1996. Т. 32, № 12. С. 1618 — 1629

УДК 517.927.95

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ

И. С. Ломов

Введение. Рассмотрим произвольные, вообще говоря, несамосопряженные дифференциальные операторы L_i, $i = 1, 2$, порожденные дифференциальными выражениями $L_i u \equiv u'' + p_i(x)u' + q_i(x)u$, $x \in G = (0, 1)$, на классе функций D, абсолютно непрерывных на $\overline{G} = [0, 1]$ вместе со своей первой производной;

$$p_i(x) \in \mathcal{L}^{s_i}(G, \mathbb{C}), \quad s_i \geq 1, \quad q_i(x) \in \mathcal{L}(G, \mathbb{C}), \quad i = 1, 2. \tag{1}$$

В работе [1] установлены оценки скорости сходимости и равносходимости спектральных разложений по корневым функциям операторов L_i в метрике пространств $\mathcal{L}^p$, $p \in [2, \infty]$, на всем интервале G.

Для получения указанных оценок не привлекаются операторы L_i^*, сопряженные с L_i, существование которых налагает условия гладкости на коэффициенты p_i. Биортогонально сопряженные системы функций с системами корневых функций операторов L_i могут быть не связаны с сопряженными операторами. Допускается также случай существенно несамосопряженных операторов (т. е. операторов, системы корневых функций которых содержат бесконечное число присоединенных функций). Первоначально эти результаты были установлены для одномерных операторов Шредингера с конечным числом присоединенных функций в [2].

Полученные в [1] оценки улучшают известные аналогичные оценки для самосопряженных операторов. В качестве системы корневых функций можно рассма гривать обычную тригонометрическую систему или систему экспонент (при нулевых коэффициентах в дифференциальном выражении).

Вместе с тем в работе [1] на систему функций, биортогонально сопряженную с системой корневых функций оператора L_i, накладывается одно из двух следующих условий: либо эта система полна в одном из пространств $\mathcal{L}^p(G)$, что бывает трудно проверить, если система не является системой корневых функций оператора L_i^*; либо эта система после нормировки является ограниченной в метрике пространства $\mathcal{L}^\infty$. В [1] основная теорема применена к одной задаче Е. И. Моисеева [3], для которой сопряженная система не принадлежит пространству $\mathcal{L}^\infty(G)$ (но является полной и даже образует базис в $\mathcal{L}^r(G)$, $r < \infty$). При этом сами корневые функции бесконечно дифференцируемы на $\overline{G}$. В настоящей работе покажем, что от этих требований на сопряженную систему можно отказаться: все оценки справедливы и без дополнительных условий. Фактически, на биортогонально сопряженную систему накладываем единственное ограничение — наличие асимптотики коэффициентов биортогональных разложений функций. Кроме того, освобождаемся от условий [1], связывающих показатели s_i из (1) и p с числами r_i (система корневых функций оператора L_i предполагается замкнутой в пространстве $\mathcal{L}^{r_i}(G)$).

Результаты работы [1] удалось усилить благодаря применению обобщения теоремы Рисса (Хаусдорфа — Юнга) на биортогональные системы функций, причем в отличие от [1] теорема распространена на случай, когда коэффициенты биортогональных разложений сами являются функциями. Эта теорема и ее обоснование приведены в п. 3.

Основная теорема изложена в п. 2 и доказана в п. 4. В п. 5 доказано обобщенное неравенство Бесселя для систем корневых функций рассматриваемых операторов; это неравенство используется в п. 3.

Введем некоторые обозначения: $\|f\|_{p,E}$ — норма функции $f(x) \in \mathcal{L}^p(E)$, $p \in [1,\infty]$ (если $E = \overline{G}$, то пишем $\|f\|_p$); $\|g\|_{(\alpha,\beta),EK} \equiv \left(\int\limits_K \left(\int\limits_E |g(x,y)|^\alpha dx\right)^{\beta/\alpha} dy\right)^{1/\beta}$ — смешанная $\mathcal{L}^{(\alpha,\beta)}$-норма; ($\|g\|_{(\alpha,\beta)}$ для случая $E = K = \overline{G}$). Для последовательности $\{c_k\} \in l_\alpha$ обозначим l_α-норму через $\|c_k\|_{l_\alpha}$, квадрат $\overline{G} \times \overline{G}$ через G^2. Если $K = [a,b]$, то прямоугольник $K \times \overline{G}$ обозначим KG, а прямоугольник $\overline{G} \times K$ — GK.

1. Постановка задачи. Дадим определение корневых функций (т.е. собственных и присоединенных функций) и приведем основные условия на операторы. Корневые функции оператора $L_1(L_2)$ определим в обобщенном (по Ильину) смысле, рассматривая их как регулярные решения дифференциальных уравнений и освобождая их от требования удовлетворения каким-либо конкретным краевым условиям. Ограничения при этом налагаются на свойства спектра и корневых функций оператора, что позволяет изучать как системы функций типа системы экспонент, не удовлетворяющие никаким краевым условиям без спектрального параметра, так и корневые функции конкретных краевых задач. Рассматриваются два встречающиеся типа спектральных задач (отличающиеся нормировкой присоединенных функций). Под собственной функцией оператора L_1, отвечающей собственному значению $\lambda^2 \in \mathbb{C}$, будем понимать любую не равную тождественному нулю функцию $\overset{\circ}{u}(x) \in D$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $L_1 \overset{\circ}{u} + \lambda^2 \overset{\circ}{u} = 0$. Под присоединенной функцией порядка m, $m = 1,2,\ldots$, отвечающей тому же λ^2 и собственной функции $\overset{\circ}{u}$, будем понимать любую функцию $\overset{m}{u}(x)$, которая почти всюду в G удовлетворяет уравнению $L_1 \overset{m}{u} + \lambda^2 \overset{m}{u} = \mu_m \overset{m-1}{u}$. Здесь либо $\mu_m = 1$ (спектральная задача 1), либо $\mu_m = \lambda$ ($\mathrm{Re}\lambda \geq 0$) при $|\lambda| \geq 1$, $\mu_m = 1$ при $|\lambda| < 1$ (спектральная задача 2). Приведем основные ограничения на рассматриваемые системы корневых функций. В случае конкретных краевых задач эти условия достаточно легко проверяются.

Фиксируем произвольную систему собственных значений $\{\lambda_k^2\}_{k=1}^\infty$ и произвольную систему $\{u_k(x)\}$ корневых функций оператора L_1, отвечающую этим собственным значениям, удовлетворяющие следующим

Условиям А:

1) система $\{u_k(x)\}$ замкнута*) и минимальна в $\mathcal{L}^{r_1}(G)$ при некотором $r_1 \in [1,\infty)$;

2) $\exists c_1, c_2 = \mathrm{const} > 0$:

$$|\mathrm{Im}\lambda_k| \leq c_1 \ \forall k; \qquad \sum_{0 \leq |\lambda_k| - \lambda \leq 1} 1 \leq c_2 \quad \forall \lambda \geq 0; \tag{2}$$

3) $\exists c_3 = \mathrm{const} > 0$: $\|u_k\|_{r_1} \|v_k\|_{r_1'} \leq c_3 \ \forall k$, (3)

где $\{v_k\}$ — биортогонально сопряженная с $\{u_k\}$ система функций: $v_k \in \mathcal{L}^{r_1'}(G)$, $(u_k, v_l) = \delta_{kl}$ $\forall k, l \in \mathbb{N}$, $r_1' = r_1/(r_1 - 1)$, $\|\cdot\|_r$ — норма в $\mathcal{L}^r(G)$.

