S. S. Goncharov, R. Downey, D. Hirschfeldt, Degree Spectra of Relations on Boolean Algebras, *Algebra Logika*, 2003, Volume 42, Number 2, 182–193

Алгебра и логика, 42, № 2 (2003), 182—193

УДК 510.5+512.563

СПЕКТРЫ СТЕПЕНЕЙ ДЛЯ ОТНОШЕНИЙ НА БУЛЕВЫХ АЛГЕБРАХ*)

С. С. ГОНЧАРОВ, Р. ДОУНИ, Д. ХИРШВЕЛЬД

Большое количество исследований было посвящено изучению понятия вычислимости в последние десятилетия. В частности, активная работа велась в теории вычислимых моделей. Она привела к появлению и интенсивному исследованию нескольких основных тем, постоянно повторяющихся в различных публикациях. К ним относится изучение теоретико-вычислительных свойств образов некоторого отношения на модели в ее различных вычислимых копиях.

В данной работе с этой точки зрения исследуются вычислимые отношения на булевых алгебрах. Булевы алгебры вызывают большой интерес у специалистов по теории вычислимых моделей, поскольку, подобно линейным порядкам, они являются естественным, нетривиальным и хорошо изученным классом моделей, который устроен лучше многих других классов. В силу этого, изучение вычислимых булевых алгебр может привести к более глубокому пониманию природы вычислений с ограничениями.

Ниже приводятся необходимые понятия из теории вычислимых моделей. В качестве важного источника, покрывающего большой спектр тем из вычислимой математики, следует указать справочную книгу [1]. Основные понятия из теории вычислимости, теории моделей и теории (вычислимых) булевых алгебр читатель может найти в [2], [3] и [4] соответственно.

*) Работа первых двух авторов частично поддержана Фондом Марсдена Новой Зеландии.

Имея дело с вычислимой математикой, мы должны отказаться от идеи о том, что изоморфные модели — это по существу одно и то же. Например, в стандартном порядке на натуральных числах отношение следования вычислимо. Однако, существует такой вычислимый линейный порядок типа ω, в котором это отношение вычислимым не будет. С теоретико-вычислительной точки зрения эти две вычислимые копии одной и той же модели существенно различаются. Это обуславливает изучение моделей с точностью до вычислимого изоморфизма и приводит к понятию вычислимого представления (всегда предполагается, что язык вычислим).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Модель $\mathcal{A}$ *вычислима*, если ее носитель $|\mathcal{A}|$ и атомная диаграмма $\langle \mathcal{A}, a \rangle_{a \in |\mathcal{A}|}$ вычислимы (иными словами, носитель, константы, функции и отношения на $\mathcal{A}$ равномерно вычислимы).

Изоморфизм из модели $\mathcal{M}$ в некоторую вычислимую модель называется *вычислимым представлением* $\mathcal{M}$ (в дальнейшем вычислимым представлением будет называться и его образ).

Один из способов, с помощью которого можно надеяться понять разницу между вычислимыми представлениями одной и той же модели, состоит в исследовании образов некоторого отношения на носителе модели в этих представлениях. Изучение отношений на вычислимых моделях началось с работы [5], и оказалось, что это не только удобный способ для нахождения отличий между различными вычислимыми представлениями модели, но и самостоятельная плодотворная область исследований, связанная с другими разделами теории вычислимых моделей, а также ветвями логики и теоретического программирования.

В [5] рассматривались отношения, которые сохраняли некоторую степень эффективности в различных вычислимых представлениях модели.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть U — некоторое отношение на носителе вычислимой модели $\mathcal{A}$, и $\mathfrak{C}$ — некоторый класс отношений. Говорим, что U — *наследственно* $\mathfrak{C}$ на $\mathcal{A}$, если образ U в любом вычислимом представлении $\mathcal{A}$ лежит в $\mathfrak{C}$.

В [5] было получено синтаксическое описание (наследственно в. п.) и наследственно вычислимых отношений при некоторых дополнительных условиях разрешимости (которые в общем случае не могут быть опущены). Впоследствии появилось большое количество работ, использующих этот подход. Например, в [6] дано следующее синтаксическое описание всех наследственно вычислимых отношений на вычислимых линейных порядках.

