Gamma_{i\alpha}^\beta x_\beta, \tag{2.10}$$

общее решение которых имеет вид

---

[1] Индекс α, как принадлежащий другой области, не считается участвующим в альтернации. Это предположение будем считать принятым и в дальнейшем.

$$\mathbf{x} = \mathbf{c}_\gamma v^\gamma, \tag{2.11}$$

если v^γ образует систему его независимых частных решений. Таким образом, формулы (2.9) показывают, что от репера $\mathbf{x}_\alpha$ мы можем перейти к реперу $\mathbf{c}_\gamma$. Сделав это, мы получим вместо (2.4):

$$\nabla_i \mathbf{x}_\alpha = 0$$

и транслятор

$$\Gamma^\beta_{i\alpha} = 0. \tag{2.12}$$

Репер плоского расслоения, удовлетворяющий (2.12), мы будем называть декартовым. Пользуясь им, мы можем отождествлять результаты ковариантного и обычного дифференцирования.

§ 3. ПОДРАССЛОЕНИЕ. РЕКУРРЕНТНОЕ ПЕРЕНЕСЕНИЕ

Будем называть расслоение $(m)^r$ *подрасслоением* расслоения $(n)^r$, если $m < n$ и слой $S_m \subset S_n$ в соответственных точках их баз, которые предполагаются совпавшими. Репер расслоения $(n)^r$ называется адаптированным к прослойке, если его векторы $\mathbf{x}_a\ (a = \overline{1, m})$ принадлежат слою S_m, а векторы $\mathbf{x}_{\bar{a}}$ $(\bar{a} = \overline{1, \bar{m}})$ ему не принадлежат и $\bar{m} = n - m$. Никаких условий на эти дополнительные векторы, кроме условий независимости векторов $\mathbf{x}_a$, $\mathbf{x}_{\bar{a}}$, пока накладывать не будем.

Деривационные уравнения для адаптированного репера принимают следующий вид:

$$\partial_i \mathbf{x}_a - \Gamma^b_{ia}\mathbf{x}_b - \Gamma^{\bar{b}}_{ia}\mathbf{x}_{\bar{b}} = b^b_{ia}\mathbf{x}_b + b^{\bar{b}}_{ia}\mathbf{x}_{\bar{b}}, \tag{а}$$

$$\nabla_i \mathbf{x}_{\bar{a}} = b^b_{i\bar{a}}\mathbf{x}_b. \tag{в}$$

Группируя члены в (а), получим

$$\partial_i \mathbf{x}_a - \gamma^b_{ia}\mathbf{x}_b = \beta^{\bar{b}}_{ia}\mathbf{x}_{\bar{b}},$$

где

$$\gamma^b_{ia} = \Gamma^b_{ia} + b^b_{ia}, \tag{3.1}$$

$$\beta^{\bar{b}}_{ia} = \Gamma^{\bar{b}}_{ia} + b^{\bar{b}}_{ia}. \tag{3.2}$$

Легко видеть, что при допустимых преобразованиях адаптированного репера, т. е. при таких преобразованиях, которые переводят его в адаптированный, величины $\gamma_{ia}{}^b$ определяют транслятор *внутренней* связности подрасслоения. С помощью соответствующего ей ковариантного дифференцирования уравнения (а) могут быть записаны в следующем виде

$$\nabla_i \mathbf{x}_a = \beta^{\bar{b}}_{ia}\mathbf{x}_{\bar{b}}. \tag{3.3}$$

Величины $\beta_{ia}^{\bar{b}}$ определяют (при допустимых преобразованиях) тензор — девиатор прослойки. Уравнение (в) не представляет интереса, вследствие неинвариантного выбора векторов $x_{\bar{b}}$. Допустим, что девиатор обращается в нуль. Тогда уравнение (3.3) равносильно следующему

$$\delta x_a = \gamma_a^b x_b. \tag{3.4}$$

Это уравнение, очевидно, выражает тот факт, что плоскости S_m переносятся параллельно вдоль кривой базы с касательным вектором du^i. Что касается векторов x_a (и всех их линейных комбинаций), то про них мы будем говорить, что они переносятся рекуррентно.

Если условие (а) выполняется для каждой кривой, т. е. имеет вид

$$\nabla_i x_a = \gamma_{ia}{}^b x_b, \tag{3.5}$$

то мы будем говорить, что система векторов x_a образует рекуррентное поле.

Остановимся особо на случае $m=1$.

Тогда

$$\nabla_i x = \gamma_i x. \tag{3.6}$$

Назовем γ_i модулем рекуррентности.

Переводя x в λx, мы видим, что этот модуль преобразуется так

$$\gamma_i' = \gamma_i - \partial_i \ln \lambda. \tag{3.7}$$

Если γ_i — градиент, то, очевидно, вектор x можно перенормировать так, что после этого

$$\nabla_i x = 0$$

и он переносится параллельно. Два вектора x и y будем называть конкурентными, если для первого выполняется условие (3.6), а для второго условие

$$\nabla_i y = \gamma_i y. \tag{3.8}$$

Если для модулей рекуррентности двух векторов выполняется соотношение

$$\gamma_i' - \gamma_i = \mathrm{grad}, \tag{3.9}$$

то, с помощью перенормировки, их можно сделать конкурентными.

Для любой системы конкурентных векторов, очевидно справедливо утверждение, что и их любая жесткая линейная комбинация (т. е. комбинация с постоянными коэффициентами) конкурентна им, а это значит, что для k независимых конкурентных векторов существует ∞^k полей конкурентных между собой и с основными векторами.

Предположим, наконец, что существует система $k+1$ векторов, каждый из которых рекуррентен.

Из условия линейной зависимости

$$x+\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_k x_k=0$$

получим, дифференцируя,

$$\omega x+(\lambda_1\omega_1+d\lambda_1)x_1+(\lambda_2\omega_2+d\lambda_2)x_2+\ldots+(\lambda_k\omega_k+d\lambda_k)x_k=0,$$

или

$$[\lambda_1(\omega-\omega_1)+d\lambda_1]x_1+[\lambda_2(\omega-\omega_2)+d\lambda_2]x_2+\ldots+[\lambda_k(\omega-\omega_k)+ +d\lambda_k]x_k=0.$$

Таким образом, $\omega-\omega_\alpha=d\ln\lambda_\alpha$, $\alpha=1, 2, \ldots, k$, а это значит, что все векторы x_α конкурентны вектору x, а значит и между собой. Итак: если плоское подмногообразие k измерений допускает существование системы ранга $k+1$ рекуррентного вектора, то оно допускает существование множества ∞^k конкурентных полей, содержащего векторы, коллинеарные данным. Такое многообразие P_k мы будем называть вполне рекуррентным.

§ 4. СКОМПОНОВАННЫЕ РАССЛОЕНИЯ

Будем говорить, что расслоение $(n)^r$ скомпоновано из двух подрасслоений $(m)^r$ и $(\overline{m})^r$, где $\overline{m}=n-m$, и плоскости этих подрасслоений содержат только 0-вектор в качестве своего общего элемента.

Эти подрасслоения с плоскостями S_m и $S_{\overline{m}}$ мы будем называть компонентами расслоения и, для того, чтобы различить их друг от друга, сопровождать их упоминания, а также упоминания всего, что с ними связано словами вертикальный и горизонтальный, соответственно.