Для произвольной функции $f(x) \in \mathcal{L}^{r_1}(G)$ составим частичные суммы биортогонального разложения

$$\sigma_\lambda(x,f) = \sum_{|\lambda_k| \leq \lambda} f_k u_k(x), \quad \lambda > 0, \quad f_k \equiv (f, v_k).$$

Для оператора L_2 берем произвольную систему $\{\hat{u}_k\}$ корневых функций, отвечающих собственным значениям $\{\hat{\lambda}_k^2\}$, удовлетворяющую условиям А с показателями $r_2 \in [1,\infty]$ и s_2 вместо r_1, s_1; $\{\hat{v}_k\}$ — биортогонально сопряженная система функций; $\hat{\sigma}_\lambda(x,g)$ — биортогональное разложение функции $g(x) \in \mathcal{L}^{r_2}(G)$ по этим системам.

Будем предполагать, что $f(x) \in \mathcal{L}^{r_0}(G)$, $r_0 = \max r_i$, $i = 1,2$, и рассматривать равносходимость биортогональных разложений в метрике пространств $\mathcal{L}^p(G)$, где $p \in [2,\infty)$.

Наложим дополнительные ограничения на систему $\{u_k, v_k\}$ и функции $f(x)$.

Условия Б:

1) $\exists \nu_1 = \mathrm{const} > 0$:

$$\alpha_k f_k = O(\lambda_k^{-\nu_1}), \quad |\lambda_k| \geq 1, \tag{4}$$

*) Система $\{u_k\}$ функций $u_k \in \mathcal{L}^r(G)$ называется замкнутой в $\mathcal{L}^r(G)$, если каждая функция из этого класса может быть приближена в метрике $\mathcal{L}^r(G)$ с любой степенью точности конечной линейной комбинацией элементов указанной системы.

где $\alpha_k = \|v_k\|_{r_1'}^{-1}$;

2) параметры p и s_1 связаны следующими соотношениями:

$$1/p + 1/s_1 \le 1, \quad p \in [2, \infty), \tag{5}$$

т.е. $p \ge s_1' = s_1/(s_1 - 1)$, $s_1 \ge q = p/(p-1)$.

Аналогичные условия налагаются и на систему $\{\hat{u}_k, \hat{v}_k\}$ с показателями $\nu_2 > 0$, s_2 соответственно и с заменой r_1 на r_2.

Замечание 1. В случае абсолютно непрерывной функции $p_1(x)$ в операторе L_1 условия А совпадают с условиями, при которых система $\{u_k\}$ обладает свойством базисности в $\mathcal{L}^r(G)$ при любом $r > 1$ (т.е. для любой функции $f(x) \in \mathcal{L}^r(G)$: $\sigma_\lambda(x, f) \to f(x)$ при $\lambda \to \infty$ в $\mathcal{L}^r$ для каждого компакта $K \subset G$), и имеет место равномерная на любом отрезке $K \subset G$ равносходимость с тригонометрическим рядом Фурье разложений $\sigma_\lambda(x, f)$ [4; 5, с. 789 — 793]. Необходимость условия (3) для базисности в $\mathcal{L}^{r_1}(G)$ следует из известной теоремы Банаха.

Основная задача — установить факт равносходимости спектральных разложений $\sigma_\lambda(x, f)$ и $\hat{\sigma}_\lambda(x, f)$ функции $f(x)$ в метрике пространств $\mathcal{L}^p$, $2 \le p < \infty$, на всем отрезке $\overline{G}$ и оценить скорость равносходимости этих разложений (или, иными словами, оценить погрешность аппроксимации одного разложения другим, более удобным для нас в каком-то смысле). Из этой оценки следует, в частности, что оба разложения сходятся или расходятся в метрике данного пространства $\mathcal{L}^p$ одновременно. Оценки скорости равносходимости разложений позволяют установить оценки приближения широкого класса функций их биортогональными разложениями.

2. Основная теорема. Зафиксируем произвольное число $p \in [2, \infty)$ и обозначим: $\nu = \min \nu_i$, $i = 1, 2$, $V(G)$ — класс функций с ограниченным изменением на $\overline{G}$.

Теорема 1. *Пусть для операторов L_1, L_2 и функции $f(x)$ выполняются условие (1) и условия А, Б. Тогда для всех достаточно больших чисел λ справедлива оценка*

$$\|\sigma_\lambda(x, f) - \hat{\sigma}_\lambda(x, f)\|_p = \begin{cases} O(\max(\lambda^{-1}, \lambda^{-(\nu - 1/q)})), & \nu \ne 1 + 1/q, \\ O(\lambda^{-1} \ln^{1/q} \lambda), & \nu = 1 + 1/q. \end{cases}$$

Если при этом $f(x) \in V(G)$, то

$$\|f(x) - \sigma_\lambda(x, f)\|_p = O(\max(\lambda^{-1/p}, \lambda^{-(1/p + \nu_1 - 1)})) \tag{6}$$

равномерно относительно λ.

Замечание 2. При $\nu_1 = 1$ оценка (6) совпадает с точной оценкой скорости сходимости тригонометрического ряда Фурье [6]. Обе оценки теоремы 1 при $\nu_i = 1$, $i = 1, 2$, улучшают на $\ln \lambda$ ранее полученные оценки для самосопряженных операторов L_i [6].

Замечание 3. Если $f(x) \in V(G)$, а $\{v_k(x)\}$ — система корневых функций оператора L_1^*, то показатель ν_1 в условии (4) равен единице. Если же система $\{v_k\}$, биортогонально сопряженная с $\{u_k\}$, не связана с оператором L_1^*, то ν_1 может быть и меньше единицы (см. [3]).

Замечание 4. В левых частях соотношений теоремы 1 в качестве сумм $\sigma_\lambda(x, f)$, $\hat{\sigma}_\lambda(x, f)$ можно рассматривать частичные суммы спектральных разложений различных видов операторов L_i, $i = 1, 2$, правые части при этом не изменятся. Эта ситуация отличается от случая равносходимости на внутреннем отрезке $K \subset G$, когда четыре различных вида операторов L_i дают разные оценки скорости сходимости. Укажем их при $i = 1$: L_1^0 (коэффициенты $p_1 \equiv q_1 \equiv 0$, конечное число присоединенных функций в системе $\{u_k\}$), L_1^1 (коэффициенты $p_1 \equiv 0$, $q_1 \not\equiv 0$, конечное или бесконечное число присоединенных функций), L_1^2 ($p_1 \ne 0$, $s_1 \ge p$), L_1^3 ($p_1 \ne 0$, $s_1 < p$).

3. Обобщение теоремы Рисса на биортогональные системы функций. Для обоснования основного утверждения работы нам потребуется обобщение на биортогональные системы функций известной теоремы Рисса для ортогональных систем [7, т. 2, с. 154] (или теоремы Рисса — Фишера в $\mathcal{L}^2$ для ортонормированных систем [7, т. 1, с. 207], теоремы Хаусдорфа — Юнга в $\mathcal{L}^p$ для тригонометрической системы функций [7, т. 2, с. 153]).

Фиксируем произвольные числа $r_1 \in [1,\infty]$ и $\gamma \in [1,2]$ и полагаем, что $\|c_k\|_{l_\infty} \equiv \max|c_k|$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная система функций, определенных на $\overline{G}$, $u_k \in \mathcal{L}^\infty(G)$. Если система $\{u_k\}$ минимальна в $\mathcal{L}^{r_1}(G)$, то через $\{v_k\}$ обозначим биортогонально сопряженную с $\{u_k\}$ систему функций, $v_k \in \mathcal{L}^{r_1'}(G)$.

