

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Л. Гуревич, О бифуркации решений одной задачи гидроупругости,  
*Тр. сем. по краев. задачам*, 1978, выпуск 15, 40–43

<https://www.mathnet.ru/kukz289>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.86

13 мая 2025 г., 17:20:24



## О БИФУРКАЦИИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОУПРУГОСТИ

И. Л. ГУРЕВИЧ

Рассматривается течение тяжелой жидкости в плоскости  $z = x + iy$  (ускорение силы тяжести  $g$  направлено противоположно оси  $y$ ), ограниченное сверху бесконечной упругой пластинкой. Показывается, что при некоторых значениях исходных параметров, кроме тривиального решения задачи (равномерного потока), существует решение, соответствующее неравномерному периодическому течению, ограниченному изогнутой пластинкой. Это решение строится в виде ряда по целым или дробным степеням некоторого малого параметра.

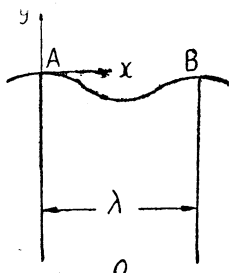


Рис. 1.

На рис. 1 изображена область, занятая одним периодом течения. Скорость при  $y = -\infty$  равна  $V_0$ , длина волны равна  $\lambda$ . Через  $D$  обозначается изгибная жесткость пластинки,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $V$  и  $\theta$  — модуль и аргумент вектора скорости,  $s$  — дуговая абсцисса на пластинке, отсчитываемая от точки  $A$ .

Будем считать, что сила натяжения в точках  $A, B$  равна нулю. Учитывая это, можно написать следующее условие на  $AB$  [1]:

$$\frac{d^3\theta}{ds^3} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^3 = \frac{1}{D} (p - p_0), \quad (1)$$

где  $p_0$  — внешнее давление. Далее, считая, что перерезывающая сила в точках  $A, B$  равна нулю, получим (см. [1]):

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} \Big|_A = \frac{d^2\theta}{ds^2} \Big|_B = 0. \quad (2)$$

Пусть  $\tau - i\theta = \ln(Ve^{-i\theta}/V_0)$ . Отобразим рассматриваемую область течения на единичный круг в плоскости параметрического переменного  $\zeta = re^{i\sigma}$  с разрезом вдоль отрезка, соединяющего точки  $\zeta = 0$  и  $\zeta = 1$ , так что точкам  $B, A$  соответствует  $\zeta = 1$ , а точке  $O - \zeta = 0$ . Легко показать, что при  $|\zeta| = 1$   $ds/d\sigma = -\lambda e^{-\tau}/(2\pi)$ . Используя это равенство, уравнение Бернулли, (1), (2) и условие периодичности  $\theta(A) = \theta(B) = 0$ , придем к следующим соотношениям:

$$u = A_1(u, \tau, \nu, \kappa) + \alpha_1 e^{-\tau},$$

$$A_1 = e^{-\tau} \int_0^\sigma e^{-\tau} d\sigma \int_0^\sigma [A_2(u, \tau, \nu, \kappa) + \alpha_2 e^{-\tau}] d\sigma, \quad (3)$$

$$A_2 = \nu \left[ e^\tau - e^{-\tau} - \kappa \int_0^\sigma e^{-\tau} \sin \left( \int_0^\sigma u d\sigma \right) \right] - \frac{1}{2} u^3 e^{2\tau},$$

$$\alpha_k = - \int_0^{2\pi} A_k d\sigma \left[ \int_0^{2\pi} e^{-\tau} d\sigma \right]^{-1},$$

$$u = \frac{d\theta}{d\sigma}, \quad \nu = \frac{\rho \lambda^3 V_0^2}{16\pi^3 D}, \quad \kappa = \frac{g\lambda}{V_0^2}.$$

Используя формулу Дини

$$\tau(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\eta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\eta \cos n\sigma}{n} d\eta,$$

можно записать (3) в виде одного операторного уравнения:

$$u = A_3(u, \nu, \kappa). \quad (4)$$

Рассмотрим сначала соответствующее линейризованное уравнение, которое имеет вид

$$u(\sigma) = \nu \int_0^{2\pi} K(\eta, \sigma) u(\eta) d\eta, \quad (5)$$

$$K(\eta, \sigma) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\eta \cos n\sigma}{\nu_n}, \quad \nu_n = \left( \frac{2}{n^3} - \frac{\kappa}{n^4} \right)^{-1}.$$

Собственные числа этого уравнения равны  $\nu_n$ , а собственные функции  $u_n = \cos n\sigma$ . Пусть при всех натуральных  $m$

$$\kappa \neq \frac{2m(m^3 - 1)}{m^4 - 1}. \quad (6)$$

Тогда, как нетрудно показать,  $\nu_1$  — простое собственное

число. Следовательно, при выполнении условия (6)  $\nu_1$  является бифуркационным значением параметра  $\nu$  для нелинейного уравнения (4).

Положим  $\nu = \nu_1 + \varepsilon$  и, используя метод Ляпунова—Шмидта [2], будем строить решение уравнения (4) при малых  $|\varepsilon|$ . Заметим, что уравнение вида  $u = A_2(u, \tau, \nu, \kappa) + u^3 e^{2\tau}/2$  совпадает с уравнением капиллярно-гравитационных волн, исследованных Я. И. Секерж-Зеньковичем (см., например, [3]).

