В. И. Воротников, К задаче координатной синхронизации динамических систем, *Дифференц. уравнения*, 2004, том 40, номер 1, 15–23

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 1, с. 15–23

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925

К ЗАДАЧЕ КООРДИНАТНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2004 г. В. И. Воротников

В последние годы значительно расширились исследования в рамках восходящей еще к Х. Гюйгенсу [1] и важной для приложений проблемы синхронизации движений [2, 3]. В числе других стала также рассматриваться задача координатной синхронизации динамических систем, которая ставится в достаточно общей математической форме [4–6]. В этом случае должно обеспечиваться асимптотическое совпадение всех или части координат фазового вектора двух (или большего числа) динамических, в том числе и управляемых систем. Интерес к такой задаче значительно возрос после того, как была показана [7] возможность координатной синхронизации не только регулярных, но и хаотических процессов и тесная связь данного явления с проблемой безопасной коммуникации.

В случае синхронизации хаотических процессов совокупная система обладает неустойчивостью по одним переменным и асимптотической устойчивостью по другим переменным (по соответствующим разностям неустойчивых переменных), при этом решения системы ограничены по всем переменным. Соответственно при синхронизации регулярных процессов имеет место асимптотическая устойчивость совокупной системы по одним и возможна устойчивость (неасимптотическая) по другим переменным.

В настоящей работе как само понятие, так и ряд условий частичной асимптотической устойчивости модифицируется таким образом, чтобы охватить задачи координатной синхронизации "в малом" или "в целом" двух динамических систем и использовать для их решения интенсивно развивающуюся теорию частичной (по отношению к заданной части координат фазового вектора) устойчивости [8–25]. В результате получены достаточные условия координатной синхронизации нелинейных, неавтономных управляемых систем в контексте метода функций Ляпунова. Требования к функции Ляпунова существенно ослаблены за счет варьирования области, в которой происходит ее построение (вводится еще одна функция Ляпунова для характеристики этой области): функция не является, вообще говоря, знакоопределенной по части переменных в классическом смысле, а ее производная может быть даже знакопеременной.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ КООРДИНАТНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

Пусть имеем две взаимосвязанные управляемые системы

$$\dot{\boldsymbol{x}}^i = \boldsymbol{X}^i(t, \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, u) \quad (i = 1, 2), \tag{1.1}$$

в которых $\boldsymbol{x}^i = (\boldsymbol{y}^{i\mathrm{т}}, \boldsymbol{z}^{i\mathrm{т}})^{\mathrm{т}}$ (т – знак транспонирования) – фазовые векторы, $\dim(\boldsymbol{y}^1) = \dim(\boldsymbol{y}^2)$; $\boldsymbol{u}$ – вектор управляющих воздействий (управлений).

Задача управляемой координатной синхронизации сводится [2–4] к выбору вектора допустимых управлений

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2) \in K \tag{1.2}$$

(K – класс допустимых управлений) так, чтобы для всех $\boldsymbol{y}^i$-компонент решений $\boldsymbol{x}^i(t) = \boldsymbol{x}^i(t; t_0, \boldsymbol{x}_0^1, \boldsymbol{x}_0^2)$ системы (1.1), (1.2), начинающихся в заданной области начальных значений $\boldsymbol{x}_0^i = \boldsymbol{x}^i(t_0)$, при всех $t \geq t_0$ выполнялось соотношение

$$\|\boldsymbol{y}^1(t; t_0, \boldsymbol{x}_0^1, \boldsymbol{x}_0^2) - \boldsymbol{y}^2(t; t_0, \boldsymbol{x}_0^1, \boldsymbol{x}_0^2)\| \to 0, \quad t \to \infty. \tag{1.3}$$

Возможны модификации указанной задачи. Так, например, требование обеспечения соотношения (1.3) можно заменить более сильным требованием, включающим также и обеспечение близости $\boldsymbol{y}^i$-компонент решений системы (1.1), (1.2) с близкими по величине начальными значениями $\boldsymbol{x}_0^i$, и поставить соответствующую задачу обеспечения асимптотической устойчивости по части переменных.

Рассмотрение таких задач диктуется самим характером исходной проблемы координатной синхронизации. Однако их точная формулировка требует разъяснения и уточнения соответствующих понятий сходимости и асимптотической устойчивости по отношению к части переменных, отвечающих специфике данных задач.

Для этого, вводя обозначения $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^1 - \boldsymbol{y}^2$, $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}^{1\text{т}}, \boldsymbol{x}^{2\text{т}})^\text{т}$, от замкнутой системы (1.1), (1.2) перейдем к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{Y}(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}), \quad \dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{Z}(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}), \tag{1.4}$$

записанной в стандартной для теории частичной устойчивости ($\boldsymbol{y}$-устойчивости) форме [8–25]. Пусть также $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y}^\text{т}, \boldsymbol{z}^\text{т})^\text{т}$.