Так, плоскость $S_m\,(S_{\overline{m}})$ вертикальна (горизонтальна), принадлежащие ей векторы вертикальны (горизонтальны) и т. д.

Считая, что выбор подрасслоений фиксирован, и рассуждая как выше, приведем деривационные уравнения к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned} \delta x_a &= b_a^{\overline{a}} x_{\overline{a}} \\ \delta x_{\overline{a}} &= b_{\overline{a}}^{a} x_a \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

При этом, составляя выражения абсолютных дифференциалов, мы пользуемся трансляторами Γ_{ia}^{b} и $\Gamma_{i\overline{a}}^{\overline{b}}$, которые определяют, соответственно, вертикальную и горизонтальную связности. При этом имеем два девиатора $b_{ia}^{\overline{b}}$ и $b_{i\overline{a}}^{b}$. Первый из них мы назовем нисходящим, а второй восходящим. Составим условия интегрируемости системы (4.1) или равносильной ей системы

$$\begin{aligned} \nabla_i x_a &= b_{ia}^{\overline{b}} x_{\overline{b}}, \quad (a) \\ \nabla_i x_{\overline{a}} &= b_{i\overline{a}}^{b} x_b, \quad (\overline{a}) \end{aligned} \qquad (4.2)$$

предположив задание связности на базе.
Дифференцируя вторично, получим

$$\nabla_j \nabla_i \mathbf{x}_a = \nabla_j b^{\bar{b}}_{ia} \mathbf{x}_{\bar{b}} + b^{\bar{b}}_{ia} b^{b}_{j\bar{b}} \mathbf{x}_b,$$

а после альтернации и сравнения

$$-R_{jia}{}^{b} = 2b^{\bar{b}}_{[ia} b^{b}_{j]\bar{c}}, \qquad (4.3)$$

$$\nabla_{[j} b^{\bar{b}}_{i]a} = 0, \qquad (4.4)$$

и, аналогично,

$$-R_{ji\bar{a}}{}^{\bar{b}} = 2b^{b}_{[i\bar{a}} b^{\bar{b}}_{j]b}, \qquad (4.3')$$

$$\nabla_{[j} b^{b}_{i]\bar{a}} = 0. \qquad (4.4')$$

Перейдем теперь к рассмотрению расслоений и скомпонованных расслоений специального вида.

§ 5. КАСАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ

Расслоение вида $(r)^r$ называется также касательным. Как мы видели выше, для него существует связующий аффинор, матрица которого (5.1):

$$\| A^a_i \| \quad \begin{pmatrix} a = \overline{1, m} \\ i = \overline{1, n} \end{pmatrix} \qquad (5.1)$$

квадратная, неособенная, что позволяет построить аффинор $A_a{}^i$, связанный с данным соотношением:

$$A^a_i A^i_b = \delta^a_b \; ; \quad A^a_i A^j_a = \sigma^j_i \quad , \qquad (5.2)$$

и условиться о способе замены индексов на базе и индексов в слое. Например, для векторов и ковекторов

$$v^i = A^i_a v^a; \quad w_i = A^a_i w_a.$$

При этом условие (1.12) становится тривиальным. Приняв это соглашение, мы получим следующую систему векторов, образующих базис в слое

$$\mathbf{x}_i = A_i{}^a \mathbf{x}_a. \qquad (5.3)$$

Дифференцируя (5.3) и пользуясь соотношением (1.11), находим

$$\delta A^a_i = 0, \qquad (5.4)$$

$$\nabla_j \mathbf{x}_i = A^a_i b^{\bar{b}}_{ja} \mathbf{x}_{\bar{b}}$$

или

$$\nabla_{[j} \mathbf{x}_{i]} = b^{\bar{b}}_{[ij]} \mathbf{x}_{\bar{b}}. \qquad (5.5)$$

Величины

$$B^{\bar{b}}_{ij} = b^{\bar{b}}_{[ij]} \qquad (5.6)$$

образуют объект неголономности расслоения.

Если

$$b_{ij}{}^{b}=0, \tag{5.7}$$

то

$$\mathbf{x}_i=\partial_i\mathbf{x}. \tag{5.8}$$

Принимая векторы $\mathbf{x}_i$ за базисные в слое, мы получим вместо (4.2 a) уравнения

$$\nabla_j\nabla_i\mathbf{x}=b^{\overline{a}}_{ji}\mathbf{x}_{\overline{a}}, \tag{5.9}$$

которые совпадают с деривационными уравнениями релятивной геометрии поверхности аффинного пространства[1]. Уравнения (5.9) и условия их интегрируемости также вытекают из общей теории нормализации [21].

§ 6. ТЕОРИЯ КОМПОЗИЦИЙ

Если касательное расслоение $(r)^r$ скомпоновано из двух подрасслоений $(m)^r$ и $(\overline{m})^r(\overline{m}=n-m)$, то говорят также, что в нем задана композиция $(m,\overline{m})^r$ из подрасслоений. Предположим, что объекты неголономности обоих подрасслоений обращаются в нуль[2]. В этом случае, как мы видели выше, координаты можно разбить на две группы u^i, $i=1,\ldots,m$ и $u^{\overline{i}}$, $\overline{i}=\overline{1},\ldots,\overline{m}$. Базовое пространство при этом можно рассматривать как декартово произведение двух базовых многообразий X_m и $X_{\overline{m}}$. Фиксируя точку M_0 на втором из них, мы получаем на базе X_n поверхность X^0_m, эта поверхность называется позицией многообразия X_m, а точка M_0 — её центром.

Фиксируя M_0 на X_m, получим позицию многообразия $X_{\overline{m}}$ с центром в точке M_0. Любые две позиции $X_m(X_{\overline{m}})$ называются соответственными (соответственными называются и точки на двух позициях), если координаты $u^i(u^{\overline{i}})$ для них совпадают. Любые две позиции X_m и $X_{\overline{m}}$ называются **трансверсальными**, если они имеют (в малом) только одну общую точку. Пользуясь введенными обозначениями, получим деривационные уравнения в виде следующих четырех равенств:

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla_j\mathbf{x}_i=b^{\overline{k}}_{ji}\mathbf{x}_{\overline{k}} \quad (a)\\
&\nabla_{\overline{j}}\mathbf{x}_i=b^{\overline{k}}_{\overline{j}i}\mathbf{x}_{\overline{k}} \quad (b)\\
&\nabla_{\overline{j}}\mathbf{x}_{\overline{i}}=b^{k}_{\overline{j}\overline{i}}\mathbf{x}_k \quad (\overline{a})\\
&\nabla_j\mathbf{x}_{\overline{i}}=b^{k}_{j\overline{i}}\mathbf{x}_k \quad (\overline{b})
\end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

[1] Ссылка приводится в виде примера, полный обзор литературы по этим вопросам, начиная с работ Бляшке, Миллера и т. д., очевидно невозможен.

[2] Более общий случай — неголономных композиций — был рассмотрен Р. Ф. Домбровским [4].

Будем классифицировать композиции по следующим принципам, говоря, что позиция переносится параллельно по некоторому направлению, если по этому направлению переносится параллельно ее касательная площадка.

1. Если любая позиция $X_m (X_{\overline{m}})$ переносится параллельно по любому, принадлежащему ей пути. т. е. является вполне геодезической, то композиция называется полугеодезической и обозначается через $g\,(\overline{g})$.

2. Композиция называется геодезической, если она одновременно принадлежит к классу g и $\overline{g}$ и обозначается через $(g, \overline{g}) \equiv G$.

