A. N. Zubkov, Some properties of Noetherian superschemes, *Algebra Logika*, 2018, Volume 57, Number 2, 197–213

DOI: 10.17377/alglog.2018.57.204

Алгебра и логика, 57, № 2 (2018), 197—213

DOI: 10.17377/alglog.2018.57.204 УДК 512.55

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ НЁТЕРОВЫХ СУПЕРСХЕМ

А. Н. ЗУБКОВ

Введение

Цель данной работы — обобщить некоторые стандартные теоремы о нётеровых схемах на случай нётеровых суперсхем. В [1] доказано, что если наибольшая чётная подсуперсхема $\mathfrak{X}_{ev}$ нётеровой суперсхемы $\mathfrak{X}$ аффинна, то $H^i(\mathfrak{X}, \mathcal{F}) = 0$ для произвольного квазикогерентного пучка $\mathfrak{X}$-супермодулей $\mathcal{F}$ и любого $i > 0$. Мы докажем, что имеет место более сильный результат, а именно — нётерова суперсхема $\mathfrak{X}$ аффинна тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}_{ev}$ аффинна, а также тогда и только тогда, когда $H^i(\mathfrak{X}, \mathcal{F}) = 0$ для произвольного квазикогерентного пучка $\mathfrak{X}$-супермодулей $\mathcal{F}$ и любого $i > 0$. Последнее утверждение является аналогом хорошо известной теоремы Серра.

Используя процедуру *бозонизации*, мы покажем, что многие стандартные результаты теории схем могут быть легко перенесены на случай суперсхем. Кроме этого, мы докажем несколько полезных утверждений о (квази)когерентных пучках супермодулей. Например, пучок $\mathfrak{X}$-супермодулей $\mathcal{F}$ квазикогерентен тогда и только тогда, когда его компоненты $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ квазикогерентны как пучки $\mathfrak{X}_0$-модулей. Если же $\mathfrak{X}$ нётерова, то это верно и для когерентных пучков.

В последнем параграфе приводится аналог ещё одного известного результата из теории схем, а именно: если $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ — строго точный морфизм нётеровых K-суперсхем, то регулярность $\mathfrak{X}$ влечёт регулярность

$\mathfrak{Y}$. Этот результат оказывается полезным для понимания того, что область применения у [1, след. 2.8] очень широка. Более точно, в этом следствии приведена формула для вычисления характеристик Эйлера подсупергруппы H алгебраической супергруппы G при помощи характеристик Эйлера подгруппы H_{ev} алгебраической группы G_{ev}. Основное условие выполнимости формулы — суперсхема G/H должна быть локально разложима, а схема G_{ev}/H_{ev} — проективна. В [1] в качестве G выступала простая супергруппа типа $Q(n)$, а в качестве H — максимальная параболическая подсупергруппа G. При этом локальная разложимость фактора G/H доказывалась непосредственно. Никаких критериев локальной разложимости в общем случае не предлагалось.

Используя описание гладких нётеровых супералгебр из [2], мы докажем, что если супергруппа G гладкая (над совершенным полем K), то суперсхема G/H локально разложима для любой подсупергруппы H. Известно, что над полем нулевой характеристики любая алгебраическая супергруппа гладкая [2]. В этом случае фактор G/H всегда локально разложим.

§ 1. Необходимые сведения и результаты

Пусть R — коммутативное кольцо с единицей. Напомним, что R-*супермодулем* называется R-модуль V, снабжённый $\mathbb{Z}_2$-градуировкой $V = \bigoplus_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2} V_\varepsilon$. Элементы из V_0 (V_1) называются *чётными* (соответственно *нечётными*). Если $v \in V_\varepsilon$, то чётность v обозначается как $|v| = \varepsilon$.

Для любых R-супермодулей V и W абелева группа $\mathrm{Hom}_R(V, W)$ имеет естественную структуру R-супермодуля, где $\phi \in \mathrm{Hom}_R(V, W)_\varepsilon$ тогда и только тогда, когда $\phi(V_\mu) \subseteq W_{\varepsilon+\mu}$, $\varepsilon, \mu \in \mathbb{Z}_2$.

R-супермодули образуют абелеву категорию, если мы допускаем лишь чётные морфизмы между её объектами. Обозначим эту категорию через R-$\mathfrak{Smod}$. Другими словами, для любых $V, W \in R$-$\mathfrak{Smod}$ верно $\mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathfrak{Smod}}(V, W) = \mathrm{Hom}_R(V, W)_0$.

Суперкольцо — это кольцевой объект категории $\mathbb{Z}$-$\mathfrak{Smod}$, т. е. $\mathbb{Z}_2$-градуированное кольцо. *Категорию суперколец с чётными кольцевыми морфизмами* обозначим $\mathfrak{SRing}$. Отметим, что категория колец $\mathfrak{Ring}$ является полной подкатегорией в $\mathfrak{SRing}$.

Суперкольцо A называется *суперкоммутативным*, если для любых однородных элементов a и b из A выполняется тождество $ab = (-1)^{|a||b|}ba$.

Пусть $A \in \mathfrak{SRing}$. Левый или правый A-супермодуль — это просто левый или правый $\mathbb{Z}_2$-градуированный A-модуль. Далее мы предполагаем, что все (супер)модули левые.

A-супермодули образуют абелеву подкатегорию в $\mathbb{Z}$-$\mathfrak{Smod}$, которая обозначается A-$\mathfrak{Smod}$. Это также подкатегория категории A-модулей A-$\mathfrak{Mod}$. Кроме того, категория A-$\mathfrak{Smod}$ является подкатегорией категории A-$\mathfrak{SMod}$, которая состоит из тех же объектов, что и A-$\mathfrak{Smod}$, но морфизмы $\phi : V \to W$ в A-$\mathfrak{SMod}$ уже произвольны и удовлетворяют правилу знаков

$$\phi(av) = (-1)^{|\phi||a|}a\phi(v), \ a \in A, \, v \in V.$$

Категория A-$\mathfrak{SMod}$ не абелева и не является подкатегорией категории всех A-модулей.

