

А.Г. ДРАГАЛИН

ТЕОРЕМЫ О ПОЛНОТЕ И УСТРАНЕНИИ СЕЧЕНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ
ЛОГИКЕ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА. КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ

§ 1. Введение

1.1. Мы интересуемся взаимоотношением между истинностью в модели и выводимостью (как с сечениями, так и без сечений) в теориях высокого порядка, т.е. в теориях с типовой теоретико-множественной структурой, с (вообще говоря, импредикативной) аксиомой свертывания и, возможно, аксиомой экстенциональности. Предлагается специальный вид бужезначной или гейтингозначной семантики для таких теорий, который и используется для доказательства теорем о полноте и устранении сечения.

Основное наше стремление состоит в *конструктивности* используемой метаматематики: в частности, мы не употребляем ни закон исключенного третьего, ни приведение к абсурду, все наши конструкции являются явными. Следует иметь в виду однако, что в случае теорий высокого порядка с непредикативностью теорема об устранении сечения не может быть доказана полностью финитно. Это следует из одного результата Г.Такеути, полученного в 1955 г. (см., напр., обсуждение в [1], часть 5, п.4). Однако и в этой ситуации мы используем минимальные метаматематические средства: конструктивную теорию множеств с импредикативным свертыванием того уровня, что и в изучаемых формальных теориях. В частности, в случае теорий первого порядка (что тоже интересно и дает содержательные новые результаты, см. §7 ниже) наше изложение становится полностью финитным.

Проблема *конструктивного* доказательства устранения сечения и полноты особенно актуальна для конструктивных (= интуиционистских) формальных теорий. Такие теории предназначены для эффективной трактовки логических связей и интересны в информатике, напр., как инструмент извлечения программы из конструктивного доказательства данной спецификации. В этой ситуации (традиционное) неконструктивное доказательство полноты может служить лишь общим указанием возможного успеха данной процедуры поиска вывода, в то время как конструктивное доказательство открывает возможности для точной оценки границ сложности используемых программ. Заметим еще, что логики с непредикативным свертыванием удобно интерпретируются в языках логического программирования, в которых есть переход к метаязыку (напр., во многих версиях языка ПРОЛОГ).

1.2. Обычное определение тождественной истинности $\models A$ формулы имеет вид

$$(\forall M - \text{модель}) (M \models A),$$

где в случае классической логики имеются ввиду обычные двузначные модели, а в случае интуиционистской логики используются модели Бета или Крипке.

Теорема о полноте в такой ситуации имеет вид

$$\models A \Leftrightarrow \vdash A,$$

где обозначение справа означает выводимость в соответствующей логике (возможно, выводимость без сечений).

Доказательство в сторону \Leftarrow конструктивно, непосредственной индукцией по построению вывода $\vdash A$, а вот доказательство \Rightarrow является непрямым и неконструктивным: предпола-

гаем, что неверно $\vdash A$ и "строим" некоторую "контрмодель" с помощью (неконструктивной) процедуры пополнения. Нашей задачей является как раз избежать этого непрямого рассуждения, а наше решение состоит в использовании *булевозначных* (в случае интуиционистской логики – *гейтинговозначных*) моделей вместо обычных двузначных. А именно, явно строится конкретная булевозначная модель M_0 такая, что

$$M_0 \models A \Rightarrow \vdash A,$$

причем выводимость справа можно понимать и как выводимость *без сечений*, что дает и теорему об устранении сечений.

1.3. Основное новшество работы состоит в некотором новом способе построения полных булевых и гейтинговых алгебр, способе, представляющем известный самостоятельный интерес. Работа представляет собой естественный итог (на настоящий момент) долгих усилий ряда авторов, начиная с Е.Бета и, далее, И.Жирар, М.Такахаша, Вим Вельдман, Д.Правитц, получить конструктивные варианты теоремы о полноте и устранении сечения (в случае логик высшего порядка) и, прежде всего, для интуиционистской логики.

В целях удержания объема работы в разумных пределах ограничимся лишь рассмотрением классической логики второго порядка с полным непредикативным свертыванием, хотя результаты могут быть получены и для интуиционистской логики, логик с полной структурой теории типов и с экстенциональностью. Ряд результатов в этом направлении читатель найдет в работах [2], [3], где можно найти и дальнейшие замечания по истории вопроса. Формально данная работа не зависит от [2], [3] (за исключением нескольких технических ссылок), но знакомство с этими работами желательно.