ТЕОРЕМА 3 [6]. *Пусть R — некоторое вычислимое отношение на носителе вычислимого линейного порядка $\mathfrak{L}$. Тогда R либо определимо бескванторной формулой с константами из $\mathfrak{L}$ (и в этом случае наследственно вычислимо), либо не является наследственно вычислимым.*

Другой подход к изучению отношений на вычислимых моделях — исследование спектра их степеней. Это понятие было впервые в явном виде введено в диссертации [7], хотя изучалось и ранее, начиная по крайней мере с работы [8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть U — некоторое отношение на носителе вычислимой модели $\mathcal{A}$. *Спектр степеней* U на $\mathcal{A}$, $\mathrm{DgSp}_{\mathcal{A}}(U)$ — это совокупность (тьюринговых) степеней образов U во всех вычислимых представлениях $\mathcal{A}$.

В общем случае неизвестно никаких ограничений на множества степеней, которые могут быть реализованы как спектры степеней отношений на вычислимых моделях, за исключением вытекающих из того, что множество всех образов отношения на носителе вычислимой модели в ее различных вычислимых представлениях лежит (по определению) в классе Σ^1_1. Более того, есть много естественных частных случаев, в которых эти ограничения те же, что и в общей ситуации. В [9] показано, что множества степеней, которые могут быть реализованы как спектры степеней отношений на вычислимых моделях, не меняются, если ограничиться рассмотрением моделей, лежащих в одном из следующих классов: симметричные иррефлексивные графы, частичные порядки, решетки, кольца (с делителями нуля), области целостности произвольной характеристики, коммутативные полугруппы, двуступенно нильпотентные группы.

С другой стороны, класс возможных спектров степеней "естественных" отношений оказывается далеко не таким широким. Поэтому очень интересно найти естественные семейства моделей, обладающих более ограниченными классами возможных спектров степеней отношений, чем в общем случае. Исследования в этом направлении не только проясняют теоретико-вычислительную структуру этих классов моделей, но и ведут к лучшему пониманию природы вычислений с ограничениями.

Один особенно интересный "патологический" феномен, который встречается в общем случае, но отсутствует в некоторых частных ситуациях, касается вычислимых отношений, спектр которых конечен, но не одноэлементен. Существование таких отношений показано в [10], но, как кажется, их построение требует сложных теоретико-вычислительных конструкций.

Хиршвельд доказал, что имеет место следующая

ТЕОРЕМА 5 [11]**.** *Пусть R — вычислимое отношение на носителе вычислимой модели $\mathcal{A}$. Если существует Δ^0_2-функция f такая, что $f(\mathcal{A})$ — вычислимая модель, а образ $f(R)$ не вычислим, то* $\mathrm{DgSp}_{\mathcal{A}}(R)$ *бесконечен.*

Сопоставление теоремы 5 с доказательством теоремы 3 позволяет установить, что имеет место следующая

ТЕОРЕМА 6 (Хиршвельд)**.** *Пусть R — вычислимое отношение на носителе некоторого вычислимого линейного порядка. Тогда R либо наследственно вычислимо, либо имеет бесконечный спектр степеней.*

В данной работе доказывается аналог теорем 3 и 6 для случая булевых алгебр. При этом будут использоваться теорема 5 и некоторая модификация теоремы 3, которая приводится ниже.

Предварительно введем некоторые обозначения для работы с конечными частями вычислимой моделей $\mathcal{A}$ сигнатуры L (возможно, бесконечной).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $\mathcal{A}$ — вычислимая модель сигнатуры L, $m \in \omega$. Через L_m обозначим язык, полученный ограничением L до его первых m символов, стандартной заменой всех j-местных функциональных символов на $(j+1)$-местные предикатные и отбрасыванием всех констант, реализация которых в $\mathcal{A}$ не попадает в $[0, m]$. Определим $\mathcal{A} \upharpoonright m$ как конечную модель, полученную из $\mathcal{A}$ сужением носителя до $|\mathcal{A}| \cap [0, m]$ и ограничением языка до L_m.