Пучок $\mathbb{Z}$-супермодулей — это пучок абелевых групп $\mathcal{F}$, заданный на топологическом пространстве X, при этом $\mathcal{F}(U) \in \mathbb{Z}$-$\mathfrak{Smod}$ и $\rho_{VU} : \mathcal{F}(V) \to \to \mathcal{F}(U)$ — морфизм в категории $\mathbb{Z}$-$\mathfrak{Smod}$ для произвольных открытых подмножеств $U \subseteq V \subseteq X$. Категорию пучков $\mathbb{Z}$-супермодулей с чётными морфизмами пучков обозначим через $\mathfrak{SAb}(X)$. Если A — произвольный $\mathbb{Z}$-супермодуль, то через $\mathbf{A}$ обозначим постоянный пучок [3, II, прим. 1.0.3]. Нетрудно видеть, что $\mathbf{A} \in \mathfrak{SAb}(X)$.

Кольцевой объект категории $\mathfrak{SAb}(X)$ — это окольцованное суперпространство $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{O}_X)$ со структурным пучком $\mathcal{O}_X$, принимающим значения в категории $\mathfrak{SRing}$. Например, если A — суперкольцо, то $\mathbf{A}$ имеет очевидную структуру окольцованного суперпространства.

Пучок $\mathfrak{X}$-супермодулей — это пучок (левых) $\mathfrak{X}$-модулей $\mathcal{F}$, который одновременно является пучком $\mathbb{Z}$-супермодулей, таким что $\mathcal{F}(U) \in \in \mathfrak{X}(U)$-$\mathfrak{Smod}$ для произвольного открытого подмножества $U \subseteq X$. Структурный пучок $\mathcal{O}_X$ служит примером пучка $\mathfrak{X}$-модулей. Произвольный подпучок $\mathcal{J}$ в $\mathcal{O}_X$ называется *пучком (левых) суперидеалов* в $\mathfrak{X}$.

Категория пучков $\mathfrak{X}$-супермодулей, с чётными морфизмами пучков, является абелевой подкатегорией категории пучков $\mathfrak{X}$-модулей $\mathfrak{X}$-$\mathfrak{Mod}$ (см. лемму 1.1 ниже). Обозначим её $\mathfrak{X}$-$\mathfrak{Smod}$. Аналогично тому как это было сделано для супермодулей, можно определить большую категорию $\mathfrak{X}$-$\mathfrak{Smod}$, состоящую из тех же объектов, что и категория $\mathfrak{X}$-$\mathfrak{Smod}$, но с произвольными морфизмами пучков $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, удовлетворяющими правилу знаков

$$f(U)(av) = (-1)^{|f||a|} a f(U)(v), \ a \in \mathfrak{X}(U), \, v \in \mathcal{F}(U),$$

где U — произвольное открытое подмножество в X. Категория $\mathfrak{X}$-$\mathfrak{Smod}$ очевидно неабелева и не является подкатегорией категории $\mathfrak{X}$-$\mathfrak{Mod}$.

Напомним, что для любой супералгебры A можно определить алгебру $\hat{A} = A \rtimes \mathbb{Z}_2 = \bigoplus_{\varepsilon \in \mathbb{Z}_2} A\varepsilon$, называемую *бозонизацией* A, с операцией умножения

$$a_\varepsilon b_\mu = (-1)^{\varepsilon |b|} (ab)_{\varepsilon + \mu}, \ a, b \in A, \, \varepsilon, \mu \in \mathbb{Z}_2.$$

Мы отождествляем каждую компоненту $A\varepsilon$ с A, а элемент $a \in A \simeq A\varepsilon$ записываем в виде a_ε. Очевидно, что $A \to \hat{A}$ является функтором из категории суперколец в категорию колец.

Хорошо известно, что категория A-$\mathfrak{Smod}$ может быть естественно отождествлена с категорией $\hat{A}$-$\mathfrak{Mod}$, [4, лемма 7.6; 5; 6]. Более точно, если V — A-супермодуль, то его структура $\hat{A}$-модуля определена по правилу

$$a_\varepsilon v = (-1)^{\varepsilon |v|} av, \ a \in A, \, v \in V, \, \varepsilon \in \mathbb{Z}_2.$$

Обратно, если W — $\hat{A}$-модуль, то его структура A-супермодуля задаётся $\mathbb{Z}_2$-градуировкой $W_\varepsilon = \{w \in W \mid (1_A)_1 w = (-1)^\varepsilon w\}, \varepsilon \in \mathbb{Z}_2$.

Аналогично, можно определить бозонизацию $\hat{\mathfrak{X}} = (\hat{\mathcal{O}}_X, X)$ окольцованного суперпространства $\mathfrak{X}$ так, чтобы $\hat{\mathcal{O}}_X(U) = \widehat{\mathcal{O}_X(U)}$ для каждого открытого подмножества $U \subseteq X$. Нетрудно видеть, что $\hat{\mathfrak{X}}$ является окольцованным пространством, а пучок $\mathcal{F} \in \mathfrak{X}$-$\mathfrak{Smod}$ превращается в пучок $\hat{\mathfrak{X}}$-модулей, который мы обозначим через $\hat{\mathcal{F}}$.

Более того, для произвольной точки $x \in X$ кольцо ростков $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ изоморфно $\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$, а слой $\hat{\mathcal{F}}_x = \mathcal{F}_x$ имеет естественную структуру $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$-модуля.