Класс K включает такие допустимые управления (1.2), что для системы (1.4) выполнены стандартные условия, налагаемые в теории частичной устойчивости [8–25]: предположение о непрерывности системы (1.4) в области ($h > 0$ – достаточно малое число)

$$t \geq 0, \quad \|\boldsymbol{y}\| \leq h, \quad \|\boldsymbol{z}\| < \infty, \tag{1.5}$$

а также о единственности и $\boldsymbol{z}$-продолжимости ее решений.

Какие-либо иные дополнительные ограничения на управления не предполагаются.

Синхронизацию "в малом" можно изучать на основе одного из возможных вариантов понятия частичной асимптотической устойчивости для системы (1.4): асимптотической $\boldsymbol{y}$-устойчивости "в малом" при большом $\boldsymbol{z}_0$ положения $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ [21–23, 26]. Однако при этом данное положение может и не быть решением (положением равновесия) системы (1.4) (см. ниже пример 2.1) и служит для оценки асимптотического поведения траекторий данной системы. Указанное свойство частичной асимптотической устойчивости будет гарантировать близость и синхронизацию всех решений $\boldsymbol{x}^i = \boldsymbol{x}^i(t; t_0, \boldsymbol{x}_0^1, \boldsymbol{x}_0^2)$ системы (1.1), (1.2) с достаточно близкими начальными значениями $\boldsymbol{x}_0^1$ и $\boldsymbol{x}_0^2$ в пределах компакта $\|\boldsymbol{z}_0\| \leq \Delta$, где $\Delta > 0$ – заданное число.

Синхронизацию "в целом" можно изучать в рамках задачи асимптотической $\boldsymbol{y}$-устойчивости в целом положения $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Однако в отличие от обычно рассматриваемых в теории частичной устойчивости задач (помимо глобальной) $\boldsymbol{y}$-сходимости к положению $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ желательно иметь также $\boldsymbol{y}$-устойчивость при большом $\boldsymbol{z}_0$ этого положения.

Уточним соответствующие определения и задачи. Для этого обозначим $\boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)$ решение системы (1.4), удовлетворяющее начальному условию $\boldsymbol{x}(t_0; t_0, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0$.

Определение 1.1. Положение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ системы (1.4) называется:

1) $\boldsymbol{y}$-устойчивым при большом $\boldsymbol{z}_0$ [21–23, 26], если для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ и заданного числа $\Delta > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, t_0, \Delta) > 0$ такое, что из $\|\boldsymbol{y}_0\| < \delta$, $\|\boldsymbol{z}_0\| \leq \Delta < \infty$ следует $\|\boldsymbol{y}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;

2) асимптотически $\boldsymbol{y}$-устойчивым при большом $\boldsymbol{z}_0$, если оно $\boldsymbol{y}$-устойчиво при большом $\boldsymbol{z}_0$ и, кроме того, является $\boldsymbol{y}$-притягивающим при большом $\boldsymbol{z}_0$, т.е.

$$\lim_{t \to \infty} \|\boldsymbol{y}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)\| = 0 \tag{1.6}$$

для всех t_0, $\boldsymbol{x}_0$ из области $S \equiv \{t_0 \geq 0, \ \|\boldsymbol{y}_0\| < \delta, \ \|\boldsymbol{z}_0\| \leq \Delta < \infty\}$;

3) равномерно асимптотически $\boldsymbol{y}$-устойчивым при большом $\boldsymbol{z}_0$, если оно равномерно $\boldsymbol{y}$-устойчиво при большом $\boldsymbol{z}_0$ (δ не зависит от t_0), а соотношение (1.6) выполняется равномерно по t_0, $\boldsymbol{x}_0$ из области S.

Определение 1.2. Положение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ системы (1.4) называется $\boldsymbol{y}$-притягивающим (равномерно) в целом [17], если соотношение (1.6) выполняется при всех t_0, $\boldsymbol{x}_0$ из области $t_0 \geq 0$,

$\|\boldsymbol{x}_0\| < \infty$ (равномерно по $t_0 \geq 0$, $\boldsymbol{x}_0 \in R^*$, где R^* – произвольный компакт пространства $\boldsymbol{x}_0 \in R^n$).

С учетом введенных определений частичной устойчивости положения $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ системы (1.4) дадим строгие формулировки рассматриваемых задач координатной синхронизации.

Задачи управляемой координатной синхронизации. Требуется вектор допустимых управлений (1.2) выбрать так, чтобы положение $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ системы (1.4) было: 1) $\boldsymbol{y}$-притягивающим при большом $\boldsymbol{z}_0$ (задача 1 слабой управляемой координатной синхронизации "в малом"); 2) асимптотически $\boldsymbol{y}$-устойчивым при большом $\boldsymbol{z}_0$ (задача 2 сильной управляемой координатной синхронизации "в малом"); 3) $\boldsymbol{y}$-притягивающим в целом (задача 3 слабой управляемой координатной синхронизации "в целом"); 4) асимптотически $\boldsymbol{y}$-устойчивым при большом $\boldsymbol{z}_0$ и одновременно $\boldsymbol{y}$-притягивающим в целом (задача 4 сильной управляемой координатной синхронизации "в целом").