3. Композиция называется получебышевской, если $X_m (X_{\overline{m}})$ переносится параллельно по любому пути, принадлежащему трансверсальной позиции и обозначается $t\,(\overline{t})$.

4. Композиция называется чебышевской, если она принадлежит одновременно к классам t и $\overline{t}$ и обозначается $(t, \overline{t}) \equiv T$.

5. Композиция называется полудекартовой, если она принадлежит к классу $g\,(\overline{g})$ и одновременно классу $t\,(\overline{t})$. Она обозначается через $d\,(\overline{d})$.

6. Композиция называется декартовой, если она принадлежит одновременно классам d и $\overline{d}$. Она обозначается через

$$(d, \overline{d}) \equiv D.$$

Все это можно наглядно представить в следующей таблице, содержащей также и указанные признаки, характеризующие все отмеченные классы композиций (см. таблицу на стр. 129).

Сеть двумерного пространства является частным случаем композиции $(1, 1)^2$ и к ним применяются все предыдущие определения. Деривационные уравнения сети имеют вид:

$$\begin{gathered}
\partial_i \mathrm{x}_* - \Gamma_i \mathrm{x}_* = \nabla_i \mathrm{x}_* = b^{\overline{*}}_{i*} \mathrm{x}_{\overline{*}} \\
\partial_{\overline{i}} \mathrm{x}_{\overline{*}} - \Gamma_{\overline{i}} \mathrm{x}_{\overline{*}} = \nabla_{\overline{i}} \mathrm{x}_{\overline{*}} = b^{*}_{\overline{i}\,\overline{*}} \mathrm{x}_*
\end{gathered} \tag{6.3}$$

с условиями интегрируемости

$$\left.\begin{aligned}
-R_{jl} &= 2b^{*}_{[l} b^{*}_{j]} \\
\nabla_{[j} b^{\overline{*}}_{l]*} &= 0 \\
\nabla_{[j} b^{*}_{l]\overline{*}} &= 0
\end{aligned}\right\}. \tag{6.4}$$

С другой стороны, каждую из координатных линий системы, адаптированной к сети, можно развернуть на плоскости по Картану, интегрируя вдоль них систему уравнений

$$\begin{gathered}
\partial_1 \mathrm{x}_* - \Gamma^1_{11} \mathrm{x}_* - \Gamma^2_{11} \mathrm{x}_{\overline{*}} = 0 \\
\partial_2 x_{\overline{*}} - \Gamma^1_{21} \mathrm{x}_* - \Gamma^2_{22} \mathrm{x}_{\overline{*}} = 0
\end{gathered}$$

и вторую, аналогичную ей.

<table>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">D</td><td colspan="2"></td><td>$b^{\bar{j}}_{\overline{kl}}=0$</td></tr>
<tr><td></td><td>$b^{\bar{j}}_{kl}=0$</td><td>d</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td>g</td><td>t</td></tr>
<tr><td></td><td>$b^{j}_{\overline{kl}}=0$</td><td>$\bar{g}$</td><td>G</td><td>$(t, \bar{g})$</td></tr>
<tr><td>$b^{j}_{k\bar{l}}=0$</td><td>$\bar{d}$</td><td>$\bar{t}$</td><td>$(g, \bar{t})$</td><td>T</td></tr>
</table>

Сравнивая, получаем

$$\Gamma^1_{11}=\Gamma_1,\ \Gamma^2_{11}=b^{\overline{*}}_1,\ \Gamma^2_{22}=\Gamma_2,\ \Gamma^1_{12}=b^*_2.$$

Отсюда, согласно (6.2), вытекают обычные признаки полугеодезических, геодезических, получебышевских и чебышевских сетей. Сети вида $(t, \bar{g})$ или $(\bar{t}, g)$ не имеют до сих пор общепринятых названий. Мы предлагаем назвать их сетями Гаусса, так как к этому классу принадлежат и классические полугеодезические сети (которые, кроме того, ортогональны) и одновременно называть гауссовыми и композиции классов $(t, \bar{g})$ и $(\bar{t}, g)$.

Теория сетей подробно изложена в монографии В. И. Шуликовского [47] и в книге автора [21], которому принадлежит и термин декартова сеть. Понятие декартовых композиций введено в работе [20].

Классификации композиций посвящены работы Е. К. Леонтьева, он также ввел в рассмотрение новые классы композиций, определение которых основано на понятии псевдопараллельного переноса [7]—[9].

§ 7. МЕТРИЧЕСКОЕ РАССЛОЕНИЕ

Метрическое расслоение характеризуется существованием невырожденного симметрического тензора $G_{\alpha\beta}$, удовлетворяющего уравнениям

$$\delta G_{\alpha\beta}=0. \tag{7.1}$$

Определив скалярное произведение векторов

$$\mathbf{x}\mathbf{y}=G_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}, \tag{7.2}$$

построим ортрепер, векторы которого подчинены условиям

$$\mathbf{x}_{\alpha}\mathbf{x}_{\beta}=G_{\alpha\beta}. \tag{7.3}$$

Дифференцируя, получим

$$b_{\alpha}^{\beta}G_{\alpha\beta}+G_{\alpha\beta}b_{\beta}^{\gamma}=0$$

или, условившись о перебрасывании индексов с помощью метрического тензора,

$$b_{(\alpha\beta)}=0, \tag{7.4}$$

или

$$b_{i(\alpha\beta)}=0. \tag{7.4}$$

Составим условие интегрируемости систем

$$\nabla_i G_{\alpha\beta}=0, \tag{7.5}$$

получим

$$R_{ji(\alpha\beta)}=0. \tag{7.6}$$

В случае совершенного расслоения можно построить тензор

$$g_{ij}=A_i^{\alpha}A_j^{\beta}G_{\alpha\beta}, \tag{7.7}$$

очевидно, удовлетворяющий уравнению

$$\delta g_{ij}=0. \tag{7.8}$$

Таким образом, базовая связность совершенного метрического расслоения риманова.

Глава II

КОМПОЗИЦИИ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Будем называть линейное подмногообразие P_m проективного пространства P_n слоем **ранга** $m+1$ и будем обозначать $P_{(m+1)}$. Эта терминология позволяет включить в общее понятие слоя пустое множество, точку, прямую и само пространство, говоря в соответствующих случаях о слое ранга 0, 1, $n+1$. Очевидно, что ранг равен максимальному числу независимых точек, содержащихся в данном слое. Для пары слоев $P_{(m)}$ и

$P_{(\overline{m})}$ ранга m и $\overline{m}$, соответственно, будем называть оболочкой слой минимального ранга, содержащий данную пару, а ядром слой, по которому пересекаются данные слои. Назовем также избытком пары ранг оболочки, а ее недостатком ранг ядра. Для всех этих рангов, обозначенных, соответственно, через m, $\overline{m}$, s и p, имеет место формула

$$m+\overline{m}=s+p, \tag{*}$$

которую назовем законом сохранения. Пара называется полной[1], если ее недостаток равен нулю, а избыток — рангу пространства. Из (*) следует, что для полной пары

$$m+\overline{m}=n \tag{**}$$

Полная пара $m(\overline{m})$ называется также $(m-1)$-парой, и эти названия мы сохраним для рассмотрения упорядоченных пар. При этом первый элемент такой пары мы будем всегда называть вертикальным, а второй — горизонтальным.