ЛЕММА 1.1. *Функтор $\mathcal{F} \to \hat{\mathcal{F}}$ определяет эквивалентность категорий $\mathfrak{X}$-$\mathfrak{Smod}$ и $\hat{\mathfrak{X}}$-$\mathfrak{Mod}$.*

Лемма 1.1 позволяет перенести дословно все результаты о когомологиях пучков модулей, доказанные в [3, III, § 2], на случай пучков супермодулей, см. также [1, § 2]. В дальнейшем мы будем ссылаться на эти результаты так, как будто это результаты о пучках супермодулей. Например, категория $\mathfrak{X}$-$\mathfrak{Smod}$ содержит достаточно много инъективных объектов в силу [3, III, предлож. 2.2]. Аналогично, категория пучков $\mathbb{Z}$-супермодулей $\mathfrak{SAb}(X)$ на пространстве X может быть отождествлена с категорией $\mathbf{Z}$-$\mathfrak{Smod}$, поэтому она тоже имеет достаточно много инъективных объектов.

Назовём пучок $\mathcal{F} \in \mathfrak{X}$-$\mathfrak{Smod}$ *плоским* (или *вялым* [3, II, упр. 1.16]), если для любой пары открытых подмножеств $U \subseteq V$ морфизм $\rho_{VU} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ сюръективен. Очевидно, что $\mathcal{F}$ плоский тогда и только тогда, когда $\hat{\mathcal{F}}$ плоский.

ЛЕММА 1.2. *Инъективный пучок $\mathfrak{X}$-супермодулей является плоским.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\hat{\mathcal{F}}$ инъективен, достаточно применить [3, III, лемма 2.4].

Как и в случае обычных пучков, можно определить функторы когомологий пучков супермодулей двумя способами. Вначале определим функтор глобальных сечений $\mathcal{F} \to \Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ из категории $\mathfrak{X}$-$\mathfrak{Smod}$ в категорию $\mathbb{Z}$-$\mathfrak{Smod}$. Группы когомологий $H^i(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ пучка $\mathcal{F}$ могут быть найдены как правые производные функтора глобальных сечений либо через инъективные резольвенты пучка $\mathcal{F}$ в категории $\mathfrak{X}$-$\mathfrak{Smod}$, либо через инъективные резольвенты того же пучка в категории $\mathfrak{SAb}(X)$. Из [3, III, предлож. 2.5, 2.6] и леммы 1.2 вытекает, что оба способа приводят к одному и тому же результату.

В случае $\mathfrak{X} = \mathbf{Z}$ мы будем обозначать группы когомологий через

$H^i(X,\mathcal{F})$. Сказанное выше означает, что $H^i(X,\mathcal{F}) = H^i(\mathfrak{X},\mathcal{F})$ для любого пучка $\mathcal{F} \in \mathfrak{X}\text{-}\mathfrak{Smod}$ и всех $i \geq 0$.

Поскольку $\Gamma(X,\mathcal{F}) = \Gamma(X,\hat{\mathcal{F}})$, лемма 1.1 влечёт совпадение групп когомологий $H^i(\mathfrak{X},\mathcal{F}) = H^i(\hat{\mathfrak{X}},\hat{\mathcal{F}})$ для всех $i \geq 0$. В частности, имеет место супераналог теоремы Гротендика, впервые сформулированный в [1].

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть X — нётерово топологическое пространство размерности n. Тогда $H^i(X,\mathcal{F}) = 0$ для любого $\mathcal{F} \in \mathfrak{SAb}(X)$ и всех $i > n$.*

Напомним, что *геометрическим суперпространством* называется такое окольцованное суперпространство $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{O}_X)$, что все $\mathcal{O}_X(U)$ суперкоммутативны и суперкольцо ростков $\mathcal{O}_{X,x}$ локально для любой точки $x \in X$, [6, § 4].

Если не оговорено противное, все окольцованные суперпространства геометрические. Морфизм геометрических суперпространств $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ по определению чётен и локален, т. е. для каждой точки $x \in X$ индуцированный гомоморфизм $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ локален.

Пусть A — суперкоммутативное суперкольцо. Любой простой (максимальный) суперидеал p в A имеет вид $p = p_0 \oplus A_1$, где p_0 — простой (соответственно максимальный) идеал в A_0, то спектр A вместе с топологией Зарисского на нём можно отождествить с $\operatorname{Spec} A_0 = \operatorname{Spec} \overline{A}$ и $\overline{A} = A/AA_1 = A_0/A_1^2$.

ЛЕММА 1.3. *Для любого простого суперидеала p в A мультипликативное подмножество $S = A \backslash p$ удовлетворяет правому и левому условию Оре. Кроме того, для произвольного элемента $a \in A$ условие $0 \in Sa$ эквивалентно $0 \in aS$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $a \in A$ и $s \in S$ выполняются равенства

$$a(s_0 s) = s(as_0 + 2a_1 s_1), \ (s_0 s)a = (as_0 + 2s_1 a_1)s.$$

Далее, условие $sa = 0$ влечёт

$$s_0 a_0 + s_1 a_1 = 0, \ s_0 a_1 + s_1 a_0 = 0.$$

Умножая оба равенства на s_1, получаем $s_0s_1a_0 = s_0s_1a_1 = 0$. Умножая теперь оба равенства на s_0, имеем $s_0^2a_0 = s_0^2a_1 = 0$, т. е. $as_0^2 = 0$. Аналогично доказывается, что $s_0^2a = 0$, если $as = 0$. Лемма доказана.