При доказательстве теоремы 3 использовалась

ТЕОРЕМА 8 [12]**.** *Пусть $\mathcal{A}$ — вычислимая модель, R — k-местное вычислимое отношение на $\mathcal{A}$, f — вычислимая бинарная функция такая, что при каждом $m \in \omega$ найдется набор $\vec{a} \in R$, для которого существует бесконечно много $s \in \omega$ со следующим свойством: найдется вложение $\varphi : \mathcal{A} \upharpoonright s \to \mathcal{A} \upharpoonright f(m, s)$, тождественное на $\mathcal{A} \upharpoonright m$, причем $\varphi(\vec{a}) \notin R$. Тогда R не является наследственно в. п. отношением.*

В первоначальной формулировке теоремы 8 предполагалось, что $\mathcal{A}$ — модель конечного предикатного языка, но ее доказательство годится и в общем случае, если использовать понятие "подмодели" из определения 7. Более того, в этом доказательстве строится такая Δ^0_2-функция g, что $g(\mathcal{A})$ — вычислимая модель, а $g(R)$ не вычислимо. Поэтому из теоремы 5 следует, что отношение, удовлетворяющее условиям теоремы 8, имеет бесконечный спектр степеней. Легко изменить доказательство теоремы 8 так, чтобы получить следующий результат.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть R — k-местное вычислимое отношение на вычислимой модели $\mathcal{A}$, f — вычислимая бинарная функция такая, что при каждом $m \in \omega$ найдется набор $\vec{a} \in |\mathcal{A}|^k$, для которого существует бесконечно много $s \in \omega$ со следующим свойством: найдется вложение $\varphi : \mathcal{A} \upharpoonright s \to \mathcal{A} \upharpoonright f(m, s)$, тождественное на $\mathcal{A} \upharpoonright m$, при котором $R(\varphi(\vec{a})) \neq$ $\neq R(\vec{a})$. Тогда $\mathrm{DgSp}_{\mathcal{A}}(R)$ бесконечен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем только схему. По теореме 5 достаточно построить Δ^0_2-функцию g такую, что $g^{-1}(\mathcal{A})$ — вычислимая модель, а $g^{-1}(R)$ не вычислимо. Для простоты обозначений будем считать, что отношение R одноместно и $|\mathcal{A}| = \omega$.

Цель конструкции — для каждого $e \in \omega$ выполнить требование

$$Q_e : g^{-1}(R) \neq \Phi_e.$$

На шаге 0 полагаем g_0 равным пустому отображению. На шаге $s + 1$ считаем, что g_s определено и продолжаем до g_{s+1}.

Пусть $n = \max(\mathrm{rng}(g_s))$. Для каждого $e \leqslant s$ через m_e обозначается максимум из e, $\{g_s(i) \mid i \leqslant e\}$ и последнего шага, на котором какое-то требование Q_i, $i < e$, действовало (более точно это описывается ниже). Говорим, что $b \in \mathrm{dom}(g_s)$ *может быть использовано для атаки* Q_e, если $\Phi_e(b) \downarrow = R(g_s(b))$ и существует вложение $\varphi : \mathcal{A} \upharpoonright n \to \mathcal{A} \upharpoonright f(m_e, n)$, тождественное на $\mathcal{A} \upharpoonright m_e$ и для которого $R(\varphi \circ g_s(b)) \neq R(g_s(b))$.

Ищем такое наименьшее $e \leqslant s$, что Q_e в данный момент не удовлетворено (определение дано ниже) и существует $a \in \mathrm{dom}(g_s)$, которое может быть использовано для атаки Q_e. Если такого числа нет, то определяем g_{s+1} так, чтобы оно расширяло g_s и выполнялось $g_{s+1}(x) = y$, где x и y — наименьшие числа, не лежащие в $\mathrm{dom}(g_s)$ и $\mathrm{rng}(g_s)$ соответственно. В противном случае полагаем, что φ — описанное выше вложение. Определим g_{s+1} так, чтобы оно расширяло $\varphi \circ g_s$ и выполнялось $g_{s+1}(x) = y$, где x и y — наименьшие числа, не лежащие в $\mathrm{dom}(g_s)$ и $\mathrm{rng}(\varphi \circ g_s)$ соответственно. В этом случае считаем, что Q_e удовлетворено, а все Q_i, $i > e$, не удовлетворены.

Описание конструкции завершено. Прямой проверкой можно убедиться в том, что $g = \lim_s g_s$ является корректно определенной биекцией из ω в ω, $g^{-1}(\mathcal{A})$ — вычислимая модель и все требования Q_e выполнены. Подробнее см. в [12, док-во теор. 1]. $\square$

Следующее достаточное условие бесконечности спектра степеней является простым следствием теоремы 9, но будет более удобно при работе с булевыми алгебрами.