Теорема 2. *Пусть для системы $\{u_k\}$ выполняется обобщенное неравенство Бесселя и оценка $\mathcal{L}^\infty$-нормы:*

$$\exists c_1 = \text{const} > 0: \ \|(\varphi, u_k)\alpha_k^{-1}\|_{l_{\gamma'}} \le c_1\|\varphi\|_\gamma \ \forall \varphi \in \mathcal{L}^\gamma(G), \tag{7}$$

$$\exists c_2 = \text{const} > 0: \ \|u_k\|_\infty \alpha_k^{-1} \le c_2, \ \forall k \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

где $\alpha_k = \|v_k\|_{r_1'}^{-1}$ или $\alpha_k = \|u_k\|_{r_1}$, $\gamma' = \gamma/(\gamma-1)$.

Тогда: а) для любого числа $\alpha \in [1,\gamma]$ найдется постоянная $c > 0$ такая, что

$$\|(\varphi, u_k)\alpha_k^{-1}\|_{l_\beta} \le c\|\varphi\|_\alpha \ \forall \varphi \in \mathcal{L}^\alpha(G), \quad \beta^{-1} + \alpha^{-1} = 1, \quad \beta \in [\gamma', \infty]; \tag{9}$$

б) для любых чисел $\alpha \in [1,\gamma]$ и $r \in [1,\infty]$ найдется постоянная $c > 0$ такая, что для любой функциональной последовательности $\{g_k(y)\}, g_k(y) \in \mathcal{L}^r(G)$ такой, что числовая последовательность $\|g_k\|_r \alpha_k \in l_Q$, где $Q = \min(r,\alpha)$, найдется функция $g(x,y) \in \mathcal{L}^{(\beta,r)}(G^2)$, для которой справедливы следующие два соотношения:

$$\|g(x,y) - \sum_{k=1}^{n} g_k(y)u_k(x)\|_{\beta,r} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{10}$$

$$\|g\|_{\beta,r} \le c\|\alpha_k\|g_k\|_r\|_{l_Q}. \tag{11}$$

Если, кроме того, $r_1 \le \beta$, т. е. $g(x,y) \in \mathcal{L}^{(r_1,r)}(G^2)$, и система $\{u_k\}$ минимальна в $\mathcal{L}^{r_1}(G)$, то $g_k(y) = (g(x,y), v_k(x))$ для почти всех $y \in G$.

Замечание 5. При проведении обоснования теоремы исходим из схемы доказательства теоремы Рисса [7, т. 2, с. 154 — 156] и используем схему обоснования обобщенного неравенства Минковского для интегралов [8, с. 22, 23]. Теорема 2 для почти нормированной системы $\{u_k\}$, $\gamma = 2$, $\{g_k\}$ — числовая последовательность, доказана в [9], а для произвольной системы $\{u_k\}, \gamma \in (1,2], \{g_k\}$ — числовая последовательность, — в [1].

Доказательство теоремы 2. Соотношение (9) следует из неравенства (7), оценки $\sup|(\varphi, u_k)\alpha_k^{-1}| \le c_2\|\varphi\|_1$, где мы использовали (8), и теоремы Рисса — Торина [7, т. 2, с. 144], при этом $c = c_1^{2/\beta} c_2^{2/\alpha - 1}$.

Докажем вторую часть теоремы. Положим $S_N(x,y) = g_1(y)u_1(x) + \ldots + g_N(y)u_N(x), N \ge 1$, и рассмотрим произвольную функцию $\varphi(x) \in S$, $\|\varphi\|_\alpha \ne 0$, S — множество простых функций. Применяя неравенство Гёльдера для сумм и оценку (9), получаем

$$\left|\int_{\overline{G}} \bar{S}_N(x,y)\varphi(x)\,dx\right| = \left|\sum_{k=1}^{N}(\bar{g}_k(y)\alpha_k)((\varphi,u_k)\alpha_k^{-1})\right| \le c\|\varphi\|_\alpha\Big(\sum_{k=1}^{N}|g_k\alpha_k|^\alpha\Big)^{1/\alpha}$$

для почти всех $y \in G$. Разделим обе части последнего неравенства на $\|\varphi\|_\alpha$ и в левой части возьмем точную верхнюю грань по всем $\varphi \in S$, находим, что $\|S_N(\cdot,y)\|_\beta \le c\Big(\sum\limits_{k=1}^{N}|g_k\alpha_k|^\alpha\Big)^{1/\alpha}$ для почти всех $y \in G$. Обе части этого неравенства, очевидно, принадлежат $\mathcal{L}^r(G)$, и оно справедливо для $\mathcal{L}^r$-норм по y:

$$\|S_N(x,y)\|_{(\beta,r)} \le c\left\|\Big(\sum_{k=1}^{N}|g_k(y)\alpha_k|^\alpha\Big)^{1/\alpha}\right\|_r. \tag{12}$$

1) Пусть $r \le \alpha$, т.е. $r/\alpha \le 1$. Тогда, используя для суммы оценку [7, т. 1, с. 39]

$$\Big(\sum_{k=1}^{N}|g_k(y)\alpha_k|^\alpha\Big)^{r/\alpha} \le \sum_{k=1}^{N}|g_k(y)\alpha_k|^r \tag{13}$$

для почти всех $y \in G$, получим для правой части (12)

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{N} |g_k(y)\alpha_k|^\alpha \right)^{1/\alpha} \right\|_r \le \left(\sum_{k=1}^{N} (\alpha_k \|g_k\|_r)^r \right)^{1/r} \le \|\alpha_k \|g_k\|_r\|_{l_r},$$

откуда следует

$$\|S_N(x,y)\|_{(\beta,r)} \le c\|\alpha_k\|g_k\|_r\|_{l_r}. \tag{14}$$

2) Пусть $r > \alpha$, т.е. $r/\alpha > 1$. Получим неравенство — аналог обобщенного неравенства Минковского [8, с. 22], где один из интегралов заменен суммой. Обозначим для краткости $r/\alpha = \nu > 1$, $\nu' = \nu/(\nu - 1)$. Положим $S(y) = \sum\limits_{k=1}^{N} |g_k(y)\alpha_k|^\alpha$.

Пусть $\varphi(y)$ — произвольная вещественнозначная функция из $\mathcal{L}^{\nu'}(G)$. Тогда, поменяв местами знаки интеграла и суммы в следующем выражении и применив затем неравенство Гёльдера для интеграла, выводим

$$\int\limits_G S(y)\varphi(y)\,dy \le \sum_{k=1}^{N} \int\limits_G |\varphi(y)|\,|g_k(y)\alpha_k|^\alpha\,dy \le \|\varphi\|_{\nu'} \sum_{k=1}^{N} \|(g_k(y)\alpha_k)^\alpha\|_\nu.$$

Разделим левую и правую части последнего соотношения на $\|\varphi\|_{\nu'}$ и возьмем точную верхнюю грань по всем $\varphi \in \mathcal{L}^{\nu'}(G)$. Тогда имеем $S(y) \in \mathcal{L}^\nu(G)$ и

$$\|S\|_\nu \le \sum_{k=1}^{N} (\|g_k(y)\|_r \alpha_k)^\alpha$$

или, подставляя вместо S соответствующую сумму,

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{N} |g_k(y)\alpha_k|^\alpha \right)^{1/\alpha} \right\|_r \le \left(\sum_{k=1}^{N} (\|g_k\|_r \alpha_k)^\alpha \right)^{1/\alpha}. \tag{15}$$

Отсюда, устремляя r к бесконечности, получаем неравенство (15) и при $r = \infty$.

Замечание 6. Нетрудно видеть, что вместо N в (13) и (15) можно поставить ∞ (возможность почленного интегрирования для получения (15) следует из условия $\|g_k\|_r \alpha_k \in l_\alpha$ и известной теоремы Леви).