1.4. Специальный интерес представляет наша конструкция, если мы интересуемся лишь полнотой (а не устранением сечения). В этом случае построение M_0 можно осуществить совершенно финитно (см. §7 ниже) даже в случае, когда наша теория есть классическая теория типов с аксиомой бесконечности. Предикат истинности $p \models \forall A$ от аргументов p и A становится арифметическим Π_1^0 предикатом (в случае интуиционистской логики – даже Σ_1^0 -предикатом) несмотря на то, что истинность определяется обычным образом индукцией по построению формулы A , и непосредственная оценка указывает, как обычно, на неарифметичность предиката истинности.

Противоречия с теоремой Тарского о неопределимости предиката истинности или со второй теоремой Гёделя о недоказуемости непротиворечивости не возникает именно в силу особого строения алгебры истинности модели M_0 . Эта алгебра может оказаться и *вырожденной* и состоять из одного элемента. И именно доказательство невырожденности рассматриваемой алгебры и требует всей необходимой неэлементарной метаматематики.

§2. Булевы и гейтинговы алгебры

Приведем в порядке напоминания некоторые элементарные сведения о булевых и гейтинговых алгебрах. Более подробную информацию можно найти в книге Расевой и Сикорского [4]. Следует иметь в виду, что гейтинговы алгебры (алгебры Гейтинга) называются в этой книге *псевдобулевыми* алгебрами, а операция импликации – *псевдодополнением*.

Гейтингова алгебра есть абстрактная алгебра вида

$$\langle N, \sqsubseteq, 1, 0, \wedge, \vee, \Rightarrow, \neg \rangle,$$

где N – множество (носитель алгебры);

\sqsubseteq – (частичное) упорядочение на N , называемое *базисным* или *основным* отношением на N ;

1 – наибольший элемент (*единица*) N ;

0 – наименьший элемент (*нуль*) N ;

$\wedge, \vee, \Rightarrow$ - бинарные операции: соответственно *конъюнкция* (пересечение), *дизъюнкция* (объединение), *импликация*;

\neg - унарная операция, *отрицание* (дополнение).

Все константы и операции алгебры однозначно определяются в терминах частичного порядка E , поэтому мы иногда будем кратко обозначать алгебру Гейтинга как $\langle H, E \rangle$, но, конечно, при изучении алгебраических вопросов важна полная сигнатура алгебры. Например, конъюнкция двух элементов x и y однозначно определяется свойствами:

- 1) $x \wedge y \in x$; $x \wedge y \in y$;
- 2) $z \in x, z \in y \Rightarrow z \in x \wedge y$.

А импликация однозначно задается следующими определяющими свойствами:

- 3) $x \wedge (x \Rightarrow y) \in y$;
- 4) $x \wedge z \in y \Rightarrow z \in (x \Rightarrow y)$.

Алгебра Гейтинга называется *булевой* алгеброй, если выполняется следующее дополнительное соотношение:

$$5) \neg \neg x = x;$$

или же равносильное ему соотношение:

$$6) x \vee \neg x = 1.$$

Известно, что гейтингова алгебра согласована с *интуиционистской* логикой высказываний подобно тому, как булева алгебра согласована с обычной классической логикой высказываний.

Если $Q \subseteq H$, то *пересечением* элементов Q называется элемент $\bigwedge Q \in H$ такой, что:

- 7) $x \in Q \Rightarrow \bigwedge Q \in x$;
- 8) $(\forall x \in Q)(z \in x) \Rightarrow z \in \bigwedge Q$.

Если пересечение $\bigwedge Q$ элементов Q существует, то оно однозначно определяется свойствами 7) и 8).

Аналогично, *объединением* элементов $Q \subseteq H$ называется элемент $\bigvee Q \in H$ такой, что:

- 9) $x \in Q \Rightarrow x \in \bigvee Q$;
- 10) $(\forall x \in Q)(x \in z) \Rightarrow \bigvee Q \in z$.

Гейтингова алгебра называется *полной*, если для любого множества $Q \subseteq H$ существует $\bigwedge Q$ и $\bigvee Q$. Мы рассматриваем полную гейтингову алгебру как абстрактную структуру вида

$$\langle H, E, \emptyset, 1, \wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \bigwedge, \bigvee \rangle,$$

где последние две операции определены на множестве всех подмножеств H .