СЛЕДСТВИЕ 10. *Пусть R — вычислимое k-местное отношение на носителе вычислимой модели $\mathcal{A}$, существует Δ^0_2-функция h такая, что для любого $m \in \omega$ найдется пара элементов $\vec{x}_0, \vec{x}_1 \in (\mathcal{A} \upharpoonright h(m))^k$, удовлетворяющих следующим условиям:*

1) $R(\vec{x}_0) \neq R(\vec{x}_1)$;

2) *для всех $s \geqslant h(m)$ существуют вложения $g_i : \mathcal{A} \upharpoonright s \to \mathcal{A}$, $i = 0, 1$, со свойствами*

(a) $g_0(\vec{x}_0) = g_1(\vec{x}_1)$,

(b) $g_0(j) = g_1(j) = j$ *для любого $j \in \mathcal{A} \upharpoonright m$.*

Тогда $\mathrm{DgSp}_{\mathcal{A}}(R)$ *бесконечен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m, s \in \omega$. Ищем $t \in \omega$, для которого либо $h(m)[t] > s$, либо найдутся $\vec{x}_0, \vec{x}_1 \in (\mathcal{A} \upharpoonright h(m))^k$ и вложения $g_i : \mathcal{A} \upharpoonright s \to \mathcal{A} \upharpoonright t$, удовлетворяющие свойству 1 и пп. (a) и (b) свойства 2. Из условия следует, что такое t существует. Положим $f(m, s) = t$.

Зафиксируем $m \in \omega$. В силу условия и поскольку множество пар $\vec{x}_0, \vec{x}_1 \in (\mathcal{A} \upharpoonright h(m))^k$ конечно, найдется пара, для которой при бесконечно многих $s \in \omega$ будут существовать вложения $g_i^s : \mathcal{A} \upharpoonright s \to \mathcal{A} \upharpoonright f(m, s)$, удовлетворяющие свойству 1 и пп. (a) и (b) свойства 2. Для каждого такого s имеем $R(g_i^s(\vec{x}_i)) \neq R(\vec{x}_i)$ при некотором $i = 0, 1$. Следовательно, для некоторого $i = 0, 1$ случай $R(g_i^s(\vec{x}_i)) \neq R(\vec{x}_i)$ будет выполняться при бесконечно многих $s \in \omega$. Если $\vec{a} = \vec{x}_i$, то условия теоремы 9 выполненяются. $\square$

Теперь можно доказать аналог теорем 3 и 6 для случая булевых алгебр.

ТЕОРЕМА 11. *Пусть* R *— вычислимое отношение на носителе вычислимой булевой алгебры* $\mathfrak{B}$. *Тогда* R *либо определимо бескванторной формулой с константами из* $\mathfrak{B}$ *(и в этом случае наследственно вычислимо), либо имеет бесконечный спектр степеней.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что R не определяется бескванторной формулой с константами из $\mathfrak{B}$, и покажем, что оно удовлетворяет условию следствия 10.

Если $m \in \omega$, то пусть $b_0, b_1, \ldots, b_k \in \mathfrak{B}$ таковы, что $b_i \cap b_j = 0_{\mathfrak{B}}$ для $i \neq j$, $b_0 \cup b_1 \cup \cdots \cup b_k = 1_{\mathfrak{B}}$ и подалгебра, порожденная $b_0, b_1, \ldots, b_k$, содержит все элементы $\mathfrak{B} \upharpoonright m$ (здесь используются обозначения из определения 7). Через $\mathfrak{B}_i$ обозначается подалгебра $\mathfrak{B}$, состоящая из всех элементов, которые меньше или равны b_i (в смысле порядка на булевых алгебрах).

Пусть R — $(r+1)$-местное отношение. Если дан набор $\langle x_0, \ldots, x_r \rangle$, то каждый x_i будем представлять себе как элемент $\mathfrak{B}_0 \times \cdots \times \mathfrak{B}_k$ и обозначать его j-ую координату как x_i^j. Говорим, что наборы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ элементов $\mathfrak{B}_j$ *совместны*, если найдется изоморфизм f между подалгебрами $\mathfrak{B}_j$, порожденными этими наборами, со свойством $f(\vec{x}) = \vec{y}$ (иными словами, если бескванторные типы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ совпадают).