Возвращаясь к соотношению (12) и используя (14), (15), можем записать

$$\|S_N(x,y)\|_{(\beta,r)} \le c\left(\sum_{k=1}^{N} (\alpha_k \|g_k(y)\|_r)^Q \right)^{1/Q} \le c\|\alpha_k\|g_k\|_r\|_{l_Q}, \tag{16}$$

где $Q = \min(r, \alpha)$. Подставив вместо S_N разность $S_m - S_N$, $m < N$, из первого неравенства (16) получаем

$$\|S_m - S_N\|_{(\beta,r)} \le c\left(\sum_{k=m+1}^{N} (\alpha_k \|g_k(y)\|_r)^Q \right)^{1/Q} \to 0, \quad m, N \to \infty. \tag{17}$$

В силу полноты пространства $\mathcal{L}^{(\beta,r)}(G^2)$ отсюда следует, что найдется функция $g(x,y)$ из этого пространства, для которой

$$\|S_m - g\|_{(\beta,r)} \to 0, \quad m \to \infty, \tag{18}$$

что доказывает (10).

Из соотношения (18) вытекает, что существует подпоследовательность $\{S_{m_k}\}$ последовательности $\{S_m\}$, которая сходится к функции $g(x,y)$ почти всюду в G^2. Перепишем правое неравенство (16) для суммы S_N следующим образом [8, с. 21]:

$$\sup_{\|\varphi\|=1} \iint\limits_{G^2} |S_N(x,y)\varphi(x,y)|\,dx\,dy \le c\|\alpha_k\|g_k\|_r\|_{l_Q},$$

где $\|\varphi\| = \|\varphi\|_{(\alpha,r')}$, $r' = r/(r-1)$, или

$$\iint\limits_{G^2} |S_N\varphi|\,dxdy \le c\|\alpha_k\|g_k\|_r\|_{l_Q}\ \forall\varphi:\ \|\varphi\|_{(\alpha,r')} = 1.$$

Так как последовательность $S_{m_k}\varphi$ сходится к $g\varphi$ при $m_k \to \infty$ для почти всех $(x,y) \in G^2$, то по лемме Фату справедливо $\iint\limits_{G^2} |g\varphi|\,dxdy \le c\|\alpha_k\|g_k\|_r\|_{l_Q}$; следовательно,

$$\|g\|_{(\beta,r)} = \sup_{\|\varphi\|=1} \iint\limits_{G^2} |g(x,y)\varphi(x,y)|\,dxdy \le c\|\alpha_k\|g_k\|_r\|_{l_Q},$$

что доказывает соотношение (11) теоремы 2.

Установим справедливость последнего утверждения теоремы 2. Пусть $r_1 \le \beta$, $g(x,y) \in \in \mathcal{L}^{r_1,r}(G^2)$ и система $\{u_k\}$ минимальна в $\mathcal{L}^{r_1}(G)$, т.е. существует биортогонально сопряженная с $\{u_k\}$ система $\{v_k\} \in \mathcal{L}^{r_1'}(G)$. По схеме обоснования теоремы Рисса — Фишера, используя свойство биортогональности, можем записать для любых чисел k, N, $k \le N$:

$$g_k(y) = \int\limits_{\bar G} S_N(x,y)\overline{v}_k(x)\,dx = \int\limits_{\bar G} g(x,y)\overline{v}_k(x)\,dx + \int\limits_{\bar G}(S_N - g)\overline{v}_k(x)\,dx,$$

или $|g_k(y) - (g,v_k)(y)| = \left|\int\limits_{\bar G}[S_N(x,y) - g(x,y)]\overline{v}_k(x)\,dx\right| \le \|v_k\|_{r_1'}\|S_N - g\|_{r_1}$. Интегрируя последнее неравенство по y и используя соотношение (18) и то, что $r_1 \le \beta$ и $r \ge 1$, получаем

$$\|g_k(y) - (g,v_k)(y)\|_1 \le \|v_k\|_{r_1'}\|S_N - g\|_{(r_1,1)} \to 0, \quad N \to \infty.$$

Таким образом, $g_k(y) = (g,v_k)(y)$ почти всюду на G. Теорема 2 доказана.

4. **Доказательство основной теоремы.** В работе [1] проведено доказательство теоремы 1 при дополнительном условии: либо система $\{v_k\}$ полна в $\mathcal{L}^{r_1}$, либо справедлива оценка $\|v_k\|_\infty\|v_k\|_{r_1'}^{-1} \le c\ \ \forall k \in \mathbb{N}$, которое использовалось только при обосновании разложимости срезки модифицированного ядра Дирихле в биортогональный ряд по системе $\{u_k, v_k\}$. Таким образом, для доказательства теоремы 1 нам достаточно обосновать сходимость этого разложения к рассматриваемой функции в соответствующих пространствах. Сформулируем требуемое утверждение в виде леммы для оператора L_1 (для L_2 справедливо аналогичное утверждение).

Фиксируем любой отрезок $K = [a,b] \subset G$ и произвольное число $R_0 \in (0, \operatorname{dist}(K, \partial G)/2)$. Для любого числа $R \in [R_0/2, R_0]$, любого $x \in K$ и достаточно большого числа $\lambda > 0$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$w_\lambda(\rho, R) = \begin{cases} (\sin\lambda\rho)/(\pi\rho), & |\rho| \le R,\ \rho = x - y,\ y \in \overline{G}, \\ 0, & |\rho| > R. \end{cases}$$

Как и в работах [4; 5, с 789 — 793], введем операцию усреднения функции w_λ по R:

$$S_0[w_\lambda(\rho,R)] = \frac{8}{3R_0^2}\int\limits_{R_0/2}^{R_0} Rw_\lambda(\rho,R)\,dR,$$

где коэффициенты подобраны так, что $S_0[1] = 1$. Обозначим $v_0(x,y) = S_0[w_\lambda(\rho,R)]$.

Лемма. *Пусть для оператора L_1 выполняются условие (1), условия A и условие (5). Пусть функция $f(x) \in \mathcal{L}^{r_1}(G)$. Тогда справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\int\limits_{\bar G} f(y)[v_0(x,y) - \sum_{k=1}^{n}(v_0,\bar u_k)\bar v_k(y)]\,dy\right\|_{p,K} = 0. \tag{19}$$

Доказательство. Обозначим выражение, стоящее под знаком предела в левой части (19), через Δ_n и применим к нему обобщенное неравенство Минковского, а затем к интегралу по y неравенство Гёльдера, получим

$$\Delta_n \le \int\limits_G |f(y)| \|v_0(x,y) - \sum_{k=1}^{n} (v_0, \bar{u}_k)\bar{v}_k(y)\|_{p,K}\, dy \le \|f\|_{r_1} \|v_0(x,y) - \sum_{k=1}^{n} (v_0, \bar{u}_k)\bar{v}_k(y)\|_{(p,r_1'),KG}, \quad r_1 \ge 1.$$

Тогда для доказательства леммы нам достаточно установить, что рассматриваемый ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (v_0(x,y), \bar{u}_k(y))\bar{v}_k(y) \tag{20}$$

сходится в метрике пространства $\mathcal{L}^{(p,r_1')}(KG)$ и именно к функции v_0. Обоснуем каждый из этих фактов в отдельности.