Постановки задач 1–4 можно усилить требованием равномерности свойства асимптотической $\boldsymbol{y}$-устойчивости при большом $\boldsymbol{z}_0$, а также свойства $\boldsymbol{y}$-притяжения в целом. Ограничимся соответствующей модификацией задачи 2. Требуется вектор управлений (1.2) выбрать так, чтобы положение $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ системы (1.4) было равномерно асимптотически $\boldsymbol{y}$-устойчивым при большом $\boldsymbol{z}_0$ (задача 5 сильной равномерной управляемой координатной синхронизации "в малом").

§ 2. КООРДИНАТНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ "В МАЛОМ"

Для нахождения условий разрешимости задач 1, 2 и 5 в контексте метода функций Ляпунова проведем модификации известных теорем о частичной асимптотической устойчивости и частичной сходимости движений.

Такого рода модификации теорем будут получены применительно к соответствующим задачам частичной устойчивости ($\boldsymbol{y}$-устойчивости) и частичного притяжения ($\boldsymbol{y}$-притяжения) положения $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ системы (1.4). После проведения этой работы условия разрешимости задач 1, 2 и 5 можно сформулировать непосредственно применительно к исходной системе (1.1) в виде обычных для теории частичной стабилизации условий.

2.1. Модификация теорем о частичной устойчивости. Одна из модификаций метода функций Ляпунова применительно к задачам частичной устойчивости предложена в [23, 26–28] и сводится к корректировке структуры области, в которой происходит построение функций Ляпунова.

Применительно к изучаемой задаче суть метода сводится к сужению обычно рассматриваемой при изучении $\boldsymbol{y}$-устойчивости положения $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ системы (1.4) области (1.5). Она заменяется областью

$$t \geq 0, \quad \|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{W}(t, \boldsymbol{x})\| \leq h, \quad \|\boldsymbol{z}\| < \infty, \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{W}(t, \boldsymbol{x})$ – некоторая вектор-функция, а $h > 0$ – достаточно малое число. Естественно, что в данном случае введенное допущение $\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{W}(t, \boldsymbol{x})\| \leq h$ должно подтверждаться в процессе решения задачи.

Целесообразность изучения задачи $\boldsymbol{y}$-устойчивости в области (2.1) объясняется тем, что $\boldsymbol{y}$-устойчивое положение $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ системы (1.4) фактически устойчиво также и по отношению к некоторым функциям $W_i = W_i(t, \boldsymbol{x})$. Поскольку при этом заранее не всегда ясно, какие именно это W_i-функции, то их естественно трактовать как компоненты дополнительной (векторной) $\boldsymbol{W}$-функции Ляпунова для наиболее рациональной замены области (1.5) областью (2.1). В данном случае не требуется анализировать производную $\boldsymbol{W}$-функции вдоль траекторий системы (1.4), что является дополнительным аргументом в пользу указанного подхода.

Такой подход позволяет не только облегчить построение V-функций Ляпунова с подходящими свойствами, но и использовать для доказательства $\boldsymbol{y}$-устойчивости функции, которые уже в случае $\dim(\boldsymbol{y}) = \dim(\boldsymbol{z}) = 1$ могут не быть знакоопределенными ни по $\boldsymbol{y}$ (в смысле В.В. Румянцева [9, 17]), ни по Ляпунову, причем производная $\dot{V}$ функции Ляпунова может быть даже знакопеременной в области (1.5).

Применим указанный подход для решения задачи асимптотической $\boldsymbol{y}$-устойчивости при большом $\boldsymbol{z}_0$ положения $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ системы (1.4).

Для этого рассмотрим два класса функций: 1) скалярные функции $a_i(r)$ $(i = \overline{1,3})$, непрерывные, монотонно возрастающие при $r \in [0, h]$ и такие, что $a_i(0) = 0$; 2) скалярную, непрерывно дифференцируемую в области (1.5) функцию $V(t, \boldsymbol{x})$, $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, и векторные, непрерывные в области (1.5) функции $\boldsymbol{W}(t, \boldsymbol{x}), \boldsymbol{W}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, и $\mathbf{U}(t, \boldsymbol{x}), \mathbf{U}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$.

Условия асимптотической $\boldsymbol{y}$-устойчивости и $\boldsymbol{y}$-притяжения при большом $\boldsymbol{z}_0$ можно получить с помощью теорем типа Марачкова [29, 30].

Теорема 2.1. *Пусть для системы (1.4) существуют скалярная V и две векторные $\mathbf{U}$, $\boldsymbol{W}$ функции такие, что в области (2.1) справедливы условия*

1) $V(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \geq a_1(\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{W}(t, \boldsymbol{x})\|)$;

2) $V(t, \mathbf{0}, \boldsymbol{z}) \equiv 0$;

3) $\dot{V}(t, \boldsymbol{x}) \leq -a_2(\|\mathbf{U}(t, \boldsymbol{x})\|)$; $\|\mathbf{U}(t, \boldsymbol{x})\| \geq a_3(\|\boldsymbol{y}\|)$;

4) для любого $t_0 > 0$ найдется $\delta'(t_0) > 0$ такое, что для каждого значения $\boldsymbol{x}_0$ из области $\|\boldsymbol{x}_0\| < \delta'$ существует постоянная $M(t_0, \boldsymbol{x}_0) > 0$ такая, что для каждой компоненты U_i вектор-функции $\mathbf{U}$ либо $\dot{U}_i \leq M$, либо $\dot{U}_i \geq -M$.