Полная булева алгебра есть по определению полная гейтингова алгебра, являющаяся булевой алгеброй, т.е. в которой выполняются соотношения 5), 6).

Нас прежде всего будут интересовать полные булевы алгебры, т.к. мы изучаем здесь исчисления с *классической* логикой, однако и в этом рассмотрении гейтингову алгебры играют роль важного технического инструмента.

Заметим, что наши определения не исключают случая $\emptyset = 1$. В этом случае вся алгебра H состоит из одного элемента и называется *вырожденной*. Вопрос о невырожденности алгебры H является часто неэлементарным, но важно, что наши основные результаты *не* зависят от решения этого вопроса.

§3. Построение полных булевых и гейтинговых алгебр

Рассмотрим некоторую общую алгебраическую конструкцию для построения полных алгебр. Мы ограничимся здесь только необходимым минимумом сведений. Дальнейшую информацию можно

получить в [2],[3]. Следует иметь в виду, что здесь мы используем (более удобные) двойственные обозначения для отношения \leq . А именно, вместо $p \leq q$ в [2] и [3] используется $q \leq p$.

Пусть дано частично упорядоченное множество (T, \leq) . Это означает, что отношение \leq на множестве T удовлетворяет условиям:

- a) $p \leq p$;
- b) $p \leq q, q \leq r \Rightarrow p \leq r$;
- c) $p \leq q, q \leq p \Rightarrow p = q$.

Подмножество $x \subseteq T$ назовем (порядково) открытым на T , если для всех $p, q \in T$ имеем $p \leq x, q \leq p \Rightarrow q \in x$. Семейство всех порядково открытых подмножеств T обозначим через O .

Из всякого подмножества $x \subseteq T$ можно изготовить его минимальное расширение, являющееся уже порядково открытым, а именно,

$$i(x) = \{p \in T \mid (\exists q \in x)(p \leq q)\}.$$

Для $x \subseteq T$, очевидно, справедливо:

- 1) $x \subseteq i(x), i(x) \in O$;
- 2) $x \subseteq a, a \in O \Rightarrow i(x) \subseteq a$;
- 3) $x \in O \Leftrightarrow i(x) = x$.

Если $x, y \in T$, то мы определим открытую импликацию x и y следующим образом:

$$(x \supset^{\circ} y) = \{p \in T \mid (\forall q \leq p)(q \in x \Rightarrow q \in y)\}.$$

Очевидно, всегда $(x \supset^{\circ} y) \in O$.

Значение семейства O для логики определяется следующим фактом, использованным (неявно) С.Крипке в его теории интуиционистских моделей.

3.1. ФАКТ. Структура (O, \subseteq) является полной гейтинговой алгеброй. Операции в ней вычисляются следующим образом:

$$1 = T, \quad 0 = \emptyset, \quad a \wedge b = a \cap b, \quad a \vee b = a \cup b, \quad (a \Rightarrow b) = (a \supset^{\circ} b), \quad \neg a = (a \supset^{\circ} \emptyset).$$

Если $Q \subseteq O$ есть семейство открытых подмножеств, то

$$\bigwedge Q = \bigcap Q = \{p \in T \mid (\forall a \in Q)(p \in a)\},$$

$$\bigvee Q = \bigcup Q = \{p \in T \mid (\exists a \in Q)(p \in a)\}.$$

3.2. Однако для нас будет существенна несколько более сложная дальнейшая конструкция. Отношением пополнения на (T, \leq) назовем отношение типа $J(d, p)$, где $d \subseteq T$ и $p \in T$, такое, что выполняется условие $J(d, p), q \in d \Rightarrow q \leq p$.

Структура пополнения (T, \leq, J) позволяет определить семейство \mathcal{C} полных подмножеств T . А именно, подмножество $x \subseteq T$ называется полным (относительно отношения J), если

$$(\forall d \subseteq T)(\forall p \in T)(J(d, p), d \subseteq x \Rightarrow p \in x).$$

С помощью семейства \mathcal{C} полных подмножеств можно естественно определить операцию пополнения произвольного подмножества T . Если $x \subseteq T$, то $Dx = \bigcap \{b \in \mathcal{C} \mid x \subseteq b\}$.