Геометрия проективного пространства ранга n есть геометрия псевдовеличин линейного пространства n измерений, что позволяет использовать в дальнейшем аппарат векторного исчисления и все приведенные ранее результаты. При этом о векторе $\mathbf{x}$ и соответствующей ему точке M мы будем говорить, что M изображает $\mathbf{x}$, а $\mathbf{x}$ выражает M.

§ 8. СЕМЕЙСТВО СЛОЕВ ИЛИ РАССЛОЕННОЕ СЕМЕЙСТВО

Семейство слоев или расслоенное семейство (р. с.), зависящих от r параметров, мы будем обозначать символом $(m)^r$, где m — ранг слоя. Поле векторов $\mathbf{v}$, принадлежащих к слоям семейства, выражает множество точек, которые образуют поверхность или заполняют какую-то область X_k проективного пространства $P_{(n)}$. Число измерений этой области зависит от ранга матрицы производных от однородных координат точки по параметрам семейства

$$\|\partial_i v^\alpha\|,$$

где $i=1, \ldots, r$, а $\alpha=1, \ldots, n$. Эту поверхность будем называть опорной поверхностью поля $\mathbf{v}$.

Будем классифицировать расслоенные семейства, используя терминологию, введенную в следующей таблице, где m — ранг, $\overline{m}=n-m$ — коранг слоя, а n — ранг пространства.

[1] В дальнейшем мы будем иметь дело только с такими и будем называть их просто парами.

$k < \overline{m}$	расслоенная поверхность
$r = \overline{m}$	расслоенная конгруэнция
$\overline{m} < r < m\overline{m}$	расслоенный комплекс
$r = m\overline{m}$	расслоенное пространство

Нет смысла рассматривать семейства, зависящие от числа параметров больше чем $m\overline{m}$, так как это есть число параметров всех слоев ранга r проективного пространства.

Возьмем для примера трехмерное пространство. В этом случае $n=4$, m может принимать значения 1, 2, 3, а r значения 1, 2, 3, 4, и мы приходим к следующей таблице:

r	Множество точек	Семейство прямых	Семейство плоскостей
1	Линия	Линейчатая поверхн.	Конгруэнция плоскостей
2	Поверхность	конгруэнция	Комплекс плоскостей
3	Пространство	комплекс	Пространство плоскостей
4	—	Линейчатое пространство	—

§ 9. КОМПОЗИЦИЯ РАССЛОЕННЫХ СЕМЕЙСТВ

Композицией расслоенных семейств проективного пространства ранга n называется совокупность полных пар слоев ранга m и $\overline{m}=n-m$ на общей базе X_r, где r — число измерений базы или степень композиции. Такие композиции обозначим символом $(m, \overline{m})^r$.

Как и во введении к этой части, мы будем сопровождать термином «вертикальный» все, что относится к расслоенному семейству $(m)^r$ и — «горизонтальный» — все, что относится к семейству $(\overline{m})^r$.

Классификация композиций основывается на классификации расслоенных семейств и может быть описана следующей таблицей:

	Поверхность	Конгруэнция	Комплекс
Поверхность	$r < \begin{cases} m \\ \overline{m} \end{cases}$	$m = r < \overline{m}$	$m < r < \overline{m}$
Конгруэнция	$\overline{m} = r < m$	$r = m = \overline{m}$	$m < r = \overline{m}$
Комплекс	$\overline{m} < r < m$	$\overline{m} < r = m$	$r > \begin{cases} m \\ \overline{m} \end{cases}$

Остановимся на первой строке этой таблицы и предположим, для определенности, что семейство $(\overline{m})^r$ получено из семейства $(m)^r$ коррелятивным или даже полярным преобразованием. Тогда становится очевидным, что точки многообразия $(\overline{m})^r$ изображаются касательными гиперплоскостями поверхности $(X)^r$. Но число параметров, от которых зависят эти плоскости, очевидно не может превышать $n-1$, где n — ранг проективного пространства. Однако число измерений поверхности $(X)^r$ равно $r+m-1$ и в случае композиции поверхность — комплекс равно самое большее $n-1$. Таким образом, тангенциальный ранг поверхности в этом случае будет ниже нормального на число $\overline{m}-r$, которое мы назовем тангенциальным дефектом поверхности.

Обратимся теперь к общему случаю и запишем деривационные уравнения для адаптированного репера композиции

$$\left.\begin{aligned} \nabla_i \mathrm{x}_a &= b_{ia}{}^{\overline{b}} \mathrm{x}_{\overline{b}} \quad (a) \\ \nabla_i \mathrm{x}_{\overline{a}} &= b_{i\overline{a}}{}^{b} \mathrm{x}_b \quad (\overline{a}) \end{aligned}\right\}. \tag{9.2}$$

Для того чтобы вертикальный вектор $\mathbf{v} = v^a \mathrm{x}_a$ переносился рекуррентно, необходимо и достаточно, чтобы

$$d\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} + \mu^{\overline{b}} \mathrm{x}_{\overline{b}},$$

т. е. чтобы изображающая его точка смещалась в плоскости, содержащий ее и горизонтальную плоскость. Кривую, которая в каждой своей точке касается такой плоскости, мы будем называть горизонтальной (как и всякое многообразие X_k, имеющее k измерение). Применяя те же рассуждения к горизонтальным векторам и точкам, приходим к следующим результатам. Для того, чтобы вертикальный (горизонтальный) вектор переносился рекуррентно в соответствующей связности, необходимо и достаточно, чтобы изображающая его точка смещалась по горизонтальной (вертикальной) кривой.

Если вектор образует рекуррентное поле, т. е.

$$\nabla_i v^a = \omega_i v^a,$$

то изображаемая им поверхность X_k ($k\leqslant r$) горизонтальна, т. е. ее касательные плоскости содержат горизонтальную плоскость; аналогичный результат имеет место и для горизонтальных рекуррентных полей.

Связности, полученные выше указанным способом, рассматривались, по-видимому, впервые Ю. Г. Лумисте [10].

Перейдем к приложениям наших общих соображений к различным частным случаям.

§ 10. ТЕОРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Рассмотрим композицию

$$(m, \overline{m})^{n-1},$$

где n—ранг пространства, и такое вертикальное векторное поле, вектор которого однозначно изображается точками, лежащими в n—1-мерной области этого пространства. Задание композиции определяет в каждой точке этой области плоскость $\overline{m}$ измерений, содержащую эту точку, т. е. задано распределение. Кроме того, через каждую точку проходит вертикальная плоскость $P_{(m)}$, а в каждой плоскости распределения лежит горизонтальная плоскость $P_{(\overline{m})}$. Таким образом, распределение нормализовано по А. П. Нордену и плоскости $P_{(m)}$, и $P_{(\overline{m})}$ являются нормалями 1-го и 2-го рода, соответственно.

В обширной литературе, посвященной неголономной геометрии в евклидовом и аффинном пространстве (см. работу В. В. Вагнера [2] и приведенную там литературу) уже указывалась связность, которая с нашей точки зрения является горизонтальной.

В инвариантной аналитической форме теория распределений в проективном пространстве и пространстве проективной связности была построена Г. Ф. Лаптевым и Н. М. Остиану [6]. Что касается вертикальной связности, то ее можно рассматривать как связность на распределении, плоскости которого $P_{(m)}$, совпадают с нормалями 1-го рода данного распределения. Последовательное применение этой точки зрения, по-видимому, ни кем еще не использовалась и обещает привести к интересным результатам.