По теореме Оре кольцо A имеет левое и правое (супер)кольца частных $S^{-1}A$ и AS^{-1}, [7, § 10], которые изоморфны суперкольцу частных $(A_0 \setminus p_0)^{-1}A = A(A_0 \setminus p_0)^{-1}$. Действительно, из доказательства предыдущей леммы следует, что канонический гомоморфизм колец $(A_0 \setminus p_0)^{-1}A \to \to S^{-1}A$ (соответственно $A(A_0 \setminus p_0)^{-1} \to AS^{-1}$) инъективен. Наконец из равенств

$$s^{-1}a = s_0^{-1}a - s_0^{-2}(s_1a),\ as^{-1} = as_0^{-1} - (as_1)s_0^{-2}$$

следует, что они оба сюръективны. Далее $S^{-1}A \simeq AS^{-1}$ будем обозначать через A_p.

Аффинное суперпространство — это геометрическое суперпространство $\operatorname{SSpec} A = (\operatorname{Spec} A_0, \mathcal{O}_{\operatorname{SSpec} A})$, где для любого открытого подмножества $U \subseteq \operatorname{Spec} A_0$ суперкольцо $\mathcal{O}_{\operatorname{SSpec} A}(U)$ состоит из локально постоянных функций $f : U \to \bigsqcup\limits_{p\in U} A_p$ со свойством $f(p) \in A_p$, $p \in U$.

Суперсхема — это геометрическое суперпространство $\mathfrak{X} = (X, \mathcal{O}_X)$, для которого найдётся открытое покрытие $\bigcup\limits_{i\in I} U_i = X$ со свойством, что каждое суперподпространство $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ изоморфно некоторому $\operatorname{SSpec} A_i$ (эквивалентное определение суперсхемы см. в [8, 9]). Суперсхема $\mathfrak{X}$ называется *нётеровой*, если указанное выше покрытие конечно и каждое суперкольцо A_i нётерово. Отметим, что категория схем является полной подкатегорией категории суперсхем.

Обозначения, касающиеся суперсхем и пучков супермодулей над ними, стандартны, и в основном повторяют обозначения для чисто чётного случая, [3, 9].

Суперсхема $\mathfrak{Z} = (Z, \mathcal{O}_Z)$ называется *замкнутой суперподсхемой* суперсхемы $\mathfrak{X}$, если Z является замкнутым подпространством в X и пучок $i_*\mathcal{O}_Z$ является эпиморфным образом пучка $\mathcal{O}_X$, где $i : Z \to X$ — отображение вложения.

В заключение этого параграфа отметим, что все введённые выше понятия и доказанные результаты легко переносятся в контекст R-супералгебр и R-супермодулей, где R — произвольное коммутативное кольцо с единицей. Например, суперсхема $\mathfrak{X}$, у которой структурный пучок состоит из R-супералгебр и отображения ограничения являются морфизмами R-супермодулей, называется *R-суперсхемой.* Пучок $\mathfrak{X}$-супермодулей над R-суперсхемой $\mathfrak{X}$ по определению является *пучком R-супермодулей* и т. д.

§ 2. Квазикогерентные пучки супермодулей

Начиная с этого параграфа, все суперкольца суперкоммутативны, если не оговорено противное.

Пусть A — суперкольцо и $M \in A\text{-}\mathfrak{Smod}$. По аналогии с чисто чётным случаем можно определить ассоциированный пучок $\mathrm{SSpec}\, A$-супермодулей $\widetilde{M}$ так, чтобы $\widetilde{M}(U)$ состоял из локально постоянных функций $f : U \to \to \bigsqcup_{p\in U} M_p$ со свойством $f(p) \in M_p$, $p \in U$, для любого открытого подмножества $U \subseteq \mathrm{Spec}\, A_0$. При этом A_p-супермодуль M_p по определению совпадает с $(A_0 \setminus p_0)^{-1}M$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из сказанного выше ясно, что пучок $\mathrm{Spec}\, A_0$-модулей $\widetilde{M}|_{\mathrm{Spec}\, A_0}$ может быть отождествлён с $\widetilde{M|_{A_0}}$.

Предложение 5.1 [3, II] переносится на суперслучай дословно, см. также [8, 9]. Доказательство следующей леммы очевидно [3, II, упр. 5.3].

ЛЕММА 2.1. *Для любых A-супермодуля M и пучка $\mathfrak{X}$-супермодулей $\mathcal{F}$ имеет место изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathfrak{SMod}}(M, \mathcal{F}(X)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{X}\text{-}\mathfrak{Smod}}(\widetilde{M}, \mathcal{F}),$$

где $\mathfrak{X} = \mathrm{SSpec}\, A$.

Предложение 5.2 [3, II] также может быть перенесено на суперслучай. Более того, п. (a) этого предложения можно доказать в более сильной, неградуированной форме. Для удобства читателя приведём полные формулировки всех утверждений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Пусть $\phi : A \to B$ — гомоморфизм суперколец, индуцирующий морфизм суперсхем $f : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X} = \operatorname{SSpec} A, \mathfrak{Y} = \operatorname{SSpec} B$. Тогда*

(1) *функтор $M \to \widetilde{M}$, из категории A-$\mathfrak{SMod}$ в категорию $\mathfrak{X}$-$\mathfrak{SMod}$, точен и строго полон*;

(2) *для любых A-супермодулей M и N имеет место канонический (чётный) изоморфизм $\mathfrak{X}$-супермодулей $\widetilde{M \bigotimes_A N} \simeq \widetilde{M} \bigotimes_{\mathfrak{X}} \widetilde{N}$;*

(3) *для любого семейства A-супермодулей $\{M_i\}_{i\in I}$ имеет место канонический (чётный) изоморфизм $\mathfrak{X}$-супермодулей $\widetilde{\bigoplus_{i\in I} M_i} \simeq \bigoplus_{i\in I} \widetilde{M_i}$;*

(4) *для любого B-супермодуля N имеет место канонический (чётный) изоморфизм $\mathfrak{X}$-супермодулей $f_*(\widetilde{N}) \simeq \widetilde{{}_A N}$, где ${}_A N$ имеет структуру A-супермодуля по правилу $an = \phi(a)n,\ a \in A,\ n \in N$;*