Тогда положение $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ системы (1.4) асимптотически $\boldsymbol{y}$-устойчиво при большом $\boldsymbol{z}_0$, имеет место тождество

$$\boldsymbol{Y}(t, \mathbf{0}, \boldsymbol{z}) \equiv \mathbf{0} \tag{2.2}$$

и система (1.4) допускает "частичное" положение равновесия $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$.

Доказательство теоремы 2.1 разобьем на две части.

I. Покажем, что при выполнении условий теоремы положение $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ системы (1.4) асимптотически $\boldsymbol{y}$-устойчиво при большом $\boldsymbol{z}_0$. Для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ в силу $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$ и условия 2) найдется $\delta(\varepsilon, t_0, \Delta) > 0$ такое, что из $\|\boldsymbol{y}_0\| < \delta$, $\|\boldsymbol{z}_0\| \leq \Delta < \infty$ следует $V(t_0, \boldsymbol{x}_0) < a_1(\varepsilon)$. Поэтому для любого решения $\boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)$ системы (1.4) с $\|\boldsymbol{y}_0\| < \delta$, $\|\boldsymbol{z}_0\| \leq \Delta$ при всех $t \geq t_0$ будем иметь

$$a_1(\|\boldsymbol{y}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)\| + \|\boldsymbol{W}(t, \boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0))\|) \leq V(t, \boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)) \leq V(t_0, \boldsymbol{x}_0) < a_1(\varepsilon).$$

Учитывая свойства функции $a_1(r)$, отсюда выводим, что

$$\|\boldsymbol{y}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)\| + \|\boldsymbol{W}(t, \boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0))\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0,$$

при $\|\boldsymbol{y}_0\| < \delta$, $\|\boldsymbol{z}_0\| \leq \Delta$. Значит, положение $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ системы (1.4) $\boldsymbol{y}$-устойчиво при большом $\boldsymbol{z}_0$.

Покажем, что при $\|\boldsymbol{y}_0\| < \delta^*$ $(\delta^* = \min(\delta, \delta'))$, $\|\boldsymbol{z}_0\| \leq \Delta$ также имеем $\lim\limits_{t\to\infty} \|\mathbf{U}(t, \boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0))\| = 0$. Используя схему работ [17, 28, 29], допустим противное: пусть существуют число $\ell > 0$, значение $\boldsymbol{x}_*$ с $\|\boldsymbol{y}_*\| < \delta^*$, $\|\boldsymbol{z}_*\| \leq \Delta$ и последовательность $t_k \to \infty$, $t_k - t_{k-1} \geq \alpha > 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, для которых

$$\|\mathbf{U}(t_k, \boldsymbol{x}(t_k; t_0, \boldsymbol{x}_*))\| \geq \ell, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.3}$$

Отметим, что при этом допускается, что значения чисел ℓ и α могут меняться в зависимости от t_0, $\boldsymbol{x}_*$.

На основании равенств

$$U_i(t, \boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_*)) = U_i(t_k, \boldsymbol{x}(t_k; t_0, \boldsymbol{x}_*)) + \int\limits_{t_k}^{t} \dot{U}_i(\tau, \boldsymbol{x}(\tau; t_0, \boldsymbol{x}_*))\, d\tau$$

при выполнении условия 4) можно указать число β $(0 < \beta < \alpha)$, которое может меняться в зависимости от t_0, $\boldsymbol{x}_*$, такое, что при $\|\boldsymbol{y}_*\| < \delta^*$, $\|\boldsymbol{z}_*\| \leq \Delta$ и всех $k = 1, 2, 3, \ldots$ имеем

$$\|\mathbf{U}(t, \boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_*))\| \geq \ell/2, \quad t \in T_k = [t_k - \beta,\ t_k + \beta]. \tag{2.4}$$

Тогда при $\|\boldsymbol{y}_*\| < \delta^*$, $\|\boldsymbol{z}_*\| \leq \Delta$ на основании (2.4) и условия 3) вдоль решений $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_*)$ справедливы неравенства $\dot{V}(t, \boldsymbol{x}) \leq -a_2(\|\mathbf{U}\|) \leq -a_2(\ell/2)$, $t \in T_k$. Поэтому

$$0 \leq V(t_k+\beta, \boldsymbol{x}(t_k+\beta; t_0, \boldsymbol{x}_0)) \leq V(t_0, \boldsymbol{x}_0) + \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{t_i-\beta}^{t_i+\beta} \dot{V}(\tau, \boldsymbol{x}(\tau; t_0, \boldsymbol{x}_*))\, d\tau \leq V(t_0, \boldsymbol{x}_0) - 2k\beta a_2(\ell/2),$$

что при достаточно большом k невозможно.