Легко видеть, что определенная таким образом композиция не удовлетворяет условиям двойственности. Чтобы достигнуть этой двойственности следует предположить еще, что задана гиперплоскость ξ, содержащая горизонтальный слой, которая и соответствует точке $\mathbf{v}$ на вертикальном слое. Это соответствие определяет в пространстве проективно — евклидову связность нормализованного пространства ([21], §62) — связность на базе. В аффинной и неевклидовой геометрии роль этой плоскости берет на себя несобственная точка или поляра точки $\mathbf{v}$, соответственно.

§ 11. ТЕОРИЯ НОРМАЛИЗОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Рекуррентное поле v изображается горизонтальной поверхностью, а вертикальные и горизонтальные плоскости являются, соответственно, нормалями 1-го и 2-го рода этой поверхности.

Учитывая уравнение

$$\nabla_i v^a = \omega_i v^a,$$

характеризующее рекуррентное поле, попытаемся ввести на базе аффинную связность без кручения, так, чтобы выполнялось условие

$$\nabla_j (b_{ia}^{\bar{a}} v^a) = 0 \tag{11.1}$$

или иначе

$$v^a \nabla_j b_{ia}^{\bar{a}} = 0. \tag{11.2}$$

Из условий интегрируемости (4.4) мы видим, что тензор $\nabla_j b_{ia}^{\bar{a}}$ симметричен по индексам i, j и, следовательно, число уравнений (11.2) равно $\frac{r^2(r+1)}{2}$. С другой стороны, таково же число коэффициентов аффинной связности без кручения на базе X_r. Это и позволяет определить эту связность из условий (11.2). Легко видеть, что это и есть внутренняя связность 1-го рода нормализованной поверхности в смысле А. П. Нордена [21].

§ 12. ПАРЫ КОНГРУЭНЦИЙ БИАНКИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

Если один из компонентов композиции допускает существование двух или более рекуррентных полей, то композиция допускает существование соответствующего числа вертикальных (горизонтальных) поверхностей, находящихся в общей нормализации. Случай конгруэнции $(2)^2$ трехмерного пространства, допускающей две горизонтальные поверхности, рассматривался в [21], § 70. Более общие случаи несомненно дают возможность перейти к постановке новых интересных задач. Здесь же мы рассмотрим предельный случай проблемы.

Пусть число независимых рекуррентных полей в вертикальной плоскости ранга m равно $m+1$, тогда, в силу результата § 3, таких полей будет ∞^{m-1} и все они будут конкурентны друг другу. Иными словами, любой вертикальный вектор войдет в состав рекуррентного поля, а изображающая его точка опишет горизонтальную поверхность, в частном случае композиции $(1, 1)^2$ трехмерного пространства. Бианки говорил о расслояемой (stratifiable) паре конгруэнций (см. [32] и указанную там литературу). Многомерные обобщения рассматривались Ю. Г. Лумисте [11].

Обращаясь к уравнениям задачи, предположим, что композиция допускает систему уравнений

$$\nabla_i v^a = \omega_i v^a,$$

которая вполне интегрируема. В таком случае

$$\nabla_{[j}\nabla_{i]} v^a = -\frac{1}{2} R_{jib}^{\ \ a} v^b = \nabla_{[j}\omega_{i]} v^a$$

и, вследствие того, что v^a произвольный вектор,

$$R_{jib}^{\ \ a} = -2\nabla_{[j}\omega_{i]}\delta_b^a = R_{ji}\delta_b^a, \tag{12.1}$$

откуда и из (4.3) следует

$$b^{\bar{b}}_{[ia} b^{b}_{j]\bar{b}} = \nabla_{[j}\omega_{i]}\delta_a^b. \tag{12.2}$$

Дальнейшее продвижение к решению проблемы, очевидно следует начать с изучения сильных алгебраических ограничений, которые накладывает на девиатор условие (12.2).

§ 13. ДВОЙСТВЕННЫЕ НОРМАЛИЗАЦИИ

Двойственная нормализация поверхности r измерений в пространстве ранга n, введенная А. В. Чакмазяном, характеризуется тем, что нормаль 1-го рода содержит характеристику r-параметрического семейства «главных» касательных гиперплоскостей поверхности [33]—[42].

Таким образом, если ξ — главная гиперплоскость, а $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_a$ — вершины нормали 1-го рода, то $a=1,\ldots, m-1$, $(m-1=r)$,

$$\xi\mathbf{x}_a=0;\ \partial_i\xi\mathbf{x}_a=0;\ \xi\mathbf{x}\neq 0\ (=1).$$

Дифференцируя, получим

$$\nabla_i\mathbf{x}_a\xi = (b^{\bar{b}}_{ia}\mathbf{x}_{\bar{b}} + b^0_{ia}\mathbf{x})\,\xi = b^0_{ia} = 0.$$

Таким образом, деривационные уравнения принимают вид:

$$\nabla_i\mathbf{x}_a = b^{\bar{b}}_{ia}\mathbf{x}_{\bar{b}}\quad a=1,\ldots,m-1=1,\ldots,r,$$

а это значит, что плоскости $m-1$ измерений, совпадающие с характеристикой семейства главных плоскостей, переносятся горизонтально, т. е. образуют поверхность $(m)^r$.

§ 14. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ

Рассмотрим линию γ, представленную вертикальной точкой

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(t).$$

Если она горизонтальна, то $\mathbf{x}$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{x}' = \lambda\mathbf{x} + \bar{\mathbf{y}}, \tag{14.1}$$

где $\bar{\mathbf{y}}$ — вектор горизонтальнэй точки.

Если, кроме того, выполняется условие

$$\bar{y}' = \mu \bar{y} + z, \tag{14.2}$$

где z — вертикальная точка, т. е. линия $\bar{y} = \bar{y}(t)$ вертикальна, то кривая γ называется горизонтальной геодезической (г. г.) композиции. Из (14.1) и (14.2) вытекает уравнение

$$x'' + \alpha x' + \beta x = z, \tag{14.3}$$

которое показывает, что соприкасающаяся плоскость г. г. линии пересекает вертикальную плоскость по прямой (или не определена, когда эта линия прямая). Чтобы получить другое условие, назовем расслоенную поверхность $(m)^1_\gamma$ сопутствующей поверхностью линии γ, если каждый из ее слоев содержит точку x. Условие (14.3) показывает, что г. г. линия является асимптотической на сопутствующей ей поверхности.

Нормировку точек x, $\bar{y}$ и параметр t всегда можно подобрать так, чтобы уравнения (14.1) и (14.2) приняли следующий канонический вид

$$x' = y, \tag{14.1'}$$

$$y' = z. \tag{14.2'}$$

Положив $x = x_a v^a$, $\bar{y} = x_{\bar{a}} w^{\bar{a}}$ и замечая, что

$$\delta v^a = 0, \quad \delta w^{\bar{a}} = 0,$$

получим для г. г. линии систему уравнений

$$\delta v^a = 0, \quad v^a \delta \left(b^{\bar{b}}_{ia} \frac{du^i}{dt} \right) = 0. \tag{14.4}$$

§ 15. СВЯЗНОСТЬ НЕЙФЕЛЬДА

В скомпонованном пространстве слоев ранга m число уравнений

$$\partial_j b^{\bar{a}}_{ia} + \Gamma^{\bar{a}}_{j\bar{c}} b^{\bar{c}}_{ia} - \Gamma^c_{ja} b^{\bar{a}}_{ic} - \Gamma^k_{ji} b^{\bar{a}}_{ka} = 0$$

равно числу неизвестных.