(5) *для любого A-супермодуля M имеет место канонический (чётный) изоморфизм $\mathfrak{Y}$-супермодулей $f^*(\widetilde{M}) \simeq \widetilde{B \bigotimes_A M}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аргументация та же, что и в чисто чётном случае. Например, мы имеем канонический морфизм пучков $\mathfrak{X}$-супермодулей $\widetilde{{}_A N} \to f_*(\widetilde{N})$. Это следует из леммы 2.1, поскольку $\widetilde{{}_A N}(X) = N = \widetilde{N}(Y) = f_*(\tilde{N})(X)$. По замечанию 2.1 для произвольного $q \in \operatorname{SSpec}(A/\ker\phi)$ слой $(\widetilde{{}_A N})_q = ({}_A N)_q \simeq (\phi(A_0 \setminus q_0))^{-1} N$ изоморфен $f_*(\widetilde{N})_q$.

Пусть теперь $\mathfrak{X}$ — суперсхема. Пучок $\mathfrak{X}$-супермодулей $\mathcal{F}$ называется *квазикогерентным*, если существует такое открытое покрытие $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, что $\mathfrak{X}|_{U_i} = \operatorname{SSpec} A_i$ и $\mathcal{F}|_{U_i} = \widetilde{M_i}$ для подходящего A_i-супермодуля M_i. Если все M_i конечно порождены, то $\mathcal{F}$ называется *когерентным.* Простейшим примером квазикогерентного пучка является свободный пучок $\mathfrak{X}$-супермодулей $\mathcal{O}_X^{\oplus I}$. Если множество индексов I конечно, то он когерентен.

§ 3. Критерий аффинности и теорема Серра

Пусть $\mathfrak{X}$ — суперсхема. Обозначим через $\mathcal{J}$ пучок суперидеалов $\mathcal{O}_X(\mathcal{O}_X)_1$. Другими словами, $\mathcal{J}$ — это пучок ассоциированный с предпучком

$U \to \mathcal{O}_X(U)(\mathcal{O}_X(U))_1$.

Нетрудно видеть, что пучок $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ задаёт на пространстве X структуру чисто чётной суперсхемы. Действительно, для произвольной аффинной открытой суперподсхемы $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) \simeq \mathrm{SSpec}\, A_i$ имеет место $(U_i, (\mathcal{O}_X/\mathcal{J})|_{U_i}) \simeq \mathrm{Spec}\, \overline{A_i}$. Схема $(X, \mathcal{O}_X/\mathcal{J})$ обозначается $\mathfrak{X}_{ev}$ и называется *наибольшей чётной (супер)подсхемой* суперсхемы $\mathfrak{X}$. Очевидно, что $\mathfrak{X}_{ev}$ — замкнутая суперподсхема в $\mathfrak{X}$. Отметим, что наше обозначение не совпадает с обозначением из [9], где эта (супер)схема обозначается $\mathfrak{X}_{\mathrm{rd}}$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Нётерова суперсхема $\mathfrak{X}$ аффинна тогда и только тогда, когда схема $\mathfrak{X}_{ev}$ аффинна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону утверждение очевидно.

Предположим, что схема $\mathfrak{X}_{ev}$ аффинна. Обозначим через $\mathfrak{X}_0$ схему $(X, (\mathcal{O}_X)_0)$. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{X}_{ev}$ — это замкнутая подсхема схемы $\mathfrak{X}_0$, определённая когерентным пучком идеалов $\mathcal{J}_0 = (\mathcal{O}_X)_1^2$. Действительно, $\mathcal{J}_0$ нильпотентен, поэтому носитель пучка $(\mathcal{O}_X)_0/\mathcal{J}_0$ совпадает с X, [3, II, предлож. 5.9]. По [10, I, § 2, теор. 6.1] схема $\mathfrak{X}_0$ аффинна, скажем $\mathfrak{X}_0 \simeq \simeq \mathrm{Spec}\, B$.

По [3, II, след. 5.5] квазикогерентный пучок $\mathcal{X}_0$-модулей $(\mathcal{O}_X)_1$ изоморфен $\widetilde{N}$ для подходящего B-модуля N. Теперь очевидно, что отображение

$$N^{\otimes 2} \simeq (\mathcal{O}_X(X))_1^{\otimes 2} \to B = (\mathcal{O}_X(X))_0,$$

индуцированное операцией умножения в пучке (супер)колец $\mathcal{O}_X$, определяет структуру суперкольца на $B \oplus N$ с чётной компонентой B и нечётной компонентой N. Более того, $\mathfrak{X} \simeq \mathrm{SSpec}\,(B \oplus N)$. Теорема доказана.

Комбинируя [6, теор. 0.1] с доказанной выше теоремой, мы получаем ещё одно доказательство для [6, след. 8.15].

СЛЕДСТВИЕ 3.1 *Пусть G — алгебраическая супергруппа, H — (замкнутая) подсупергруппа в G. Тогда фактор G/H аффинен в том и только в том случае, если аффинен фактор G_{ev}/H_{ev}.*

ЛЕММА 3.1. *Пусть i — замкнутое вложение суперсхем $\mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$, причём $i(Z) = X$. Тогда функтор $\mathcal{F} \to i_*\mathcal{F}$ задаёт эквивалентность меж-*

ду категорией $\mathfrak{Z}$-$\mathfrak{SMod}$ *и полной подкатегорией в* $\mathfrak{X}$-$\mathfrak{Smod}$, *состоящей из тех пучков* $\mathcal{G}$, *которые аннулируются пучком идеалов* $\mathcal{I} = \ker i^\sharp$. *Более того, он переводит инъективные пучки в плоские. В частности,* $H^i(\mathfrak{Z}, \mathcal{F}) = H^i(\mathfrak{X}, \mathcal{F})$ *для произвольного пучка* $\mathcal{F} \in \mathfrak{Z}$-$\mathfrak{SMod}$ *и всех* $i \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без потери общности можно предполагать, что $Z = X$. Тогда первое утверждение очевидно. Поскольку $\mathcal{F}$ и $i_*\mathcal{F}$ совпадают как пучки $\mathbb{Z}$-супермодулей, лемма 1.2 завершает доказательство.