1°. Предположим, что сходимость ряда (20) в смешанной $\mathcal{L}^{(p,r_1')}$-норме установлена. Докажем, что он сходится к функции $v_0(x,y)$. Обозначим через $g(x,y)$ функцию, к которой сходится ряд (20):

$$\|g(x,y) - \sum_{k=1}^{n} (v_0, \bar{u}_k)(x)\bar{v}_k(y)\|_{(p,r_1'),KG} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{21}$$

Для любой функции $\varphi(y) \in \mathcal{L}^{\infty}(G)$ можно записать

$$\left\| \int\limits_G [g(x,y) - \sum_{k=1}^{n} (v_0, \bar{u}_k)(x)\bar{v}_k(y)]\varphi(y)\, dy \right\|_{p,K} \to 0.$$

Возьмем в качестве $\varphi(y)$ функцию $u_j(y) \in \{u_k\}$ с произвольно фиксированным номером j. Пусть $n \ge j$, тогда

$$\left\| \int\limits_G [g(x,y) - \sum_{k=1}^{n} (v_0, \bar{u}_k)(x)\bar{v}_k(y)]u_j(y)\, dy \right\|_{p,K} = \|[(g, \overline{u}_j) - \sum_{k=1}^{n} (v_0, \bar{u}_k)(u_j, v_k)]\|_{p,K} =$$

$$= \|[(g, \overline{u}_j) - (v_0, \overline{u}_j)]\|_{p,K} = \|(g - v_0, \overline{u}_j)(x)\|_{p,K} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Поскольку преобразованное выражение от n не зависит, то $\|(g - v_0, \overline{u}_j)(x)\|_{p,K} = 0 \ \ \forall j \in \mathbb{N}$. По определению нормы $(g - v_0, \overline{u}_j)(x) = 0$ для почти всех $x \in K$ и всех $j \in \mathbb{N}$. Система $\{u_k\}$ замкнута в $\mathcal{L}^{r_1}(G)$ по первому из условий А, а следовательно, полна в $\mathcal{L}^{r_1'}(G)$; условие ортогональности функции $g - v_0$ ко всем элементам системы $\{u_k\}$ означает, что эта функция — нулевой элемент в пространстве $\mathcal{L}^{r_1'}(G)$, т.е. $g - v_0 = 0$ для почти всех $y \in G$. Окончательно получаем, что $g(x,y) = v_0(x,y) = S_0[w_\lambda(\rho, R)]$ для почти всех $(x,y) \in KG$, что и требовалось доказать.

При условии сходимости ряда (20) мы показали, что

$$\left\| \int\limits_G f v_0\, dy \right\|_{p,K} = \left\| \int\limits_G f \sum_{k=1}^{\infty} (v_0, \bar{u}_k)\bar{v}_k\, dy \right\|_{p,K}. \tag{22}$$

Заметим, что в этой части леммы можно положить $p = \infty$ — соотношение (22) будет иметь место, если сходится ряд (20) в соответствующей смешанной метрике.

2°. Докажем сходимость ряда (20) в смешанной $\mathcal{L}^{(p,r_1')}$-норме. При фиксированном в определении функции $w_\lambda(\rho, R)$ числе λ (считаем $\lambda > 2/R_0$) нам достаточно доказать конечность величины

$$A_0 \equiv \| \sum_{|\lambda_k| \ge 3\lambda/2} (v_0, \bar{u}_k)\bar{v}_k \|_{(p,r_1'),KG}. \tag{23}$$

Обозначим через Σ_3 знак суммирования по указанным в (23) значениям k (обозначение взято из [1]). Используя представления (27), (30) из [1] для коэффициентов $(v_0, \bar{u}_k)$, получаем

$$A_0 = \left\| \Sigma_3 \bar{v}_k(y) \left[u_k(x) O\left(\frac{1}{\lambda_k^2}\right) + \frac{1}{\pi} S_0 \left[\int_0^R K_0(\lambda, \lambda_k, \tau, R) s_\tau(A_1 u_k(x))\, d\tau \right] \right] \right\|_{(p, r_1'), KG}, \tag{24}$$

где

$$K_0(\lambda, \lambda_k, \tau, R) \equiv \frac{1}{\lambda_k} \int_\tau^R \frac{\sin \lambda r \sin \lambda_k (r - \tau)}{r}\, dr = O\left(\frac{1}{\lambda_k^2}\right), \quad |\lambda_k| \geq \frac{3\lambda}{2}$$

(обозначение интеграла и оценка взяты из [10]), $s_\tau(A_1 u_k(x)) \equiv A_1 u_k(x + \tau) + A_1 u_k(x - \tau)$, $A_1 u_k \equiv -p_1 u_k' - q_1 u_k$, если u_k — собственная функция, и $A_1 u_k \equiv A_1 \overset{m}{u}_k = \mu_m \overset{m-1}{u}_k - p_1 \overset{m}{u}_k' - q_1 \overset{m}{u}_k$, если u_k — m-я присоединенная функция.

В работе [1] было показано, что при выполнении первого из условий (2) и условия (3) для системы $\{u_k\}$ имеет место оценка (8) теоремы 2, используя которую и оценку для интеграла K_0, а также второе из условий (2), устанавливаем конечность величины

$$\left\| \Sigma_3 \bar{v}_k(y) \left[u_k(x) O\left(\frac{1}{\lambda_k^2}\right) - \frac{1}{\pi} S_0 \left[\int_0^R K_0(\lambda, \lambda_k, \tau, R) s_\tau(q_1 u_k(x))\, d\tau \right] \right] \right\|_{(p, r_1'), KG}.$$

Оценим оставшуюся часть в (24). Поскольку для выражений $p_1 u_k'$ и $\overset{m-1}{u}_k$ преобразования аналогичны, проведем их только для члена $p_1 u_k'$. При этом в сумме $s_\tau(p_1 u_k'(x))$ оставим лишь одно слагаемое с аргументом $x + \tau$ (в случае $x - \tau$ схема та же). Рассмотрим выражение

$$A_{01} = \left\| \Sigma_3 \bar{v}_k(y) S_0 \left[\int_0^R K_0(\lambda, \lambda_k, \tau, R) \lambda_k \varphi_k(x + \tau)\, d\tau \right] \right\|_{(p, r_1'), KG}, \tag{25}$$

где введем обозначение $\varphi_k(x) = \lambda_k^{-1} p_1 u_k'(x)$. Поменяем местами в (25) знак суммы Σ_3 и интегралы по R и τ (законность этой операции следует из доказываемой далее конечности выражения $\|S_0[\int_0^R |\Sigma_3(\ldots)|\, d\tau]\|_{(p, r_1'), KG}$, т.е. сходимости в среднем ряда Σ_3), к полученному выражению применим обобщенное неравенство Минковского, вынося операцию усреднения S_0 за знак нормы:

$$A_{01} \leq S_0 \left[\left\| \int_0^R \left[\Sigma_3 \bar{v}_k(y) \varphi_k(x + \tau) \int_\tau^R \frac{\sin \lambda r \sin \lambda_k (r - \tau)}{r}\, dr \right] d\tau \right\|_{(p, r_1'), KG} \right]. \tag{26}$$

Обозначим

$$\psi_1 = \int_\tau^{1/\lambda} \frac{\sin \lambda r \sin \lambda_k (r - \tau)}{r}\, dr, \quad \psi_2 = \int_{1/\lambda}^R \frac{\sin \lambda r \sin \lambda_k (r - \tau)}{r}\, dr, \quad \psi_3 = \lambda_k K_0.$$

Разобьем в (26) интеграл по τ на сумму двух интегралов: по $\tau \in [0, 1/\lambda]$ и $\tau \in [1/\lambda, R]$ ($1/\lambda < R_0/2 \leq R$ по условию). Применяя неравенство Минковского в правой части (26), получим оценку

$$A_{01} \leq \left\| \int_0^{1/\lambda} \Sigma_3 \bar{v}_k(y) \varphi_k(x + \tau) \psi_1(\lambda, \lambda_k, \tau)\, d\tau \right\| + S_0 \left[\left\| \int_0^{1/\lambda} \Sigma_3 \bar{v}_k(y) \varphi_k(x + \tau) \psi_2(\lambda, \lambda_k, \tau)\, d\tau \right\| \right] +$$

$$+ S_0 \left[\left\| \int_{1/\lambda}^R \Sigma_3 \bar{v}_k(y) \varphi_k(x + \tau) \psi_3(\lambda, \lambda_k, \tau)\, d\tau \right\| \right] \equiv U_1 + U_2 + U_3, \tag{27}$$

где все нормы берутся в $\mathcal{L}^{(p,r_1')}(KG)$.