Предполагая, что ранг матрицы

$$\| b^{\bar{a}}_{ia} \|,$$

где i — номер строки, а комбинации a, $\bar{a}$ определяют номер столбца, равен $m\bar{m}$, можно определить эти неизвестные и тем самым связность на базе.

Таким образом, условия

$$\nabla_j b^{\bar{a}}_{ia} = 0, \quad \nabla_j b^a_{i\bar{a}} = 0, \tag{15.1}$$

вообще говоря, определяют две связности на базе скомпонованного пространства. Это и было отмечено Э. Г. Нейфельдом в работе [12].

Геодезические линии в этих связностях характеризуются тем, что на их сопровождающих поверхностях каждая горизонтальная (вертикальная) линия — асимптотическая, что следует из уравнения (14.4), которое принимает вид

$$v^a b^{\overline{a}}_{ia} \delta \left(\frac{du^l}{dt}\right) = 0$$

и выполняется для любого начального значения v^a.

§ 16. РАССЕЧЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Проективное пространство $P_{(n)}$ ранга n назовем рассеченным, если в нем задан слой $P_{(\overline{m})}$ ранга $\overline{m}$, а фундаментальная группа сохраняет этот абсолютный или несобственный слой. Обозначим такое пространство через $P^{\overline{m}}_n$. Приведем примеры: P^{n-1}_n есть аффинное пространство; P^2_n — аксиальное; P^1_n — центропроективное пространство. Слой $P_{(m)} \subset P^{\overline{m}}_n$ называем главным, если

$$m + \overline{m} = n.$$

Рассмотрим расслоенное пространство главных слоев $P_{(m)}$ в $P^{\overline{m}}_n$, скомпоновав его с абсолютной плоскостью $P_{(\overline{m})}$. Репер, адаптированный к такой композиции, будем называть декартовым, причем, очевидно мы можем считать, что для векторов «несобственных» точек можно считать, что

$$\mathrm{x}_{\overline{a}} = \mathrm{const} \quad \overline{a} = 1, \ldots, \overline{m}. \tag{16.1}$$

При этом деривационные уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} \nabla_i \mathrm{x}_a &= b^{\overline{a}}_{ia} \mathrm{x}_{\overline{a}}, \\ \nabla_i \mathrm{x}_{\overline{a}} &= 0, \end{aligned} \tag{16.2}$$

а из их условий интегрируемости следует, что

$$R_{jik}{}^l = 0 \tag{16.3}$$

так, что вертикальная (и единственно возможная) связность Нейфельда — евклидово-афинная.

§ 17. КОМПОЗИЦИЯ РАССЛОЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Вводя в рассеченном пространстве начальный главный слой $\mathrm{A}_a = \mathrm{const}$, мы получим для любого главного слоя разложение

$$\mathrm{x}_a = \mathrm{A}_a + X^{\overline{a}}_a \mathrm{x}_{\overline{a}}. \tag{17.1}$$

Легко видеть, что прямоугольная матрица $\|X_a{}^{\overline{a}}\|$ совпадает с матричной координатой Хуа Ло-Гена — Розенфельда [25]. Это позволяет рассматривать пространство m-пар и его подмногообразий, с точки зрения теории композиций.

Само расслоенное пространство слоев ранга $m+1$ проективного пространства P_n, как показал Б. А. Розенфельд [24], является правым проективным пространством над алгеброй квадратных матриц $(m+1)$-го порядка вещественной размерности $(m+1)(n-m)$. Каждая точка этого пространства определяется однородной матричной координатой X, элементы которой — однородные координаты базисных точек x_a слоя. Эта матричная координата определяется с точностью до преобразования

$$X^* = XA, \quad (\det\|A\| \neq 0), \tag{17.2}$$

что следует из преобразования базисных точек слоя.

Если теперь в пространстве задана композиция, т. е. каждому слою соответствует слой дополнительной размерности, то из основных деривационных уравнений:

$$\nabla_i \mathrm{x}_a = b_{ia}^{\overline{a}} \mathrm{x}_{\overline{a}},$$

$$\nabla_i \mathrm{x}_{\overline{a}} = b_{i\overline{a}}^{a} \mathrm{x}_a,$$

$$\nabla_l b_{ja}^{\overline{a}} = 0$$

первое может быть записано в виде:

$$\partial X = X\Gamma_i + Y_i, \tag{17.3}$$

где прямоугольные матрицы Y_i имеют вид

$$Y_i = \left\| b_{ia}^{\overline{c}} x_{\overline{c}}^{\alpha} \right\|, \tag{17.4}$$

а Γ_i являются матричными координатами транслятора:

$$\Gamma_i = \|\Gamma_{ib}{}^{a}\|. \tag{17.5}$$

При перенормировании (17.2) Y_i преобразуются по закону

$$Y_i^* = Y_i A, \tag{17.6}$$

т. е. они согласованы с матричной координатой слоя.

Дифференцируя ковариантно Y_i, в связности введенной Нейфельдом получим.

$$\nabla_j Y_l = Y_l \Gamma_j + X P_{lj}, \tag{17.7}$$

где

$$P_{lj} = \left\| b_{i\overline{a}}^{c} b_{jb}^{\overline{a}} \right\|. \tag{17.8}$$

Таким образом, расслоенное пространство заданной композиции может быть рассмотрено как нормализованное пространство над алгеброй матриц. Оно определяется деривационными уравнениями (17.3) и (17.7). Соответствующая связность будет проективно евклидовой над алгеброй матриц в том смысле, что ее геодезические линии, проходящие через данную точку X в направлении вектора τ^i, будут лежать на проективной матричной прямой, проходящей через точки X и $V=Y_i\tau^i$. Это следует из того, что

$$dV=VL+XP\,(L=L_i du^i+\lambda E;\ X=P_{ij}du^i\tau^j). \tag{17.9}$$

§ 18. АФФИНОР КОМПОЗИЦИИ

Адаптированный репер x_a, $\mathrm{x}_{\bar{a}}$ композиции и взаимный ему корепер ξ^a, $\xi^{\bar{a}}$ связаны условиями

$$\mathrm{x}^a\xi_b=\delta^a_b;\quad \mathrm{x}^a\xi_{\bar{b}}=\mathrm{x}^{\bar{a}}\xi_b=0;\quad \mathrm{x}^{\bar{a}}\xi_{\bar{b}}=\delta^{\bar{a}}_{\bar{b}}. \tag{18.1}$$

Пользуясь диадным произведением, построим аффиноры

$$\mathfrak{A}=2\,(\mathrm{x}^a,\ \xi_a)\quad \text{и}\quad \overline{\mathfrak{A}}=2\left(\mathrm{x}^{\bar{a}},\ \xi_{\bar{a}}\right),$$

сумма которых

$$\mathfrak{A}+\overline{\mathfrak{A}}=2E, \tag{18.2}$$

где E — единичный аффинор.