Введем обозначения

$$H(\eta, \sigma) = K(\eta, \sigma) - \frac{\cos \eta \cos \sigma}{\pi \nu_1}, \quad \xi = \frac{\nu_1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \cos \sigma d\sigma$$

и перепишем (4) в виде

$$u(\sigma) = \nu_1 \int_0^{2\pi} H(\eta, \sigma) u(\eta) d\eta + \xi \cos \sigma + A_3(u, \tau, \nu, \kappa) - \\ - \nu_1 \int_0^{2\pi} K(\eta, \sigma) u(\eta) d\eta.$$

Используя резольвенту ядра  $\nu_1 H(\eta, \sigma)$ , получим:

$$u = \xi \cos \sigma + A_4 \left( A_3 - \nu_1 \int_0^{2\pi} K u d\eta \right), \quad (7)$$

где

$$A_4(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\eta \cos n\sigma}{\mu_n} f(\eta) d\eta,$$

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_n = 1 - \nu_1/\nu_n \text{ при } n > 1.$$

Будем искать решение уравнения (7) в виде ряда

$$u = \xi \cos \sigma + \sum_{i+k>1} \xi^i \varepsilon^k a_{ik}(\sigma). \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), разлагая полученное выражение по степеням  $\xi$  и  $\varepsilon$  и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим:

$$a_{11} = a_{12} = \cos \sigma, \quad a_{20} = \frac{\kappa}{2 - \kappa} \cos \sigma + C_1 \cos 2\sigma, \quad (9)$$

$$a_{21} = (\kappa - 1) \cos \sigma + C_2 \cos 2\sigma, \quad a_{30} = C_3 \cos \sigma + C_4 \cos 2\sigma + C_5 \cos 3\sigma.$$

Здесь  $C_k(\kappa)$  — известные функции. Учитывая необходимое для положительности  $\nu_1$  неравенство  $\kappa < 2$  и условие (6), можно показать, что все коэффициенты в  $a_{ik}$  конечны.

По формуле

$$L_{ik} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a_{ik} \cos \sigma d\sigma$$

найдем:  $L_{11} = L_{12} = 1$ ,  $L_{20} = \kappa(2 - \kappa)$ ,  $L_{21} = \kappa - 1$ ,  $L_{30} = C_3$ . Уравнение разветвления имеет вид

$$L_{30} \xi^2 + (L_{20} + \varepsilon L_{21} + \dots) \xi + L_{11} \varepsilon + L_{12} \varepsilon^2 + \dots = 0.$$

Будем искать малые решения  $\xi(\varepsilon)$  этого квадратного уравнения.

При любом  $L_{20} \neq 0$  (то есть при  $\kappa \neq 0$ ) будем иметь одно решение при любом  $\varepsilon$ , достаточно малом по модулю. Оно представимо в виде ряда по целым степеням  $\varepsilon$ :

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varepsilon^n, \quad b_1 = -\frac{L_{11}}{L_{20}}, \quad b_2 = \frac{L_{11} L_{20} L_{21} - L_{11}^2 L_{30} - L_{12} L_{20}^3}{L_{20}^3}. \quad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (8), получим:

$$u = \left( \frac{\kappa - 2}{\kappa} \varepsilon + b_2 \varepsilon^2 + \dots \right) \cos \sigma + \left[ \frac{(24 - 13\kappa)(2 - \kappa)}{\kappa(28 - 15\kappa)} \varepsilon^2 + \dots \right] \cdot \cos 2\sigma + \dots$$

При  $L_{20} = 0$  (то есть при  $\kappa = 0$ ) будет два решения при достаточно малых по модулю отрицательных  $\varepsilon$  и не будет решений при  $\varepsilon > 0$ . При  $\varepsilon < 0$  решения представимы в виде ряда по степеням  $(-\varepsilon)^{1/2}$ :

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} d_n (-\varepsilon)^{n/2}, \quad d_1 = \pm \left( \frac{L_{11}}{L_{30}} \right)^{1/2}, \quad d_2 = -\frac{L_{21}}{L_{30}}. \quad (11)$$

Заметим, что при  $\kappa = 0$   $L_{30} > 0$ . Подставляя (9) и (11) в (8), получим:

$$u = [d_1 (-\varepsilon)^{1/2} + d_2 \varepsilon - d_1 (-\varepsilon)^{3/2} + \dots] \cos \sigma + \left( -\frac{6}{7} d^2 \varepsilon + \dots \right) \cos 2\sigma + \dots$$

Сходимость рядов (10), (11) и (8) при достаточно малых  $|\varepsilon|$  следует из общей теории Ляпунова-Шмидта.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев О. М., Рапопорт Э. Ф. О струйном обтекании упругой пластинки. — МЖГ, 1976, № 4.
2. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., „Наука“, 1969.
3. Секерж-Зенькович Я. И. К теории установившихся гравитационно-капиллярных волн конечной амплитуды. — ДАН СССР, 1956, 109.

Доложено на семинаре 9 февраля 1977 г.