Схема преобразований слагаемых U_j, $j=1,2,3$, одинакова. Получим оценки интегралов ψ_j. Для ψ_1, интегрируя по частям и применяя формулу Маклорена для синуса и косинуса, получаем

$$\psi_1 = \lambda_k^{-1}[\tau^{-1}\sin\lambda\tau - \lambda\sin 1\cos\lambda_k(1/\lambda-\tau) + \int\limits_{\tau}^{1/\lambda}\cos\lambda_k(r-\tau)O(\lambda^3 r)\,dr] = O(\lambda_k^{-1})$$

равномерно по τ, где также использовано первое из условий (2). Для ψ_2, интегрируя по частям и учитывая первое условие (2), получаем равномерно по τ, что $\psi_2 = O(\lambda_k^{-1})$ при фиксированном λ. Для ψ_3, используя вторую формулу среднего [12, с. 356], получаем равномерную по τ оценку $\psi_3 = O(\tau^{-1}|\lambda - |\lambda_k||^{-1}) = O(|\lambda_k|^{-1})$, справедливую при $|\lambda_k| \geq 3\lambda/2$, $\tau \geq \lambda^{-1}$, при фиксированном λ.

Положим $\gamma = \min(2, s_1)$, тогда $\gamma' = \gamma/(\gamma-1) = \max(2, s_1')$. По условию (5) $\gamma' \leq p$; пусть также $\gamma' \leq r_1'$. Тогда, применяя для выражений U_j, $j=1,2$, неравенство Гёльдера по τ, а затем обобщенное неравенство Минковского, получаем

$$U_j \leq \|p_1\|_\gamma S_0\Big[\Big(\int\limits_0^{1/\lambda}\Big\|\Sigma_3\bar{v}_k(y)\psi_j\lambda_k^{-1}u_k'(x+\tau)\Big\|^{\gamma'}_{(p,r_1'),KG}d\tau\Big)^{1/\gamma'}\Big] \leq$$

$$\leq \|p_1\|_\gamma S_0\Big[\Big(\int\limits_0^{1/\lambda}\Big\|\Sigma_3\bar{v}_k(y)\psi_j\lambda_k^{-1}u_k'(\xi)\Big\|^{\gamma'}_{(p,r_1'),G^2}d\tau\Big)^{1/\gamma'}\Big], \quad j=1,2$$

(проведена замена переменной x на $\xi = x+\tau$). Чтобы оценить полученное выражение, применим теорему 2 для системы функций $\{\lambda_k^{-1}u_k'(\xi)\}$. Выбранный параметр $\gamma \in (1,2]$. Для функций $u_k'(\xi)$ имеет место оценка (см., например, [11]) $\|u_k'\|_\infty \leq c|\lambda_k|\|u_k\|_\infty$, $|\lambda_k| \geq 1$, что вместе с оценкой (8) для системы $\{u_k\}$ доказывает выполнение условия (8) для системы $\{\lambda_k^{-1}u_k'\}$ с $\alpha_k = \|v_k\|_{r_1'}^{-1}$, $|\lambda_k| \geq 1$.

Схема обоснования справедливости условия (7) для системы $\{u_k\}$ при условиях теоремы 1 приведена в [1]. Для системы $\{\lambda_k^{-1}u_k'\}$ это доказывается аналогично. Проверку этого условия см. в п. 5 работы, где приведен полный вывод обобщенного неравенства Бесселя для рассматриваемых систем. В силу эквивалентности $\mathcal{L}^r$-норм $r \in [1,\infty]$, для u_k' (см. [11]) в качестве α_k можно использовать и выражение $|\lambda_k|^{-1}\|u_k'\|_{r_1}$, $|\lambda_k| \geq 1$.

Применим вторую часть теоремы 2. В нашем случае $\alpha = q = p/(p-1) \in (1,\gamma]$, $r = r_1' \geq 2$, $g_k(y) = \bar{v}_k(y)\psi_j(\lambda,\lambda_k,\tau) \in \mathcal{L}^{r_1'}(G)$, $\|g_k\|_{r_1'}\alpha_k = O(\lambda_k^{-1}) \in l_Q$, где учтены оценки для ψ_j, $Q = \min(r_1', q) = q > 1$. Из оценки (11) следует соотношение $U_j \leq c\|p_1\|_\gamma\,[\Sigma_3 O(|\lambda_k|^{-Q})]^{1/Q} < \infty$, $j=1,2$, где также использовано первое условие (2).

Если $\gamma' > r_1'$, то, применяя, как и выше, для U_j неравенство Гёльдера по τ и обобщенное неравенство Минковского, поменяем местами интегралы по x и τ. Применим теперь по y неравенство Гёльдера (показатели $\alpha = \gamma'/r_1' > 1$ и сопряженный α') и поменяем местами интегралы по y и τ, получаем

$$U_j \leq \|p_1\|_\gamma S_0\Big[\Big(\int\limits_0^{1/\lambda}\|\Sigma_3\bar{v}_k(y)\psi_j\lambda_k^{-1}u_k'(x+\tau)\|^{\gamma'}_{(p,\gamma'),KG}\,d\tau\Big)^{1/\gamma'}\Big] \leq$$

$$\leq \|p_1\|_\gamma S_0\Big[\Big(\int\limits_0^{1/\lambda}\|\Sigma_3\bar{v}_k(y)\psi_j\lambda_k^{-1}u_k'(\xi)\|^{\gamma'}_{(p,\gamma'),G^2}\,d\tau\Big)^{1/\gamma'}\Big] \leq c\,(\Sigma_3|\lambda_k|^{-Q})^{1/Q} < \infty, \quad j=1,2.$$

(Здесь проведена замена переменной x на $\xi = x+\tau$, использованы оценка (11) для системы $\{\lambda_k^{-1}u_k'(\xi)\}$ и оценка для ψ_j, при этом $Q = \min(q,\gamma') = q > 1$, где учтено, что $q \leq 2$, $\gamma' \geq 2$.)

Для выражения U_3 в (27) по схеме преобразований, что и для U_j, $j = 1, 2$, с отличием только в пределах интегрирования по τ, получаем такие же оценки.

Таким образом, доказано, что все слагаемые U_j в (27) конечны, следовательно, и величина A_{01} в (25) конечна. Тем самым исходное выражение A_0 в (23) конечно, что и требовалось доказать. Итак, имеет место равенство (22). Лемма доказана.

Преобразования для функций $v_{1\lambda}, v_{2\lambda}$ из [1] аналогичны тем, что были проведены выше для функции $w_\lambda(\rho, R)$.

Для оператора L_2 при условиях теоремы 1 справедливо аналогичное соотношение (19). Теорема 1 доказана.