Воздействуя аффинором $\mathfrak{A}$ на любой вертикальный вектор $\mathbf{v}=v^b\mathrm{x}_b$, мы получим

$$\mathfrak{A}\mathbf{v}=2\mathbf{v}; \tag{a}$$

аналогичным образом для горизонтального вектора —

$$\overline{\mathfrak{A}}\mathbf{w}=-2\mathbf{w} \tag{в}$$

и

$$\mathfrak{A}\mathbf{w}=\overline{\mathfrak{A}}\mathbf{v}=0 \tag{c}$$

Аффинором композиции назовем аффинор $\mathfrak{B}$,

$$2\mathfrak{B}=\mathfrak{A}-\overline{\mathfrak{A}}, \tag{18.3}$$

который, очевидно, удовлетворяет условию

$$4\mathfrak{B}^2=-E. \tag{18.4}$$

Воздействуя им на любой вектор

$$\mathbf{t}=\mathbf{v}+\mathbf{w},$$

получим

$$2\mathfrak{B}\,(\mathbf{v}+\mathbf{w})=2\,(\mathbf{v}-\mathbf{w}).$$

Таким образом, любой вектор $\mathbf{t}$ и вектор $\tilde{\mathbf{t}}=\mathfrak{B}\mathbf{t}$ образуют гармоническую четвертку с горизонтальным и вертикальным вектором. Такие векторы называются *сопряженными* относительно композиции.

Алгебраические и дифференциально-геометрические свойства аффинора композиции были положены Я. С. Дубновым [5], [6] и В. И. Шуликовским [47] в основу теории сетей, а А. П. Норденом и Г. Н. Тимофеевым в теории композиции [22].

В частности, задание такого аффинора, удовлетворяющего условию

$$\mathfrak{B}^2 = -\lambda^2 E, \tag{18.5}$$

в четномерном пространстве, позволяет геометризировать понятие композиции с комплексно сопряженными компонентами. Геометризация дифференциальных свойств сети с мнимыми линиями дана в докторской диссертации [13], [14] и монографии А. П. Нордена [21].

Дифференцируя (18.3) и используя деривационные уравнения для репера и корепера, получим

$$\partial_i \mathfrak{B} = b^a_{i\bar a} (\mathrm{x}, {}^{\bar a}\xi_a) - b^{\bar a}_{ia} (\mathrm{x}, {}^a\xi_{\bar a}). \tag{18.6}$$

§19. ПРИВОДИМОЕ ПРОСТРАНСТВО

В случае касательного расслоения аффинору композиции на базе соответствует некоторый аффинор $\varepsilon_i{}^j$, удовлетворяющий условию

$$\varepsilon^k_i \varepsilon^j_k = \delta^j_i.$$

Инволюция, определенная этим аффинором, называется гиперболической, эллиптической или параболической в зависимости от того, будет ли иметь место условие

$$\sigma > 0; \ \sigma < 0, \text{ или } \sigma = 0,$$

соответственно.

Используя терминологию, принятую в работах [17], [18], назовем симметрический тензор g_{ij} B-тензором или S-тензором, если

$$\gamma_{[ij]} = 0 \text{ или } \gamma_{(ij)} = 0,$$

соответственно, где

$$\gamma_{ij} = g_{ik} \varepsilon_j{}^k; \tag{19.1}$$

наконец, если в связности на базе выполняется условие

$$\nabla_j \varepsilon_i{}^k = 0, \tag{19.2}$$

то говорят, что инволюция $\varepsilon_i{}^k$ определяет структуру почти произведения, если $\sigma > 0$, или почти комплексную структуру, если $\sigma < 0$.

Предположим теперь, что базовая связность есть связность риманова пространства, а ее основной тензор есть B-тензор. П. А. Широков показал в своей работе [46], что в таком случае пространство приводимо, т. е. что его линейный элемент может быть приведен, если метрические тензоры g_{ij} и γ_{ij} не вырождены, к следующему виду

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j + g_{\bar i \bar j} du^{\bar i} du^{\bar j}$$

и величины g_{ij} и $g_{\bar i \bar j}$ зависят каждая только от переменных u^i или $u^{\bar i}$, соответственно.

§ 20. ПРОСТРАНСТВО ШИРОКОВА (КЭЛЕРА). ПРОСТРАНСТВО РАШЕВСКОГО

В той же работе 1925 г. [46] П. А. Широков рассмотрел пространство, которое он назвал A-пространством; это — риманово пространство, метрический тензор которого является A-тензором по отношению к аффинору, определяющему почти комплексную структуру. В 1933 году Кэлер пришел к этому же пространству, которое чаще всего называют кэлеровым.

Случай гиперболической инволюции, определяющей структуру почти произведения в римановом пространстве с метрическим S-тензором, был рассмотрен в 1948 году П. К. Рашевским [23].

§ 21. ГЕОМЕТРИЯ ПЛОСКОСТЕЙ НЕЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Задание абсолюта неевклидова пространства соответствует заданию скалярного произведения в линейном векторном пространстве.

Рассмотрим композицию расслоенного пространства $(m, \bar{m})^{m\bar{m}} (\bar{m}=n-m)$ таких слоев $P_{(m)}$ и $P_{(\bar{m})}$, которые взаимно полярны относительно абсолюта. В таком случае мы будем иметь для векторов адаптированного репера выражения метрических тензоров

$$\mathrm{x}_a \mathrm{x}_b = G_{ab}; \quad \mathrm{x}_{\bar{a}} \mathrm{x}_{\bar{b}} = G_{\bar{a}\bar{b}} \tag{21.1}$$

и условие ортогональности

$$\mathrm{x}_a \mathrm{x}_{\bar{a}} = 0. \tag{21.2}$$

Дифференцируя ковариантно, получим

$$\nabla_i G_{ab} = \nabla_i G_{\bar{a}\bar{b}} = 0 \tag{21.3}$$

и

$$b_{ia}^{\bar{b}} G_{\bar{b}\bar{a}} + b_{i\bar{a}}^{b} G_{ba} = 0$$

или, условившись в перебрасывании индексов с помощью метрических тензоров,

$$b_{ia\bar{a}} + b_{i\bar{a}a} = 0. \tag{21.4}$$

Дифференцируя последнее уравнение в связности Нейфельда, мы приходим к выводу, что в этом случае вертикальная и горизонтальная связности на базе совпадают между собой.

Дифференцируя в этой связности симметрический тензор

$$g_{ij} = b_{ia}^{\bar{a}} b_{j\bar{a}}^{a}, \tag{21.5}$$

получим

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \tag{21.6}$$

а это значит, что связность Нейфельда есть связность риманова пространства с метрическим тензором (21.5). В случае ранга $n=4$ (т. е. в пространстве прямых трехмерного неевклидова пространства) эти связности рассматривались в работах [19], [20 *a*].