Супераналогом для [3, II, предлож. 5.5] является следующая

ЛЕММА 3.2. *Пусть суперсхема* $\mathfrak{X}$ *аффинна. Тогда для произвольной короткой точной последовательности пучков*

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

в категории $\mathfrak{X}$-$\mathfrak{Smod}$, *в которой* $\mathcal{F}'$ *квазикогерентен, последовательность*

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}') \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{F}'') \to 0$$

точна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По замечанию 2.1 пучок $\mathcal{F}'|_{\mathfrak{X}_0}$ квазикогерентен. Теперь достаточно применить [3, II, предлож. 5.5] к двум точным последовательностям пучков $\mathfrak{X}_0$-модулей

$$0 \to \mathcal{F}'_\varepsilon \to \mathcal{F}_\varepsilon \to \mathcal{F}''_\varepsilon \to 0, \ \varepsilon \in \mathbb{Z}_2.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Все утверждения из* [3, II, *предлож.* 5.7] *дословно переносятся на суперслучай. Другими словами, ядро, коядро и образ любого чётного морфизма квазикогерентных пучков* $\mathfrak{X}$-*супермодулей, снова квазикогерентны. Любые расширения квазикогерентных пучков* (*в категории* $\mathfrak{X}$-$\mathfrak{Smod}$) *являются квазикогерентными пучками. Если суперсхема* $\mathfrak{X}$ *нётерова, то все перечисленные утверждения верны для когерентных пучков.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно использовать предложение 2.1(1), лемму 2.1 и лемму 3.2.

ТЕОРЕМА 3.2. *Нётерова суперсхема $\mathfrak{X}$ аффинна тогда и только тогда, когда $H^1(\mathfrak{X}, \mathcal{F}) = 0$ для любого квазикогерентного пучка $\mathfrak{X}$-супермодулей $\mathcal{F}$. Последнее условие также влечёт $H^i(\mathfrak{X}, \mathcal{F}) = 0$ для всех $i \geq 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathcal{J}$ квазикогерентен над $\mathfrak{X}$ (даже когерентен), то по следствию 3.2 пучок $\mathcal{J}\mathcal{F}$ также квазикогерентен как образ квазикогерентного пучка $\mathcal{J} \bigotimes_{\mathfrak{X}} \mathcal{F}$. В частности, пучок $\mathcal{F}$ имеет фильтрацию

$$\mathcal{F} \supseteq \mathcal{J}\mathcal{F} \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{J}^{n-1}\mathcal{F} \supseteq 0,$$

где $\mathcal{J}^n = 0$, а все подпучки $\mathcal{J}^k\mathcal{F}$ и фактор-пучки $\mathcal{J}^k\mathcal{F}/\mathcal{J}^{k+1}\mathcal{F}$ квазикогерентны.

Обозначим пучок $\mathfrak{X}_0$-(супер)модулей $(\mathcal{J}^k\mathcal{F}/\mathcal{J}^{k+1}\mathcal{F})|_{\mathfrak{X}_0}$ через $\mathcal{S}_k$. Каждый пучок $\mathcal{S}_k$ квазикогерентен и аннулируется пучком идеалов $(\mathcal{O}_X)_1^2$. В частности, каждый $\mathcal{S}_k$ является квазикогерентным пучком $\mathfrak{X}_{ev}$-(супер)модулей. С другой стороны, будучи пучком $\mathfrak{X}$-супермодулей, $\mathcal{J}^k\mathcal{F}/\mathcal{J}^{k+1}\mathcal{F}$ совпадает с $i_*\mathcal{S}_k$, где i — это замкнутое вложение $\mathfrak{X}_{ev} \to \mathfrak{X}$.

Пусть теперь $\mathfrak{X}$ аффинна. По лемме 3.1 и теореме Серра

$$H^i(\mathfrak{X}, \mathcal{J}^k\mathcal{F}/\mathcal{J}^{k+1}\mathcal{F}) = 0$$

для всех $i \geq 1$ и $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Следствие 3.2 позволяет применить индукцию по длине фильтрации, которая вместе с длинной точной последовательностью групп когомологий влечёт необходимость.

Для проверки достаточности следует рассмотреть произвольный квазикогерентный пучок $\mathfrak{X}_{ev}$-модулей $\mathcal{F}$ как пучок (чисто чётных) $\mathfrak{X}$-супермодулей. По лемме 3.1 и теореме Серра схема $\mathfrak{X}_{ev}$ аффинна. Значит, по теореме 3.1 аффинна и суперсхема $\mathfrak{X}$. Теорема доказана.

Как уже было отмечено выше, если пучок $\mathfrak{X}$-супермодулей квазикогерентен, то он квазикогерентен и как пучок $\mathfrak{X}_0$-модулей. Для когерентных пучков это утверждение остаётся верным, если $\mathfrak{X}$ нётерова. Оказывается, обратное тоже верно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — суперсхема, и $\mathcal{F}$ — пучок $\mathfrak{X}$-супермодулей. Пучок $\mathcal{F}$ квазикогерентен тогда и только тогда, когда пу-*

чок $\mathcal{F}|_{\mathfrak{X}_0}$ квазикогерентен. Если $\mathfrak{X}$ нётерова, то пучок $\mathcal{F}$ когерентен тогда и только тогда, когда пучок $\mathcal{F}|_{\mathfrak{X}_0}$ когерентен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{F}|_{\mathfrak{X}_0}$ (квази)когерентен. Достаточно показать, что для любой открытой аффинной суперподсхемы $\mathfrak{X}|_U = (U, \mathcal{O}_X|_U) \simeq \mathrm{SSpec}\, A$ пучок $\mathcal{F}|_U$ изоморфен $\widetilde{N}$, где $N \in A\text{-}\mathfrak{Smod}$ и N конечно порождён, если $\mathcal{F}$ когерентен. Таким образом, можно считать, что $\mathfrak{X} = \mathrm{SSpec}\, A$.