Для каждого $F \subseteq [0, k]$ (представляющего предположение о том, какие $\mathfrak{B}_i$ конечны) положим P_F равным множеству всех пар $(\langle x_0, \ldots$ $\ldots, x_r\rangle, \langle y_0, \ldots, y_r\rangle)$ таких, что для каждого $j \leqslant k$ наборы $\left\langle x_0^j, \ldots, x_r^j\right\rangle$ и $\left\langle y_0^j, \ldots, y_r^j\right\rangle$ совместны и, более того, равны при $j \in F$. Пусть S состоит из всех $(\vec{x}, \vec{y})$, для которых найдется $F \subseteq [0, k]$ такое, что $(\vec{x}, \vec{y})$ является наименьшей парой из P_F со свойством $R(\vec{x}) \neq R(\vec{y})$ (в некотором эффективном упорядочении пар наборов длины $r + 1$ из $\mathcal{B}$). Полагаем $h(m) = \max\{\vec{x} \cup \vec{y} \mid (\vec{x}, \vec{y}) \in S\}$.

Ясно, что h является Δ_2^0-функцией, и чтобы показать, что R удовлетворяет условиям следствия 10, осталось для каждого $m \in \omega$ найти наборы $\vec{x}, \vec{y} \in (B \restriction h(m))^{r+1}$, для которых $R(\vec{x}) \neq R(\vec{y})$ и при всех $s \geqslant h(m)$ существуют вложения $g_j : \mathfrak{B} \restriction s \to \mathfrak{B}$, $j = 0, 1$, такие, что $g_0(\vec{x}) = g_1(\vec{y})$ и $g_0(l) = g_1(l) = l$ при любых $l \in \mathfrak{B} \restriction m$.

Зафиксируем $m \in \omega$ и рассмотрим определенные выше P_F, S и $\mathfrak{B}_i$. Пусть F — множество тех i, для которых $\mathfrak{B}_i$ конечна. Докажем, что $P_F \cap S \neq \varnothing$. Предположим противное. Легко показать, что P_F — отношение эквивалентности, которое разбивает $\mathfrak{B}^{r+1}$ на конечное число классов, и что для каждого такого класса найдется бескванторная формула с параметрами, составленными из $b_0, \ldots, b_k$ и элементов конечных $\mathfrak{B}_i$, истинная в точности на элементах этого класса. Предположение о том, что $P_F \cap S = \varnothing$, влечет, что любые два P_F-эквивалентных набора одновременно либо лежат в R, либо не лежат. Следовательно, R определимо бескванторной формулой с указанными выше параметрами; получаем противоречие.

Итак, существует пара $(\langle x_0, \ldots, x_k\rangle, \langle y_0, \ldots, y_k\rangle) \in P_F \cap S$. Пусть $s \geqslant h(m)$ и n такое, что каждый элемент $\mathfrak{B} \restriction s$ представим как элемент $\mathfrak{B}_0 \restriction n \times \cdots \times \mathfrak{B}_k \restriction n$.

Пусть $i \notin F$, т.е. $\mathfrak{B}_i$ бесконечна. Напомним, что $\langle x_0^i, \ldots, x_r^i\rangle$ и $\langle y_0^i, \ldots, y_r^i\rangle$ совместны. Класс всех конечных булевых алгебр обладает свойством амальгамируемости и любая конечная булева алгебра может быть вложена в любую бесконечную. Следовательно, найдутся вложения $f_i^j : \mathfrak{B}_i \restriction n \to \mathfrak{B}_i$, $j = 0, 1$, такие, что $f_i^0(\langle x_0^i, \ldots, x_r^i\rangle) = f_i^1(\langle y_0^i, \ldots, y_r^i\rangle)$.

Для $i \in F$ в качестве $f_i^j : \mathfrak{B}_i \restriction n \to \mathfrak{B}_i \restriction n$ возьмем тождественное вложение. Теперь требуемые функции g_0 и g_1 определим так: $g_j(a_0 \cup \ldots \cdots \cup a_k) = f_0^j(a_0) \cup \cdots \cup f_k^j(a_k)$ при $a_i \in \mathfrak{B}_i \restriction n$. $\Box$

Определенный интерес вызывает вопрос о том, насколько можно ослабить предположение о вычислимости отношения в теоремах 6 и 11.