Значит, сделанное предположение (2.3) невозможно. Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} a_3(\|\boldsymbol{y}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)\|) = 0$$

и соотношение (1.6) имеет место при всех $t_0 \geq 0$, $\|\boldsymbol{y}_0\| < \delta^*$, $\|\boldsymbol{z}_0\| \leq \Delta$.

II. Покажем, что при выполнении условий 1) и 3) теоремы 2.1 имеет место условие (2.2). Для этого рассмотрим решение $\boldsymbol{x}(t; t_0, \mathbf{0}, \boldsymbol{z}_0)$ системы (1.4) при произвольных $t_0 \geq 0$ и $\boldsymbol{z}_0$. В силу условия 2) имеем $V(t_0, \mathbf{0}, \boldsymbol{z}_0) \equiv 0$.

На основании равенства

$$V(t, \boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)) = V(t_0, \boldsymbol{x}_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \dot{V}(\tau, \boldsymbol{x}(\tau; t_0, \boldsymbol{x}_0))\, d\tau,$$

а также неравенств $V \geq 0$ и $\dot{V} \leq 0$ заключаем, что $V(t, \boldsymbol{x}(t; t_0, \mathbf{0}, \boldsymbol{z}_0)) \equiv 0$. Отсюда, учитывая условия 1) и 2), выводим тождество

$$\boldsymbol{y}(t; t_0, \mathbf{0}, \boldsymbol{z}_0) \equiv 0. \tag{2.5}$$

Докажем, что тождества (2.2) и (2.5) эквивалентны. Подставим решение $\boldsymbol{x}(t; t_0, \mathbf{0}, \boldsymbol{z}_0)$ в систему (1.4). Учитывая (2.5), а также произвольность $t_0 \geq 0$ и $\boldsymbol{z}_0$, приходим к тождеству (2.2).

Обратно, если имеет место тождество (2.2), то система (1.4) допускает "частичное" положение равновесия $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$. Учитывая предположение о единственности решений системы (1.4), в данном случае имеем тождество (2.5). Теорема доказана.

Замечание 2.1. Если исключить условие 2), то первая часть теоремы 2.1 переходит в соответствующий результат [28], который при $\boldsymbol{W} = \mathbf{0}$ усиливает теорему 22.2 из [17] и опирается на идеи работы [29], восходящие к классической теореме Марачкова [30]. В этой связи подчеркнем, что неравномерность асимптотической $\boldsymbol{y}$-устойчивости характерна для теорем типа Марачкова [14; 17], получающихся из теоремы 2.1 при исключении условия 2) и при $\mathbf{U} = \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{W} = \mathbf{0}$. Заметим также, что при $\boldsymbol{W} \neq \mathbf{0}$ не только V и $\dot{V}$, но и $\|\mathbf{U}\|$ могут не быть знакоопределенными ни по $\boldsymbol{y}$ (в смысле В.В. Румянцева [9, 17]), ни по Ляпунову; $\dot{V}$ может быть даже знакопеременной в области (1.5). Кроме того, условие 4) проверяется в области (2.1), а не в области (1.5), что расширяет возможности использования теоремы 2.1.

Пример 2.1. Пусть система (1.4) состоит из уравнений

$$\dot{y}_1 = ay_1 + by_1^2 z_1, \quad \dot{z}_1 = cy_1 + dz_1 + e, \tag{2.6}$$

где a, b, c, d, e – некоторые постоянные.

Рассмотрим вспомогательные функции $V = [y_1^2 + (y_1 z_1)^2]/2$, $W_1 = y_1 z_1$, $U_1 = y_1$.

При $a < 0$, $a(a+d) - e^2/4 > 0$ и достаточно малом h в области (2.1) выполнены условия: $V(y_1, z_1) \geq (y_1^2 + W_1^2)/2$, $V(0, z_1) \equiv 0$, $\dot{V} \leq ay_1^2 + ey_1 W_1 + (a+d)W_1^2 + (b+c)y_1^2 W_1 + bW_1^3 \leq$ $\leq -\gamma(y_1^2 + W_1^2) \leq -\gamma y_1^2$, $|Y_1| = |ay_1 + by_1^2 z_1| \leq M$, $\gamma = \mathrm{const} > 0$.

На основании теоремы 2.1 положение $y_1 = z_1 = 0$ системы (2.6) асимптотически устойчиво по y_1 при большом z_{10}, хотя это положение не является положением равновесия данной системы; $\dot{V}$ знакопеременна в области (1.5).

Отметим, что для системы (2.6) выполнено условие (2.2), и эта система имеет "частичное" положение равновесия $y_1 = 0$.

Следствие 2.1. *Пусть для системы (1.4) существуют скалярная V и векторная $\mathbf{U}$ функции такие, что*

1) в области (2.1) выполнены условия 3) и 4) теоремы 2.1;

2) для всех решений $\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$ системы (1.4), начинающихся в области S, имеет место соотношение

$$V(t,\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)) \geq -A(t_0,\boldsymbol{x}_0) \quad (A>0). \tag{2.7}$$

Тогда положение $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ системы (1.4) является $\boldsymbol{y}$-притягивающим при большом $\boldsymbol{z}_0$.