Нетрудно проверить, что D обладает свойствами оператора замыкания, напр., такими:

- (i) $x \subseteq Dx, Dx \in \mathcal{C}$;
- (ii) $x \subseteq b, b \in \mathcal{C} \Rightarrow Dx \subseteq b$;
- (iii) $D Dx = Dx$;
- (iv) $x \in \mathcal{C} \Leftrightarrow Dx = x$;
- (v) $x \subseteq y \Rightarrow Dx \subseteq Dy$.

Кроме того, из определяющего условия на отношение J вытекает следующее соотношение:

$$(vi) \quad a \in O, x \subseteq T \Rightarrow a \cap Dx \subseteq D(a \cap x).$$

Для доказательства последнего соотношения рассмотрим множество

$$c = \{p \in T \mid p \in a \Rightarrow p \in D(a \cap x)\}$$

и проверим последовательно: $c \in \mathcal{C}$, $x \subseteq c$, $Dx \subseteq c$, $a \cap Dx \subseteq D(a \cap x)$.

3.3. Структуру пополнения (T, \leq, J) назовем *упорядоченной*, если выполняется следующее условие:

$$p \leq q, J(d, q) \Rightarrow \exists e (J(e, p), e \leq i(d)).$$

Если (T, \leq, J) – упорядоченная структура пополнения, то имеют место дальнейшие полезные соотношения:

- (i) $a \in O \Rightarrow Da \in O$;
- (ii) $a \in O, b \in \mathcal{C} \Rightarrow (a \supset b) \in \mathcal{C}$;
- (iii) $a, b \in O \Rightarrow Da \cap Db = D(a \cap b)$;
- (iv) $a \in O, b \in \mathcal{C} \Rightarrow (a \supset b) = (Da \supset b)$.

Основное значение упорядоченных структур для нас определяет следующий

ФАКТ. Пусть (T, \leq, J) есть упорядоченная структура пополнения. Тогда структура $(\mathcal{C} \cap O, \subseteq)$ есть полная алгебра Гейтинга. Операции в этой алгебре вычисляются следующим образом:

$$1 = T, \quad 0 = D\emptyset, \quad a \wedge b = a \cap b, \quad a \vee b = a \cup b, \quad (a \Rightarrow b) = (a \supset b), \quad \neg a = (a \supset D\emptyset).$$

Если $Q \subseteq \mathcal{C} \cap O$, т.е. Q является семейством подмножеств, одновременно открытых и полных, то

$$\bigwedge Q = \bigcap Q, \quad \bigvee Q = D(\bigcup Q).$$

3.4. Пусть дана структура пополнения (T, \leq, J) и $v \in T$. Определим новую структуру пополнения J_v по правилу

$$J_v(d, p) \Leftrightarrow J(d, p) \vee (p \in v \wedge d = \emptyset).$$

Будем обозначать через \mathcal{C}_v , D_v и т.п. соответствующие понятия, относящиеся к отношению J_v . Имеем:

- (i) $x \in \mathcal{C}_v \Leftrightarrow x \in \mathcal{C} \wedge (v \subseteq x)$;
- (ii) $D_v(x) = D(x \cup v) = D(x \cup D_v)$.

ФАКТ. Если J – упорядоченное отношение пополнения и $v \in O$, то J_v – также упорядоченное отношение пополнения, и, следовательно, $(\mathcal{C}_v \cap O, \subseteq)$ есть полная гейтингова алгебра. Операции этой алгебры особенно просто вычисляются, когда $v \in \mathcal{C} \cap O$. В этом последнем случае имеем

$$1_v = 1 = T, \quad 0_v = D_v \emptyset = D_v v, \quad a \wedge_v b = a \cap b, \quad a \vee_v b = D_v(a \cup b) = D(a \cup b), \\ (a \Rightarrow_v b) = (a \supset v), \quad \neg_v a = (a \supset v), \quad \bigwedge_v Q = \bigcap Q, \quad \bigvee_v Q = D_v(\bigcup Q) = D(\bigcup Q).$$

3.5. В этой статье нас будет интересовать прежде всего классическая логика, и, следовательно, не столько гейтинговы, сколько булевы алгебры. Имеется стандартный прием (так называемая конструкция двойного отрицания, восходящая к Колмогорову и Гёделю), позволяющий изготовить булеву алгебру из данной гейтинговой алгебры.