ВОПРОС 12. Существует ли наследственно арифметическое отношение на булевой алгебре, которое не является наследственно вычислимым, но имеет конечный спектр степеней (мощности, большей 1)? Если это верно, то что будет в случае, когда это отношение наследственно Δ_2^0 или наследственно в. п.?

Для случая линейных порядков некоторый ответ есть. Как указано в [11], существование максимальной d-в.п.-степени, доказанное в [13], может быть использовано для построения наследственно d-в.п.-отношения на носителе Δ_2^0-категоричной модели, которое имеет двухэлементный спектр.

Можно построить подобный пример и в случае линейных порядков, но следует подняться на один скачок выше. В [13] доказано даже большее: существует d-в.п.-степень, которая является максимальной не только среди d-в.п.-степеней, но и среди 3-в.п.-степеней (и даже ω-в.п.). Релятивизуя доказательство из [13], мы получаем, что найдется $\mathbf{0}'$-d-в.п.-степень, являющаяся максимальной среди $\mathbf{0}'$-3-в.п.-степеней, т. е. степень $\mathbf{d}$, которая является d-в.п.-степенью относительно $\mathbf{0}'$ и для которой в интервале $(\mathbf{d}, \mathbf{0}'')$ нет $\mathbf{0}'$-3-в.п.-степеней.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. *Существует отношение U на носителе некоторого вычислимого линейного порядка, которое имеет двухэлементный спектр степеней.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{d}$ — $\mathbf{0}'$-d-в.п.-степень, максимальная среди $\mathbf{0}'$-3-в.п.-степеней, и $D \in \mathbf{d}$ — $\mathbf{0}'$-d-в.п.-множество. Через $\langle \cdot , \cdot \rangle$ обозначается стандартная функция нумерации пар в ω. Определим бинарное отношение R на стандартном представлении линейного порядка ω следующим образом. Полагаем $R(\langle n, i\rangle, \langle n, i+1\rangle)$ истинным для всех $i < 2n \in \omega$. Если $n \in D$, то верно $R(\langle n, 2n\rangle, \langle n, 0\rangle)$, в противном случае выполняются $R(\langle n, 2n\rangle, \langle n, 2n+1\rangle)$ и $R(\langle n, 2n+1\rangle, \langle n, 0\rangle)$. Получаем, что если рассматривать R как направленный граф, то для каждого $n \in D$ в нем есть $(2n+1)$-

цикл, для каждого $n \notin D$ — $(2n+2)$-цикл, и никаких других циклов в нём нет.

Ясно, что R — $\mathbf{0}'$-3-в.п.-множество, и $\deg(R) = \mathbf{d}$. Пусть $\mathcal{L}$ — некоторое вычислимое представление ω. Легко проверить, что между $\mathcal{L}$ и стандартным представлением ω есть Δ^0_2-изоморфизм f. Тогда $R^{\mathcal{L}} = f(R)$ будет $\mathbf{0}'$-3-в.п.-множеством, вычислимым относительно $\mathbf{0}''$. Поскольку D вычислимо в $R^{\mathcal{L}}$, то $\deg(R^{\mathcal{L}}) \in [\mathbf{d}, \mathbf{0}'']$. Поэтому спектр степеней R равен либо $\{\mathbf{d}\}$, либо $\{\mathbf{d}, \mathbf{0}''\}$.

Пусть теперь η — порядковый тип рациональных чисел, а R' — бинарное отношение на $(2+\eta)\cdot\omega$, истинное на x, y тогда и только тогда, когда x и y — соседние элементы. Легко проверить, что спектр степеней R' состоит из всех $\mathbf{0}'$-в. п.-степеней. Поэтому спектр отношения на $(2+\eta)\cdot\omega+\omega$, которое состоит из R' на $(2+\eta)\cdot\omega$ и R на ω, равен

$$\{\mathbf{c} \mid \mathbf{c} = \mathbf{a} \vee \mathbf{b},\ \mathbf{a} \in \mathrm{DgSp}_{\omega}(R),\ \mathbf{b} \in \mathrm{DgSp}_{(2+\eta)\cdot\omega}(R')\}$$

$$= \{\mathbf{c} \mid \mathbf{c} = \mathbf{d} \vee \mathbf{a},\ \mathbf{a} \text{ — } \mathbf{0}'\text{-в.п.}\} = \{\mathbf{d}, \mathbf{0}''\}. \ \square$$

ВОПРОС 14. Верно ли, что спектр степеней любого наследственно Δ^0_2-отношения на линейном порядке всегда одноэлементен или бесконечен? Если нет, то что будет в случае наследственно в. п.-отношения?