Доказательство. Предположим от противного, что имеет место соотношение (2.3). Используя схему доказательства теоремы 2.1, в силу условий 3) и 4) этой теоремы при $t_0 \geq 0$, $\|\boldsymbol{y}_0\| < \delta^*$, $\|\boldsymbol{z}_0\| \leq \Delta$ имеем

$$-A \leq V(t_0,\boldsymbol{x}_0) - 2k\beta a_2(\ell/2), \tag{2.8}$$

что при достаточно большом k невозможно. Следствие доказано.

Условия равномерной асимптотической $\boldsymbol{y}$-устойчивости при большом $\boldsymbol{z}_0$ можно получить, используя метод функций Ляпунова в сочетании с дифференциальными неравенствами [11].

Теорема 2.2. *Пусть для системы (1.4) существуют скалярная V и векторная $\boldsymbol{W}$ функции такие, что в области (2.1)*

1) выполнены условия 1) и 2) теоремы 2.1 и, кроме того, $V(t,\boldsymbol{x}) \leq a_2(\|\boldsymbol{x}\|)$;

2) $\dot{V} \leq \omega(t,V)$, причем нулевое решение $v=0$ системы сравнения $\dot{v}=\omega(t,v)$ равномерно асимптотически устойчиво.

Тогда положение $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ системы (1.4) равномерно асимптотически $\boldsymbol{y}$-устойчиво при большом $\boldsymbol{z}_0$.

Доказательство проводится по схеме [11] с учетом доказательства первой части теоремы 2.1.

2.2. Условия координатной синхронизации "в малом". Сформулируем условия разрешимости задач 1 и 2 (аналогично можно сформулировать условия разрешимости задачи 5) в форме, стандартной для условий разрешимости задач частичной стабилизации в контексте метода функций Ляпунова.

Теорема 2.3. *Пусть найдутся вектор допустимых управлений (1.2), а также скалярная V и векторная $\mathbf{U}$ функции такие, что для системы (1.4) выполнены условия теоремы 2.1 (следствия 2.1). Тогда вектор управлений (1.2) решает задачу 2 (задачу 1).*

§ 3. КООРДИНАТНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ "В ЦЕЛОМ"

В этом параграфе мы считаем, что функции $a_2(r)$, $a_3(r)$, фигурирующие в условиях теоремы 2.1, определены, непрерывны и монотонно возрастают при $r \in [0,\infty)$; функция V непрерывно дифференцируема, а $\mathbf{U}$ непрерывна в области

$$t_0 \geq 0, \quad \|\boldsymbol{x}\| < \infty. \tag{3.1}$$

Справедлива следующая

Теорема 3.1. *Пусть для системы (1.4) существуют скалярная V и векторная $\mathbf{U}$ функции такие, что*

1) в области (3.1) выполнены условия 3) и 4) теоремы 2.1;

2) для всех решений $\boldsymbol{x}(t;t_0,\boldsymbol{x}_0)$ системы (1.4), начинающихся в области (3.1), имеет место соотношение (2.7).

Тогда положение $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ системы (1.4) является $\boldsymbol{y}$-притягивающим в целом.

Доказательство. Предположим от противного, что имеет место соотношение (2.3). Используя схему доказательства теоремы 2.1, при произвольных $\boldsymbol{x}_0$ и $t_0 \geq 0$ в силу условия 2) приходим к противоречивым при достаточно большом k неравенствам (2.8). Значит, соотношение (1.6) имеет место при всех $\boldsymbol{x}_0$ и $t_0 \geq 0$. Теорема доказана.

Замечание 3.1. При $\mathbf{U} = \boldsymbol{y}$ условие 4) теоремы 2.1 переходит в требование ограниченности соответствующих $\boldsymbol{y}$-компоненте вектора $\boldsymbol{x}$ правых частей системы (1.4) при всех $\boldsymbol{x}_0$ и $t_0 \geq 0$.

Условие $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$ в теореме 3.1, вообще говоря, не предполагается (см. пример 3.1). Кроме того, свойство $\boldsymbol{y}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0) \to \mathbf{0}$, $t \to \infty$, не предполагает, вообще говоря, наличия у системы (1.4) ни положения равновесия $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, ни "частичного" положения равновесия $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$.

Комбинируя условия теоремы 3.1 с условиями [21–23, 26] $\boldsymbol{y}$-устойчивости при большом $\boldsymbol{z}_0$, можно получить условия асимптотической $\boldsymbol{y}$-устойчивости при большом $\boldsymbol{z}_0$ и одновременно $\boldsymbol{y}$-притяжения в целом. При этом аналогично условиям теоремы 2.3 можно получить условия разрешимости задач 3, 4.

Пример 3.1. Пусть система (1.4) состоит из уравнений

$$\dot{y}_1 = -y_1 + z_1 + \sin t, \quad \dot{z}_1 = -z_1 - \cos t - \sin t, \tag{3.2}$$

которые не допускают ни положения равновесия $y_1 = z_1 = 0$, ни "частичного" положения равновесия $y_1 = 0$.