Я благодарю Эрнста Гергардовича Нейфельда, работа которого [12] во многом стимулировала этот обзор, кроме того он оказал мне неоценимую помощь при оформлении моей статьи. В частности, им написан § 17.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. *Бурбаки Н.*, Очерки по истории математики. Изд-во ин. лит., 1963, 292 с.
2. *Вагнер В. В.*, Дифференциальная геометрия неголономных многообразий. Казань, VIII Международный конкурс на соискание премии им. Лобачевского, 1940, 195—262
3. *Вишневский В. В.*, Аффинорные структуры как структуры, определяемые алгебрами. Уч. зап. Казанск. ун-т, 1970, *129*, № 6, 54—68 (РЖМат, 1971, 2А614)
4. *Домбровский Р. Ф.*, О неголономных композициях на поверхности $M_{m,r}$ в P_n. Всес. научн. конференция по неевклид. геом. «150 лет геометрии Лобачевского». Казань, Тезисы докл., 1976, 69
5. *Дубнов Я. С.*, Sur les caracteristiques tensorialles des surfaces et de leurs reseaux. Труды семин. по векторн. и тензорн. анализу, 1937, *4*, 197—304
6. *Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М.*, Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1971, *3*, 49—94 (РЖМат, 1972, 6А680)
7. *Леонтьев Е. К.*, К общей теории композиций в пространствах аффинной связности. В сб. «Итог. научн. аспирантск. конференция за 1965 г. Казанск. ун-т, Матем., механ. Тезисы докл. Казань, 1967, 26—28 (РЖМат, 1967, 10А537)
8. —, Классификация специальных связок и композиций многомерных пространств. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1967, № 5, 40—51 (РЖМат, 1967, 11А492)
9. —, О чебышевских композициях. Уч. зап. Казанск. ун-т, 1966, 126, № 1, 23—40 (РЖМат, 1968, 9А473)
10. *Лумисте Ю. Г.*, Однородные расслоения со связностью и их погружения. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1966, *1*, 191—237 (РЖМат, 1967, 6А394)
11. —, К теории многообразий плоскостей евклидова пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, *192*, 12—46 (РЖМат, 1968, 5А571)
12. *Нейфельд Э. Г.*, Аффинные связности на нормализованном многообразии плоскостей проективного пространства. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1976, № 11, 48—55 (РЖМат, 1977, 6А540)
13. *Норден А. П.*, О внутренних геометриях поверхностей проективного пространства. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1948, вып. 6, 125—224
14. —, О внутренних геометриях поверхностей проективного пространства. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1949:, вып. 7, 31—64
15. —, Пространство линейной конгруэнции. Мат. сб., 1949, *24* (66), 429—455
16. —, Биаффинное пространство и его отображение на себя. Уч. зап. Казанск. ун-т, 1952; *112*, вып. 10, 3—11
17. —, О самосопряженных образах биаксиального пространства. Уч. зап. Казанск. ун-т, 1954, *114*, вып. 2, 3—12 (РЖМат, 1955, 4664)
18. —, О комплексном представлении тензоров пространства Лоренца. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 1, 156—163 (РЖМат, 1960, 3417)

19. —, О некоторых возможных направлениях развития линейчатой геометрии. Уч. зап. Казанск. ун-т, 1963, *123*, № 1, 141—151 (РЖМат, 1964, 1А392)
20. —, Пространства декартовой композиции. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1963, № 4, 117—128 (РЖМат, 1964, 3А367)
20 *а* — О структуре связности на многообразии прямых неевклидова пространства. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1972, № 12, 84—94 (РЖМат, 1973, 5А675)
21. — Пространства аффинной связности. М., «Наука», 1976
22. —, *Тимофеев Г. Н.*, Инвариантные признаки специальных композиций многомерных пространств. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1972, № 8, 81—89 (РЖМат, 1973, 1А674)
23. *Рашевский П. К.*, Скалярное поле в расслоенном пространстве. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1948, *6*, 225—248
24. *Розенфельд Б. А.*, Геометрия многообразия плоскостей проективного пространства как точечная проективная геометрия. Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1952, *9*, 213—222
25. —, Геометрия прямоугольных матриц и ее применение к вещественной и неевклидовой геометрии. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1957, *1*, 233—247
26. *Стинрод Н. Е.*, Топология косых произведений. Изд-во ин. лит., 1953 (РЖМат, 1953, 627К)
27. *Тимофеев Г. Н.*, Конформно-евклидово симметрическое пространство Вейля. В сб. «Мат., некоторые ее прилож. и методика преподавания». Ростов-на-Дону, 1973, 80—81 (РЖМат, 1974, 7А818)
28. —, Инвариантные признаки специальных композиций в пространствах Вейля. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1976, № 1, 87—89 (РЖМат, 1976, 10А431)
29. —, Ортогональные композиции в пространствах Вейля. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1976, № 3, 73—85 (РЖМат, 1976, 11А825)
30. —, Конформно-симметрическое вейлево пространство декартовой композиции (Редколлегия ж. Изв. высш. учебн. заведений. Математика). Казань, 1977, 11 с., библиогр. 6 (Рукопись деп. в ВИНИТИ 3 янв. 1977, № 14—77 Деп.) (РЖМат, 1977, 5А550 Деп.)
31. —, Конформные отображения пространства произведения. В сб. «Актуальн. пробл. геометрии и ее прил.» Вып. 2. Чебоксары, 1976, 78—88 (РЖМат, 1977, 6А573)
32. *Фиников С. П.*, Теория пар конгруэнций. М., Гостехиздат, 1956, 443 с. (РЖМат, 1958, 4175К)
33. *Чакмазян А. В.*, Двойственная нормализация. Докл. АН АрмССР, 1959, *28*, № 4, 151—157 (РЖМат, 1961, 2А329)
34. —, О двойственно нормализованных поверхностях евклидова пространства. Докл. АН АрмССР, 1959, *29*, № 1, 3—8 (РЖМат, 1961, 9А545)
35. —, О полярно-двойственно нормализованных поверхностях пространства K_n. Докл. АН АрмССР, 1960, *31*, № 3, 129—132 (РЖМат, 1961, 9А546)
36. —, Об одном преобразовании двойственно нормализованной поверхности. Докл. АН АрмССР, 1960, *30*, № 4, 187—192 (РЖМат, 1961, 10А456)
37. —, К теории кривизны двумерных поверхностей четырехмерного пространства. Докл. АН АрмССР, 1961, *32*, № 4, 177—181 (РЖМат, 1962, 4А405)
38. —, Эволютные поверхности двумерной двойственно нормализованной D_2 в E_4. Докл. АН СССР, 1962, *144*, № 6, 1233—1236 (РЖМат, 1963, 3А360)
39. —, О поверхностях D_m пространства K_n. Докл. АН АрмССР, 1963, *36*, № 2, 71—75 (РЖМат, 1963, 11А335)
40. —, О поверхности D_m пространства E_{2m}. Докл. АН АрмССР, 1963, *37*, № 2, 49—53 (РЖМат, 1964, 9А406)
41. —, О двумерных поверхностях D_2, вложенных в евклидово пространство E_4. Докл. АН АрмССР, 1965, *40*, № 1, 3—6 (РЖМат, 1965, 8А384)

42. —, О гауссовом кручении двумерной двойственно нормализованной поверхности D_2, вложенной в E_4. Докл. АН АрмССР, 1967, *44*, № 3, 97—100 (РЖМат; 1968, 9А451)
43. *Широков А. П.*, Об одном типе *G*-структур, определяемых алгебрами. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1966, *1*, 425—426 (РЖМат, 1967, 6А383)
44. —, Структуры на дифференцируемых многообразиях. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. 1967. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1969, 127—188 (РЖМат, 1970, 2А629)
45. —, Структуры на дифференцируемых многообразиях. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 11. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1974, 153—207 (РЖМат, 153—207)
46. *Широков П. А.*, Постоянные поля векторов и тензоров второго порядка в Rimann'овых пространствах. Казань, Изв. физ.-мат. о-ва, 1925, *2*, № 25, 86—114
47. *Шуликовский В. И.*, Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. М., Физматгиз, 1963, 540 с. (РЖМат, 1958, 4175К)
48. *Yano K.*, Differential geometrie on complex and almost complex spaces. Oxford, Pergamon Press, 1965, 326 (РЖМат, 1966, 8А548К)