5. Обобщенное неравенство Бесселя. Имеет место

Теорема 3. *Пусть для системы корневых функций $\{u_k\}$ оператора L_1 выполняются условия (1), (2). Фиксируем произвольное число $r_1 \in [1, \infty]$. Обозначим $\gamma = \min(2, s_1) \geq 1$, $\alpha_k = \|u_k\|_{r_1}$, $\widetilde{u}_k(x) = \lambda_k^{-1} u_k'(x)$ при $\lambda_k \neq 0$. Тогда*

$$\exists c_1 = \text{const} > 0: \ \|(\varphi, u_k)\alpha_k^{-1}\|_{l_{\gamma'}} \leq c_1 \|\varphi\|_\gamma \quad \forall \varphi \in \mathcal{L}^\gamma(G), \tag{28}$$

$$\exists c_2 = \text{const} > 0: \ \|(\varphi, \widetilde{u}_k)\alpha_k^{-1}\|_{l_{\gamma'}} \leq c_2 \|\varphi\|_\gamma \quad \forall \varphi \in \mathcal{L}^\gamma(G). \tag{29}$$

Замечание 7. Если система $\{u_k\}$ минимальна в $\mathcal{L}^{r_1}(G)$ и справедливо условие (3), то в качестве α_k можно взять $\|v_k\|_{r_1'}^{-1}$ в (28) и (29). Поскольку все $\mathcal{L}^r$-нормы для u_k' эквивалентны между собой, то в (29) можно положить $\alpha_k = \|\widetilde{u}_k\|_{r_1}$.

Доказательство теоремы 3. Докажем неравенство (28). Если $s_1 \geq 2$ в условиях (1), то $\gamma = 2$ и неравенство (28) — обычное неравенство Бесселя для нормированной в $\mathcal{L}^{r_1}(G)$ системы $\{u_k \alpha_k^{-1}\}$. Это неравенство для $p_1(x) \in \mathcal{L}^2(G)$ доказано в [11] для нормированной в $\mathcal{L}^2(G)$ системы $\{u_k\}$. Поскольку $c_1(r_1) \leq \|u_k\|_2 \|u_k\|_{r_1}^{-1} \leq c_2(r_1)$, $c_1, c_2 = \text{const} > 0$, $r_1 \in [1, \infty]$, то система $\{u_k \|u_k\|_{r_1}^{-1}\}$ является почти нормированной в $\mathcal{L}^2(G)$ и обоснование неравенства (28) из [11] не изменяется.

Пусть $1 < s_1 < 2$, тогда $\gamma = s_1$. Для функций $u_k(x)$ из системы корневых функций $\{u_k\}$ справедливо следующее известное интегральное представление (легко получаемое интегрированием по частям):

$$u_k(x) = u_k(x_0) \cos \lambda_k (x - x_0) + \lambda_k^{-1} u_k'(x_0) \sin \lambda_k (x - x_0) +$$

$$+ \lambda_k^{-1} \int_{x_0}^{x} [\mu_m \overset{m-1}{u_k}(\tau) - p_1(\tau) u_k'(\tau) - q_1(\tau) u_k(\tau)] \sin \lambda_k (x - \tau)\, d\tau; \quad x, x_0 \in \overline{G}, \quad \lambda_k \in \mathbb{C}. \tag{30}$$

Возьмем произвольную функцию $\varphi \in \mathcal{L}^\gamma(G)$ и зафиксируем произвольную точку $x_0 \in \overline{G}$. Умножим обе части формулы (30) на $\overline{\varphi}(x)$ и проинтегрируем их по x на $\overline{G}$. В левой части полученного равенства будет стоять скалярное произведение (u_k, f), и для доказательства (28) нам достаточно обосновать справедливость неравенств

$$\sum_{|\lambda_k| \leq 1} |(u_k, \varphi)\alpha_k^{-1}|^{\gamma'} \leq c \|\varphi\|_\gamma^{\gamma'}, \tag{31}$$

$$\sum_{|\lambda_k| > 1} |u_k(x_0)\alpha_k^{-1} \int_{\overline{G}} \overline{\varphi}(x) \cos \lambda_k (x - x_0)\, dx|^{\gamma'} \leq c \|\varphi\|_\gamma^{\gamma'},$$

$$\sum_{|\lambda_k| > 1} |\lambda_k^{-1} \alpha_k^{-1} u_k'(x_0) \int_{\overline{G}} \overline{\varphi}(x) \sin \lambda_k (x - x_0)\, dx|^{\gamma'} \leq c \|\varphi\|_\gamma^{\gamma'}, \tag{32}$$

$$\sum_{|\lambda_k| > 1} |\lambda_k^{-1} \alpha_k^{-1} \int_{\overline{G}} \overline{\varphi}(x) \Big[\int_{x_0}^{x} \mu_m \overset{m-1}{u_k}(\tau) \sin \lambda_k (x - \tau)\, d\tau \Big] dx|^{\gamma'} \leq c \|\varphi\|_\gamma^{\gamma'}, \tag{33}$$

$$\sum_{|\lambda_k| > 1} |\lambda_k^{-1} \alpha_k^{-1} \int_{\overline{G}} \overline{\varphi}(x) \Big[\int_{x_0}^{x} q_1(\tau) u_k(\tau) \sin \lambda_k (x - \tau)\, d\tau \Big] dx|^{\gamma'} \leq c \|\varphi\|_\gamma^{\gamma'}, \tag{34}$$

$$\sum_{|\lambda_k|>1}\left|\lambda_k^{-1}\alpha_k^{-1}\int\limits_{\bar G}\overline{\varphi}(x)\Big[\int\limits_{x_0}^{x}p_1(\tau)u_k'(\tau)\sin\lambda_k(x-\tau)\,d\tau\Big]\,dx\right|^{\gamma'}\le c\|\varphi\|_\gamma^{\gamma'}. \tag{35}$$

Справедливость соотношения (31) следует из неравенства Гёльдера, оценки $\|u_k\|_{\gamma'}\le c\|u_k\|_{r_1}$ и второго из условий (2). Ряды в неравенствах (32) (после применения оценок $\|u_k^{(\alpha)}\|_\infty\le$ $\le c|\lambda_k|^\alpha\|u_k\|_{r_1}$, $\alpha=0,1$, и первого из условий (2)) мажорируются с некоторой постоянной рядом

$$\sum_{|\lambda_k|>1}\Big[\Big|\int\limits_{\bar G}\overline{\varphi}(x)\sin\lambda_k x\,dx\Big|^{\gamma'}+\Big|\int\limits_{\bar G}\overline{\varphi}(x)\cos\lambda_k x\,dx\Big|^{\gamma'}\Big], \tag{36}$$

для оценивания которого применим первую часть теоремы 2. Заметим, что для систем $\{\sin\lambda_k x\}$, $\{\cos\lambda_k x\}$ выполняется условие (7) теоремы 2: из основной теоремы работы [5, с. 1048 — 1053] следует справедливость неравенства Бесселя при выполнении первого условия (2), при этом $\gamma=2$, $\alpha_k=1$ в (7). Для указанных систем при выполнении первого условия (2) имеет место неравенство (8) с $\alpha_k=1$. Применяя к ряду (36) оценку (9) теоремы 2 при $\alpha=\gamma=s_1<2$, $\beta=\gamma'=s_1'>2$, устанавливаем справедливость неравенств (32).