Рассмотрим вспомогательные функции $V = y_1^2 + y_1(z_1 + \sin t) + (z_1 + \sin t)^2$, $U_1 = y_1$. Для всех решений системы (3.2) выполнены условия: $V(t, y_1, z_1) \geq 0$, $\dot{V} \leq -2y_1^2 - (z_1 + \sin t)^2 \leq \leq -2y_1^2$, $|Y_1| = |-y_1 + z_1 + \sin t| \leq M$.

На основании теоремы 3.1 положение $y_1 = z_1 = 0$ системы (3.2) является притягивающим по y_1 в целом, при этом V-функция не удовлетворяет условию $V(t, 0, 0) \equiv 0$.

В данном случае притягивающим множеством (аттрактором) системы (3.2) является компактное множество $\{\boldsymbol{x} : \ y_1 = 0, \ -1 \leq z_1 \leq 1\}$.

§ 4. КООРДИНАТНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ (УГЛОВЫХ) ДВИЖЕНИЙ ДВУХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Рассмотрим координатную синхронизацию "в целом" угловых движений двух твердых тел. Уравнения (1.1) в данном случае имеют вид $(i = 1, 2)$

$$A_1 \dot{x}_1^i = (A_2 - A_3) x_2^i x_3^i + u_1^i, \quad A_2 \dot{x}_2^i = (A_3 - A_1) x_1^i x_2^i + u_1^2, \quad A_3 \dot{x}_3^i = (A_1 - A_2) x_1^i x_2^i + u_3^i, \tag{4.1}$$

где A_j, $j = \overline{1, 3}$, – главные центральные моменты инерции тел (одинаковые для обоих тел), x_j^i – проекции вектора мгновенной угловой скорости тел на их главные центральные оси инерции, образующие векторы $\boldsymbol{x}^1$ и $\boldsymbol{x}^2$; u_j^i – управления (проекции управляющего момента на те же оси), приложенные к первому $(i = 1)$ и второму телу $(i = 2)$, образующие векторы $\boldsymbol{u}^1$ и $\boldsymbol{u}^2$.

Требуется найти векторы $\boldsymbol{u}^1$ и $\boldsymbol{u}^2$ так, чтобы для всех движений $\boldsymbol{x}^i(t) = \boldsymbol{x}^i(t; t_0, \boldsymbol{x}_0^i)$ тел (для любых начальных значений $\boldsymbol{x}_0^1$, $\boldsymbol{x}_0^2$) выполнялось предельное соотношение

$$\boldsymbol{x}^1(t) \to \boldsymbol{x}^2(t), \quad t \to \infty. \tag{4.2}$$

Покажем, что решение этой задачи дают простейшие законы управления

$$u_j^1 = \alpha_j (x_j^1 - x_j^2), \quad u_j^2 = \alpha_j (x_j^2 - x_j^1), \quad \alpha_j = \mathrm{const} < 0, \quad j = \overline{1, 3}. \tag{4.3}$$

Для доказательства используем функцию Ляпунова (суммирование по j от 1 до 3)

$$V = \frac{1}{2} \left[\sum A_j (x_j^1 - x_j^2)^2 + \sum A_j (x_j^1 + x_j^2)^2 \right], \tag{4.4}$$

производная $\dot{V}$ которой в силу замкнутой системы (4.1), (4.3) имеет вид $\dot{V} = \sum A_j \alpha_j (x_j^1 - x_j^2)^2$.

Поскольку $V = \{\sum A_j [(x_j^1)^2 + (x_j^2)^2]\}/2$, причем $V \to \infty$ при $\|\boldsymbol{x}^1\| + \|\boldsymbol{x}^2\| \to \infty$, то все решения системы (4.1), (4.3) ограничены [31]. Но тогда, вводя обозначения $y_j = x_j^1 - x_j^2$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}$, нетрудно проверить, что V-функция (4.4) при $\mathbf{U} = \boldsymbol{y}$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1, а это значит, что для системы (4.1), (4.3) выполнено соотношение (4.2).

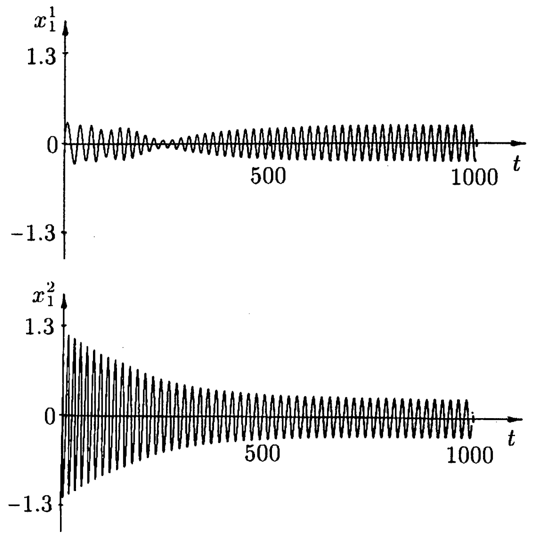

Рисунок. Синхронизация движений двух твердых тел (показаны переменные x_1^1 и x_1^2).

