Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Н. Ю. Нецветаев, Об одном аналоге индекса Маслова, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1993, том 208, 133–135

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.170
10 февраля 2025 г., 10:06:07

Н.Ю.Нецветаев

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ИНДЕКСА МАСЛОВА

I. Условимся об обозначениях и терминологии. В дальнейшем X – $2n$ -мерное многообразие ($n \geq 2$) с квазикомплексной структурой $J: TX \to TX$, а M – его n-мерное ориентированное (для простоты) подмногообразие (возможно даже, погруженное), вполне вещественное в том смысле, что $J(T_pM) \cap T_pM = 0$, $\forall p \in M$.

ПРИМЕРЫ: (а) M – вещественное алгебраическое многообразие (например, гиперповерхность в $\mathbb{R}P^{n+1}$), а X – множество его комплексных точек.

(б) X – комплексное многообразие с антиголоморфной инволюцией, а M множество её неподвижных точек.

(в) X – келерово многообразие, а M – его лагранжево подмногообразие.

Пусть $\Lambda^+(X) \to X$ – расслоение со слоем $\Lambda^+_n = U(n)/SO(n)$, ассоциированное с касательным расслоением $TX \to X$. (Λ^+_n, очевидно, интерпретируется как множество ориентированных лагранжевых n-плоскостей в $\mathbb{C}^n$, т.е. n-мерных вещественных векторных подпространств $V \subset \mathbb{C}^n$, которые умножением на i переводятся в свое ортогональное дополнение: $iV = V^\perp$. Включение $M \subset X$ допускает естественное поднятие $\tau: M \subset \Lambda^+(X)$, определенное однозначно с точностью до послойной гомотопии.

2. Перейдем к описанию интересующего нас когомологического класса α. Пусть первый класс Чженя $c_1(X)$ делится на неотрицательное целое число $k \neq 1$. Для простоты мы ограничимся случаем, когда $H_1(X; \mathbb{Z}_k) = 0$. Это так, если, например, X односвязно. Тогда, как нетрудно видеть, $H^1(\Lambda^+(X), \mathbb{Z}_k) = \mathbb{Z}_k$, и мы можем рассмотреть образ образующей при гомоморфизме, индуцированном поднятием τ, класс $\alpha = \tau^*(\hat{1}) \in H^1(M, \mathbb{Z}_k)$. Он, очевидно, не меняется при изотопиях и регулярных гомотопиях многообразия M, оставляющих M вполне вещественным.

Например, если $k = 0$, т.е. $c_1(X) = 0$, мы получаем класс $\alpha \in H^1(M; \mathbb{Z})$. В случае, когда $X = \mathbb{C}^n$, а M – лагранжево подмногообразие (т.е. $J(T_pM) = (T_pM)^\perp$, $\forall p \in M$), это половина ставшего уже классическим индекса Маслова, см. [3], [I]. Поэтому естественно было бы при $k \geq 2$ называть значения класса α на замкнутых кривых в M вычетами Маслова. На этом пути можно определить аналоги и других классов Маслова-Арнольда, ср. [7].

3. Задержимся подробнее на случае $k = 0$. Тогда возможно

© Н. Ю. Нецветаев, 1993

ещё одно описание класса α. С одной стороны, сужение $TX/M \cong \cong TM \otimes \mathbb{C}$, и расслоение $(\Lambda^n_{\mathbb{C}} TX)|M \cong (\Lambda^n_{\mathbb{R}} TM) \otimes \mathbb{C}$ тривиально, т.к. M ориентировано. С другой стороны, то, что $c_1(X) = 0$, означает, что $\Lambda^n_{\mathbb{C}} TX$ также есть тривиальное $\mathbb{C}^1$ расслоение, причем тривиализация единственна с точностью до гомотопии, так как $H_1(X; \mathbb{Z}) = 0$. Таким образом, мы получаем две тривиализации на одном и том же $\mathbb{C}^1$ расслоении $(\Lambda^n_{\mathbb{C}} TX)|M$ над M. Они различаются на отображение $M \to \mathbb{C}^*$, гомотопический класс которого в $[M, \mathbb{C}^*] = H^1(M; \mathbb{Z})$ и есть α.

Попутно замечаем, что класс α является характеристическим в категории ориентированных вещественных векторных расслоений, у которых старшая внешняя степень комплексификации тривиальна. Сходное свойство имеет место и для $k \geqslant 2$.