По [3, II, след. 5.5], $\mathcal{F}|_{\mathfrak{X}_0} \simeq \widetilde{N}$ для некоторого A_0-(супер)модуля N. Более того, канонический морфизм пучков $\mathfrak{X}_0$-(супер)модулей

$$\pi : \mathcal{O}_X \bigotimes_{(\mathcal{O}_X)_0} \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

индуцирован морфизмом A_0-(супер)модулей $A \bigotimes_{A_0} N \to N$, который мы интерпретируем как действие A на N, коммутирующее с действием A_0.

В силу ассоциативности действия $\mathcal{O}_X$ на $\mathcal{F}$ определённое выше действие A на N тоже ассоциативно, т. е. N имеет структуру A-супермодуля и $\mathcal{F} \simeq \widetilde{N}$. Предложение доказано.

Предложение 3.1 позволяет легко переносить многие свойства (квази)когерентных пучков модулей на суперслучай. Например, пусть $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ — морфизм суперсхем. Для произвольных пучка $\mathfrak{Y}$-супермодулей $\mathcal{G}$ и пучка $\mathfrak{X}$-супермодулей $\mathcal{H}$ нетрудно показать, что $f^*\mathcal{G}|_{\mathfrak{X}_0} = f^*(\mathcal{G}|_{\mathfrak{Y}_0})$ и $f_*\mathcal{H}|_{\mathfrak{Y}_0} = f_*(\mathcal{H}|_{\mathfrak{X}_0})$. Используя предложение 3.1 и [3, II, предлож. 5.8], получаем следующие утверждения:

(1) если $\mathcal{G}$ квазикогерентен, то и $f^*\mathcal{G}$ квазикогерентен;

(2) если обе суперсхемы $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ нётеровы и $\mathcal{G}$ когерентен, то $f^*\mathcal{G}$ когерентен;

(3) если $\mathfrak{X}$ нётерова и $\mathcal{H}$ квазикогерентен, то и $f_*\mathcal{H}$ квазикогерентен.

§ 4. Локально разложимые суперсхемы и формула Брандена

Напомним, что суперсхема $\mathfrak{X}$ называется *разложимой*, если пучок суперколец $\mathcal{O}_X$ изоморфен симметрической супералгебре пучка $\mathfrak{X}_{ev}$-

супермодулей $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 = (\mathcal{O}_X)_1/(\mathcal{O}_X)_1^3$. Если $\mathfrak{X}$ аффинна, скажем $\mathfrak{X} \simeq \mathrm{SSpec}\, A$, то это условие эквивалентно тому, что $A \simeq S_{\overline{A}}(A_1/A_1^3)$. Другими словами, морфизм (алгебр) $A_0 \to A_0/A_1^2$ и морфизм ($\overline{A}$-модулей) $A_1 \to A_1/A_1^3$ расщепимы так, что индуцированный морфизм супералгебр $S_{\overline{A}}(A_1/A_1^3) \to A$ является изоморфизмом.

Суперсхема $\mathfrak{X}$ называется *локально разложимой*, если найдётся её открытое покрытие аффинными суперподсхемами $\mathfrak{X}|_{U_i}, X = \bigcup_{i \in I} U_i$, в котором каждая из этих суперподсхем разложима [1].

Пусть A — нётерово суперкольцо. Обозначим суперидеал AA_1 через I. Назовём суперкольцо A *регулярным*, если кольцо $\overline{A}$ регулярно, $\overline{A}$-модуль $I/I^2 = A_1/A_1^3$ проективен, а канонический морфизм супералгебр $\kappa_I : S_{\overline{A}}(I/I^2) \to \mathsf{gr}_I A = \bigoplus_{n \geq 0} I^n/I^{n+1}$, индуцированный вложением $I/I^2 \to \mathsf{gr}_I A$, является изоморфизмом [2, опр. A.1]. Локализация является точным функтором и свойство проективности локально в классе конечно порождённых модулей над нётеровым кольцом, поэтому A регулярно тогда и только тогда, когда для любого простого суперидеала p в A локальное суперкольцо A_p регулярно. В силу [11, теор. 3.3] для локального суперкольца (A, m) регулярность эквивалентна тому, что максимальный идеал m порождается регулярной последовательностью. Последнее также эквивалентно тому, что канонический морфизм супералгебр $\kappa_m : S(m/m^2) \to \mathsf{gr}_m(A) = \bigoplus_{n \geq 0} m^n/m^{n+1}$ является изоморфизмом.

Назовём нётерову суперсхему $\mathfrak{X}$ *регулярной*, если все её локальные кольца $\mathcal{O}_{X,x}$ регулярны. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{X}$ регулярна тогда и только тогда, когда каждая её открытая аффинная суперподсхема регулярна. Кроме того, аффинная суперсхема $\mathrm{SSpec}\, A$ регулярна тогда и только тогда, когда супералгебра A регулярна.

Пусть K — поле. K-супералгебра A называется гладкой над K, если любой морфизм K-супералгебр $A \to B/J$, где J — нильпотентный суперидеал в B, индуцирован морфизмом супералгебр $A \to B$. По [2, теор. A.2], свойство гладкости эквивалентно геометрической регулярности A. Последнее свойство очевидно локально, поэтому локально и свойство гладкости.