Результаты моделирования замкнутой системы (4.1), (4.3) для случая $A_1 = 4 \times 10^4$, $A_2 = 8 \times 10^4$, $A_3 = 5 \times 10^4$ (кгм^2), $\alpha_1 = -150$, $\alpha_2 = -500$, $\alpha_3 = -150$ (Нмс), $x_{10}^1 = 0.1$, $x_{20}^1 = 0.2$, $x_{30}^1 = 0.3$, $x_{10}^2 = 0.8$, $x_{20}^2 = 0.9$, $x_{30}^3 = 1.0$ (с$^{-1}$) представлены на рисунке, где показана синхронизация по переменным x_1^i.

Отметим, что анализ координатной синхронизации на основе понятия асимптотической устойчивости по отношению к части переменных при больших начальных значениях оставшейся части переменных приводит к достаточно ограничительному условию: условию 2) теоремы 2.1. Однако этого условия не требуется, если анализ координатной синхронизации (задача 1) проводить на основе понятия сходимости по части переменных. Поскольку известно [32], что притяжение не гарантирует асимптотическую устойчивость, то в первом случае, естественно, имеем "более лучшую" с практической точки зрения синхронизацию.

Иной подход к проблеме координатной синхронизации, также основанный на идеях устойчивости динамических систем по отношению к части переменных, предложен ранее в [33].

Автор благодарит В.В. Румянцева за внимание к работе и обсуждение результатов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Министерства образования Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Huijgens C.* Horoloqium Oscilatorium. Paris, 1673.
2. *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем. М., 1971.
3. *Blekhman I.I.* Synchronization in Science and Technology. N.Y., 1988.
4. *Cuomo K., Oppenhaim A., Strogats S.* // Int. J. Bifurc. Chaos. 1993. V. 3. P. 1629–1638.
5. *Blekhman I.I., Landa P.S., Rozemblum M.G.* // Appl. Mech. Rev. P. 1. 1995. V. 48. № 11. P. 733–752.
6. *Nijmeijer H., Blekhman I.I., Fradkov A.L., Pogromsky A.Yu.* // Systems and Control Letters. 1997. V. 31. P. 299–305.
7. *Pecora L.M., Carroll T.L.* // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. № 8. P. 821–824.
8. *Ляпунов А.М.* // Собр. соч. Т. 2. М.; Л., 1956.
9. *Румянцев В.В.* // Вестн. МГУ. Математика, механика, физика, астрономия, химия. 1957. № 4. С. 9–16.
10. *Зубов В.И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л., 1959 (2 изд. М., 1974).
11. *Corduneanu C.* // Rev. Roum. Math. Pure et. Appl. 1964. V. 9. № 3. P. 229–236.
12. *Матросов В.М.* // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. 1965. Т. 1. С. 112–125.
13. *Halanay A.* Differential Equations: Stability, Oscillations, Time Lags. N.Y., 1966.
14. *Peiffer K., Rouche N.* // J. Mec. 1969. V. 8. № 2. P. 323–334.
15. *Risito C.* // Ann. Math. Pura Appl. 1970. V. 84. P. 279–292.
16. *Хапаев М.М.* Усреднение в теории устойчивости. М., 1986.
17. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М., 1987.
18. *Савченко А.Я., Игнатьев А.О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных систем. Киев, 1989.
19. *Hatvani L.* // Alkalm. Mat. Lap. 1990/1991. V. 15. № 1/2. P. 1–90.

20. *Андреев А.С.* // Прикл. математика и механика. 1991. Т. 54. Вып. 4. С. 539–547.
21. *Воротников В.И.* Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М., 1991.
22. *Воротников В.И.* // Автоматика и телемеханика. 1993. № 3. С. 3–62.
23. *Vorotnikov V.I.* Partial Stability and Control. Boston etc., 1998.
24. *Fradkov A.L., Miroshnik I.V., Nikiforov V.O.* Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems. Dordrecht, 1999.
25. *Воротников В.И., Румянцев В.В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М., 2001.
26. *Воротников В.И.* // Докл. РАН. 2002. Т. 384. № 1. С. 47–51.
27. *Воротников В.И.* // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 553–561.
28. *Воротников В.И.* // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 736–745.
29. *Salvadori L.* // Ann. Soc. Scien. Bruxelle. Ser. I. 1974. V. 88. № 2. P. 183–194.
30. *Марачков В.П.* // Изв. физ.-мат. о-ва и НИИ математики и механики при Казанском ун-те. Сер. 3. 1940. Т. 12. С. 171–174.
31. *Yoshizawa T.* Stability Theory by Liapunov's Second Method. Tokyo, 1966.
32. *Hahn W.* Stability of Motion. Berlin etc., 1967.
33. *Wu C.W., Chua L.O.* // Int. J. Bifurc. Chaos. 1994. V. 4. № 4. P. 979–998.

Нижнетагильский технологический институт
Уральского государственного технического университета

Поступила в редакцию
16.11.2000 г.