Рассуждая о линейных порядках, приведем еще один вопрос — о спектре степеней отношения соседства на таком порядке. Доуни и Мозес доказали в [14] существование вычислимого линейного порядка, для которого это отношение является наследственно полным, т. е. спектр степеней которого равен $\{\mathbf{0}'\}$. Если не считать этого факта, об указанном отношении известно удивительно мало.

ВОПРОС 15. Существует ли линейный порядок, для которого отношение соседства является наследственно неполным? Может ли спектр степеней такого отношения иметь конечную мощность, большую 2? Может ли он состоять из единственной степени, отличной от $\mathbf{0}$ и $\mathbf{0}'$?

В свете теорем 6 и 11 возникает

ВОПРОС 16. Будет ли спекр степеней вычислимого отношения на абелевой группе всегда одноэлементным или бесконечным?

ЛИТЕРАТУРА

1. Handbook of recursive mathematics, Yu. L. Ershov (ed.) et al. (Stud. Logic Found. Math. **138-139**), Amsterdam, Elsevier Science B.V., 1998.
2. *R. I. Soare*, Recursively enumerable sets and degrees (Perspect. Math. Logic), Heidelberg, Springer–Verlag, 1987.
3. *W. Hodges*, Model theory (Encycl. Math. Appl., **42**), Cambridge, Cambridge University Press, 1993.
4. *С. С. Гончаров*, Счетные булевы алгебры и разрешимость (Сибирская школа алгебры и логики), Новосибирск, Научная книга (НИИ МИОО НГУ), 1996.
5. *C. J. Ash*, *A. Nerode*, Intrinsically recursive relations, in: Aspects of effective algebra, J. N. Crossley (ed.), Proc. conf., 1979, Monash Univ., Clayton, Aust., 1981, 26—41.
6. *M. Moses*, Relations intrinsically recursive in linear orders, Z. Math. Logik Grundlagen Math., **32**, N 5 (1986), 467—472.
7. *V. S. Harizanov*, Degree spectrum of a recursive relation on a recursive structure, PhD Thesis, University of Wisconsin, Madison, WI, 1987.
8. *J. B. Remmel*, Recursive isomorphism types of recursive Boolean algebras, J. Symb. Log., **46**, N 3 (1981), 572—594.
9. *D. R. Hirschfeldt, B. Khoussainov, R. A. Shore, A. M. Slinko*, Degree spectra and computable dimension in algebraic structures, Ann. Pure Appl. Logic, **115**, N 1-3 (2002), 71—113.
10. *V. S. Harizanov*, The possible Turing degree of the nonzero member in a two element degree spectrum, Ann. Pure Appl. Logic, **60**, N 1 (1993), 1—30.
11. *D. R. Hirschfeldt*, Degree spectra of relations on computable structures in the presence of Δ_2^0 isomorphisms, J. Symb. Log., **67**, N 2 (2002), 697—720.
12. *M. Moses*, Recursive linear orderings with recursive successivities, Ann. Pure Appl. Logic, **27**, N 3 (1984), 253—264.

13. *S. B. Cooper, L. Harrington, A. H. Lachlan, S. Lempp, R. I. Soare*, The d.r.e. degrees are not dense, Ann. Pure Appl. Logic, **55**, N 2 (1991), 125—151.
14. *R. G. Downey, M. F. Moses*, Recursive linear orders with incomplete successivities, Trans. Am. Math. Soc., **326** (1991), 653—668.

Поступило 21 ноября 2000 г.

Адреса авторов:

ГОНЧАРОВ Сергей Савостьянович,
РОССИЯ,
630090, г. Новосибирск,
пр. Ак. Коптюга, 4,
Институт математики СО РАН.
e-mail: gonchar@math.nsc.ru

HIRSCHFELDT Denis,
Department of Mathematics,
University of Chicago,
U.S.A.
e-mail: drh@math.uchicago.edu

DOWNEY, Rod
School of Mathematical and
Computing Sciences,
Victoria University,
Wellington,
NEW ZEALAND.
e-mail: Rod.Downey@mcs.vuw.ac.nz