Таким образом, по аналогии с понятием регулярной (нётеровой) суперсхемы, можно определить и понятие гладкой нётеровой K-суперсхемы, а именно — нётерова K-суперсхема $\mathfrak{X}$ называется *гладкой*, если гладкими являются все её локальные кольца $\mathcal{O}_{X,x}$. Как и выше, суперсхема $\mathfrak{X}$ является гладкой тогда и только тогда, когда каждая её открытая аффинная суперподсхема гладкая. Кроме того, аффинная суперсхема $\mathrm{SSpec}\, A$ гладкая тогда и только тогда, когда супералгебра A гладкая.

По [2, теор. A.2] супералгебра A гладкая тогда и только тогда, когда алгебра $\overline{A}$ гладкая, $\overline{A}$-модуль I/I^2 проективен и существует изоморфизм супералгебр $A \simeq S_{\overline{A}}(I/I^2)$. В частности, любая гладкая (нётерова) суперсхема локально разложима.

Напомним, что морфизм суперсхем $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ называется *строго точным*, если отображение подлежащих топологических пространств $f : X \to Y$ сюръективно, а для произвольных открытых аффинных суперподсхем $\mathrm{SSpec}\, A \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathrm{SSpec}\, B \subseteq \mathfrak{Y}$, таких что $f(\mathrm{SSpec}\, A) \subseteq \mathrm{SSpec}\, B$, A является плоским B-супермодулем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Пусть $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ — строго точный морфизм нётеровых K-суперсхем. Если суперсхема $\mathfrak{X}$ регулярна, то регулярна и суперсхема $\mathfrak{Y}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение подлежащих топологических пространств $f : X \to Y$ сюръективно, поэтому достаточно рассмотреть локальный морфизм суперальгбр $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}, f(x) = y$, для каждой точки $y \in Y$. Сужая морфизм f на подходящие аффинные окрестности x и y, видим, что $\mathcal{O}_{X,f^{-1}(y)}$ является плоским $\mathcal{O}_{Y,y}$-супермодулем. По [11, предлож. 3.6.1(iv)], $\mathcal{O}_{Y,y}$ — регулярная супералгебра.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Пусть выполняются условия предыдущего предложения и $\mathfrak{X}$ — гладкая суперсхема. Если поле K совершенно, то $\mathfrak{Y}$ — гладкая суперсхема. В частности, если G — гладкая алгебраическая группа, определённая над совершенным полем K, то для любой её подсупергруппы H суперсхема G/H гладкая, а значит она локально разложима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По [2, теор. A.2] над совершенным полем гладкость эквивалентна регулярности. Предложение 4.1 и [6, след. 9.10] влекут требуемое.

Доказанное выше следствие имеет важное приложение. Как показал Бранден [1], если выполняется некоторый набор условий на фактор-морфизм $G \to G/H$ и G_{ev}/H_{ev} — проективная схема, то в группе Гротендика всех конечномерных G_{ev}-модулей имеет место равенство

$$\sum_{i\geq 0}(-1)^i[H^i(G/H,M)|_{G_{ev}}] = \sum_{i\geq 0}(-1)^i[H^i(G_{ev}/H_{ev}, S((Lie(G)/Lie(H))_1^*)\otimes M)].$$

Фактор G/H, удовлетворяющий всем условиям Брандена, кроме условия локальной разложимости, был построен в [6]. Там же было показано, что фактор-морфизм $G \to G/H$ является строго точным. Таким образом, указанная выше формула Брандена верна для произвольной гладкой алгебраической супергруппы G (над совершенным полем) и любой её подсупергруппы H, такой что схема G_{ev}/H_{ev} проективна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Brundan*, Modular representations of the supergroup $Q(n)$. II, Pac. J. Math., **224**, No. 1 (2006) 65—90.
2. *A. Masuoka, A. N. Zubkov*, Solvability and nilpotency for algebraic supergroups, J. Pure Appl. Algebra, **221**, No. 2 (2017), 339—365.
3. *Р. Хартсхорн*, Алгебраическая геометрия, М., Мир, 1981.
4. *F. Marko, A. N. Zubkov*, Pseudocompact algebras and highest weight categories, Algebr. Represent. Theory, **16**, No. 3 (2013), 689—728.
5. *A. Masuoka*, The fundamental correspondences in super affine groups and super formal groups, J. Pure Appl. Algebra, **202**, No. 1-3 (2005), 284—312.
6. *A. Masuoka, A. N. Zubkov*, Quotient sheaves of algebraic supergroups are superschemes, J. Algebra, **348**, No. 1 (2011), 135—170.
7. *T. Y. Lam*, Lectures on modules and rings (Grad. Texts Math., **189**), New York, NY, Springer-Verlag, 1999.
8. *C. Carmeli, L. Caston, R. Fioresi*, Mathematical foundations of supersymmetry (EMS Ser. Lect. Math.), Zürich, Eur. Math. Soc., 2011.

9. *Yu. I. Manin*, Gauge field theory and complex geometry (Grundlehren Math. Wiss., **289**), 2nd ed., Berlin, Springer-Verlag, 1997.

10. *M. Demazure, P. Gabriel*, Algebraic groups. Vol. I. Algebraic geometry. Generalities. Commutative groups, Paris, Masson et Cie, Éditeur; Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1970.

11. *T. Schmitt*, Regular sequences in $\mathbb{Z}_2$-graded commutative algebra, J. Algebra, **124**, No. 1 (1989), 60—118.

Поступило 14 октября 2016 г.

Адрес автора:

ЗУБКОВ Александр Николаевич, Омский гос. техн. ун-т, пр. Мира 11, г. Омск, 644050, РОССИЯ. e-mail: a.zubkov@yahoo.com