Для общего члена ряда в (33) проведем следующие преобразования: поменяем местами интегралы по x и по τ, применим неравенство Гёльдера и "антиаприорную оценку" $\|\mu_m\overset{m-1}{u_k}\|_\gamma\le c|\lambda_k|\,\|\overset{m}{u_k}\|_{r_1}=c|\lambda_k|\,\|u_k\|_{r_1}$, получим

$$\Big|(\lambda_k\alpha_k)^{-1}\int\limits_{\bar G}\overline{\varphi}(x)\Big[\int\limits_{x_0}^{x}\mu_m\overset{m-1}{u_k}(\tau)\sin\lambda_k(x-\tau)\,d\tau\Big]\,dx\Big|^{\gamma'}=$$

$$=\Big|(\lambda_k\alpha_k)^{-1}\Big[\int\limits_0^{x_0}\mu_m\overset{m-1}{u_k}(\tau)\int\limits_0^{\tau}\overline{\varphi}(x)\sin\lambda_k(x-\tau)\,dx\,d\tau+\int\limits_{x_0}^{1}\mu_m\overset{m-1}{u_k}(\tau)\int\limits_{\tau}^{1}\overline{\varphi}(x)\sin\lambda_k(x-\tau)\,dx\,d\tau\Big]\Big|^{\gamma'}\le$$

$$\le c^{\gamma'}\Big[\Big(\int\limits_0^{x_0}\Big|\int\limits_0^{\tau}\overline{\varphi}(x)\sin\lambda_k(x-\tau)\,dx\Big|^{\gamma'}d\tau\Big)^{1/\gamma'}+\Big(\int\limits_{x_0}^{1}\Big|\int\limits_{\tau}^{1}\overline{\varphi}(x)\sin\lambda_k(x-\tau)\,dx\Big|^{\gamma'}d\tau\Big)^{1/\gamma'}\Big]^{\gamma'}.$$

Применив к полученному выражению оценку $(a+b)^\alpha\le 2^{\alpha-1}(a^\alpha+b^\alpha)$ $\forall\alpha\ge 1$ $a,b,\ge 0$, и первое условие (2), получим, что ряд в (33) мажорируется с некоторой постоянной рядом

$$\sum_{|\lambda_k|>1}\Big\{\int\limits_0^{x_0}\Big[\Big|\int\limits_0^{\tau}\overline{\varphi}(x)\sin\lambda_k x\,dx\Big|^{\gamma'}+\Big|\int\limits_0^{\tau}\overline{\varphi}(x)\cos\lambda_k x\,dx\Big|^{\gamma'}\Big]\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{x_0}^{1}\Big[\Big|\int\limits_{\tau}^{1}\overline{\varphi}(x)\sin\lambda_k x\,dx\Big|^{\gamma'}+\Big|\int\limits_{\tau}^{1}\overline{\varphi}(x)\cos\lambda_k x\,dx\Big|^{\gamma'}\Big]\,d\tau\Big\}. \tag{37}$$

В (37) интегралы по τ вынесем за знак суммы, введем функции $\varphi_1(x,\tau)=\varphi(x)$, $x\in[0,\tau]$, $\varphi_1(x,\tau)=0$, $x\in(\tau,1]$, и $\varphi_2(x,\tau)=\varphi(x)$, $x\in[\tau,1]$, $\varphi_2(x,\tau)=0$, $x\in[0,\tau)$, и запишем оценку сверху для ряда (37):

$$\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\bar G}\sum_{|\lambda_k|>1}\Big[\Big|\int\limits_{\bar G}\overline{\varphi}_j(x,\tau)\sin\lambda_k x\,dx\Big|^{\gamma'}+\Big|\int\limits_{\bar G}\overline{\varphi}_j(x,\tau)\cos\lambda_k x\,dx\Big|^{\gamma'}\Big]\,d\tau. \tag{38}$$

Применим для систем $\{\sin\lambda_k x\}$, $\{\cos\lambda_k x\}$ оценку (9) теоремы 2 ($\alpha=\gamma=s_1$, $\beta=\gamma'$, неравенство Бесселя для $\varphi_j(x,\tau)$ при каждом τ, очевидно, выполняется с постоянной c_1 в (7), не зависящей от τ) и оценим сверху выражение (38):

$$c\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\bar G}\|\varphi_j(x,\tau)\|_\gamma^{\gamma'}\,d\tau=c\int\limits_{\bar G}(\|\varphi\|_{\gamma,[0,\tau]}^{\gamma'}+\|\varphi\|_{\gamma,[\tau,1]}^{\gamma'})\,d\tau\le 2\|\varphi\|_\gamma^{\gamma'}. \tag{39}$$

Тем самым ряд в (38) сходится в среднем по τ, что обосновывает справедливость операции перемены местами знаков суммы и интегралов в (37). Соотношение (33) установлено.

К общему члену ряда в (34) применим неравенство Гёльдера в интеграле по x, оценку $\|u_k\|_\infty \le c\|u_k\|_{r_1}$ и первое условие (2) (для оценивания синуса), получим для ряда в (34) оценку сверху с некоторой постоянной c:

$$c\|\varphi\|_\gamma^{\gamma'}\|q_1\|_1^{\gamma'} \sum_{|\lambda_k|>1} |\lambda_k|^{-\gamma'} \le \mathrm{const}\|\varphi\|_\gamma^{\gamma'},$$

где использованы второе условие (2) и условие $\gamma' > 2$. Неравенство (34) установлено.

Преобразовав общий член ряда в (35) так же, как и в ряде из (33), и применив оценку $\|p_1 u_k'\|_\gamma \le c|\lambda_k|\|p_1\|_\gamma\|u_k\|_{r_1}$, получаем последовательно для ряда в (35) оценки (37) — (39), что доказывает неравенство (35).

Из справедливости неравенств (31) — (35) следует справедливость оценки (28). Первая часть теоремы 3 доказана.

Дифференцируя равенство (30) по x при фиксированном x_0, получаем для системы $\{\tilde{u}_k\}$ представление

$$\lambda_k^{-1}u_k'(x) = -u_k(x_0)\sin\lambda_k(x-x_0) + \lambda_k^{-1}u_k'(x_0)\cos\lambda_k(x-x_0)+$$

$$+\lambda_k^{-1}\int_{x_0}^{x}[\mu_m\, {}^m\tilde{u}_k^{-1}(\tau) - p_1(\tau)u_k'(\tau) - q_1(\tau)u_k(\tau)]\sin\lambda_k(x-\tau)\,d\tau, \quad x\in\overline{G}, \quad \lambda_k\in\mathbb{C},$$

с точностью до знака совпадающее с выражением (30) после перемены местами в нем синусов и косинусов. Очевидно, что замена в левых частях (32) — (35) синусов на косинусы, а косинуса на синус не изменяет этих оценок, что и доказывает справедливость оценки (29).

Если $s_1 = 1$, то $\gamma = 1$, $\gamma' = \infty$. Положим $\|c_k\|_{l_\infty} \equiv \max|c_k|$, $k\in\mathbb{N}$. Применяя неравенство Гёльдера с показателями γ, γ' и приведенные выше оценки для корневых функций, устанавливаем справедливость (28), (29) и в этом случае. Теорема 3 доказана.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 93 — 01 — 00131) и программой ФПММ "Университеты России".

Автор признателен В. А. Ильину и Е. И. Моисееву за плодотворные беседы по теме работы.

Литература

1. *Ломов И. С.* // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 1. С. 71 — 82.
2. *Ломов И. С.* // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1995. № 4. С. 43 — 54.
3. *Моисеев Е. И.* // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, № 4. С. 794 — 798.
4. *Ильин В. А.* // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 5. С. 771 — 794; № 6. С. 980 — 1006.
5. *Ильин В. А.* // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 4. С. 789 — 793; № 5. С. 1048 — 1053.
6. *Ломов И. С.* // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 9. С. 1480 — 1493.
7. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М., 1965. Т. 1,2.
8. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1975.
9. *Ломов И. С.* // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1992. № 5. С. 33 — 43.
10. *Ильин В. А.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 4. С. 577 — 597.
11. *Ломов И. С.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 9. С. 1550 — 1563.
12. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х.* Математический анализ. М., 1985. Т. 1.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию 18 сентября 1995 г.