4. В оставшейся части заметки считаем $n = 2$, т.е. M – вполне вещественная поверхность в четырехмерном квазикомплексном многообразии X. Тогда класс α можно определить в более традиционном для четырехмерной топологии стиле (восходящем, по сути дела, еще к работам Понтрягина 1938 г.), и даже не одним способом.

(а) Пусть $S \subset M$ – ориентированная окружность, ограничивающая компактную поверхность $F \to X$. Тогда $\alpha[S]$ равняется modulo k препятствию к продолжению касательного и нормального векторных полей окружности S в M до пары векторных полей на F, линейно независимых над $\mathbb{C}$.

(б) Если в условиях п. (а) поверхность F – гладкая и касается M вдоль S, то $\alpha[S]$ равняется алгебраическому количеству modulo k комплексных точек на F:

$$\alpha[S] = (e_+(F) + h_-(F) - e_-(F) - h_+(F)) \mod k .$$

Здесь $e_\pm$ и $h_\pm$ обозначают количество эллиптических и гиперболических комплексных точек, положительных или отрицательных, в зависимости от знака (см. [9], [10]).

5. Пусть M – замкнутая поверхность. Определение 4(б) позволяет в случае $k = 2$ установить связь между классом α и квадратичными формами Рохлина и Виро

$$q_R, q_V : H_1(M, \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2 .$$

Форма Рохлина [4] определена и в отсутствие квазикомплексной структуры, нужно лишь, чтобы M реализовало класс $w_2(X)$. Форма Виро [2, § 6] определена, если $[M] = 0 \mod 2$. Так как $w_2(X) = c_1(X) \mod 2$, то при $k=2$ и $[M] = 0 \mod 2$ определены обе формы и имеет место соотношение (ср. [2, § 6]):

ТЕОРЕМА. $q_R + q_V + \alpha = 0$.

В случае, когда M – лагранжев тор в $X=\mathbb{C}^2$, соответствующее равенство было независимо замечено Л.В.Полтеровичем.

Отметим еще, что для $k=2$, $X=\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1$ и $k=3$, $X=\mathbb{C}P^2$ класс α был независимо описан и применен Т.Фидлером, ср. [5, 6]. Он приводит два определения, отличающиеся от наших. По крайней мере одно из них, видимо, допускает обобщение на случай произвольного k.

6. Было бы интересно применить класс α для доказательства незеркальности незеркальных квартик в $\mathbb{R}P^3$. Элементарные доказательства для части незеркальных квартик даны Харламовым [8], ср. [2, § 7], и, недавно, С.Подкорытовым (неопубликовано).

7. В заключение пользуюсь возможностью поблагодарить О.Я. Виро, Я.М.Элиашберга, Т.Фидлера и Л.В.Полтеровича за обсуждения.

Литература

1. Арнольд В.И. О характеристическом классе, входящем в условия квантования. – Функцион.анализ и его прил., 1967, 1, № 1, 1-14.
2. Виро О.Я., Успехи в топологии вещественных алгебраических многообразий за последние 6 лет. – УМН, 1986, 41, вып. 3(249), 45-67.
3. Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущений, М. Наука, 1988.
4. Рохлин В.А. Доказательство гипотезы Гудкова. – Функц. анализ и его прил., 1972, 6, № 2, 62-64.
5. Fiedler Th. Totally real embeddings of the torus into $\mathbb{C}^2$. – Ann.Global Anal.Geom. 1987, 5, 117-121.
6. Fiedler Th. A characteristic class for totally real surfaces in the grassmanian of two-planes in four-space. – Ann.Global Anal.Geom. 1986, 4, 121-132.
7. Фукс Д.Б. О характеристических классах Маслова-Арнольда. ДАН СССР, 1968, 178, 303-306.
8. Kharlamov V.M. Nonamphicheiral surfaces of degree 4 in $\mathbb{R}P^3$. – Lecture Notes in Math. 1988, 1346, 349-356.
9. Eliashberg Ya. Filling by holomorphic discs and its applications. – London Math.Soc.Lecture Notes Series, 1990, 151, 45-67.
10. Харламов В.М., Элиашберг Я.М. О числе комплексных точек вещественной поверхности в комплексной. – В кн.: Труды Ленинградской Межд. топологической конф. Л. Наука, 1983, 143-148.