В нашем случае этот прием выглядит следующим образом.

ФАКТ. Пусть (T, \leq, J) есть упорядоченная структура пополнения и $v \in \mathcal{C} \cap O$. образуем семейство так называемых стабильных подмножеств множества T :

$$\mathcal{N} = \{a \in O \mid a = ((a \supset v) \supset v)\}.$$

Тогда $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{E} \cap \mathcal{O}$ (и даже $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_y \cap \mathcal{O}$) и, кроме того, структура (\mathcal{N}, \subseteq) есть полная булева алгебра.

Операции в этой алгебре вычисляются следующим образом:

$$1 = T, \quad 0 = v, \quad a \wedge b = a \cap b, \quad a \vee b = ((a \supset v) \cap (b \supset v)) \supset v, \quad (a \Rightarrow b) = (a \supset b), \quad \neg a = (a \supset v).$$

Если $Q \subseteq \mathcal{N}$, то

$$\bigwedge Q = \bigcap Q, \quad \bigvee Q = (\bigcap \{(a \supset v) \mid a \in Q\}) \supset v.$$

Заметим, что \mathcal{N} есть подмножество, но не подалгебра $\mathcal{E} \cap \mathcal{O}$, операция объединения вычисляется в \mathcal{N} особым образом.

Отметим еще следующие соотношения, касающиеся \mathcal{N} :

- (i) $v \in \mathcal{N}$;
- (ii) $a \in \mathcal{O}, b \in \mathcal{N} \Rightarrow (a \supset b) \in \mathcal{N}$;
- (iii) $a \in \mathcal{N} \Rightarrow v \subseteq a$;
- (iv) $a \in \mathcal{O} \Rightarrow a \subseteq (a \supset v) \supset v$.

Мы не будем здесь заниматься доказательством фактов из пп. 3.3–3.5 и сошлемся на [2] и [3].

3.6. В теории доказательств наибольший интерес представляет частичное упорядочение (T, \leq) , являющееся древовидной структурой. Так, вывод в исчислении изображается конечно ветвящимся деревом. В интересах обеспечения конструктивности метаматематики дадим аккурратные определения упорядочений нужного нам вида вместе с минимумом необходимых сведений.

Пусть Σ есть произвольное множество. Структура кортежей (над Σ) есть структура вида $\langle \Sigma^*, \partial, [] \rangle$, где Σ^* есть множество (называемое множеством кортежей, образованных из Σ), ∂ есть отображение $\partial: \Sigma^* \rightarrow \omega$ множества Σ^* в множество ω всех натуральных чисел (если $p \in \Sigma^*$, то ∂p называется длиной кортежа p), $[]$ есть функция двух аргументов, а именно, для всякого $p \in \Sigma^*$ и натурального $i < \partial p$ определено значение $[p]_i \in \Sigma$ (элемент $[p]_i$ называется i -м членом кортежа p). При этом должны выполняться следующие три условия:

- 1) $(\exists p \in \Sigma^*)(\partial p = 0)$;
- 2) $(\forall \varepsilon \in \Sigma)(\forall p \in \Sigma^*)(\exists q \in \Sigma^*)$
 $(\partial q = \partial p + 1 \wedge [q]_{\partial p} = \varepsilon \wedge (\forall i < \partial p)([p]_i = [q]_i))$;
- 3) $(\forall p, q \in \Sigma^*)(p = q \Leftrightarrow (\partial p = \partial q \wedge (\forall i < \partial p)([p]_i = [q]_i)))$.

Суть этих условий состоит в том, что для каждой конечной последовательности $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}$ элементов Σ существует, и притом лишь один, элемент $p \in \Sigma^*$ такой, что

$$\partial p = n \wedge (\forall i < n)([p]_i = \varepsilon_i).$$

Обозначим этот элемент через $\langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1} \rangle$.

С другой стороны, каждый элемент $p \in \Sigma^*$ однозначно представим в виде $p = \langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1} \rangle$, где $\partial p = n$ и $\varepsilon_i = [p]_i$ для $i = 0, \dots, n-1$. В частности, существует, и только один, пустой кортеж $\lambda \in \Sigma^*$ такой, что $\partial \lambda = 0$. Кроме того, для всяких двух кортежей $p = \langle \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1} \rangle$ и $q = \langle \delta_0, \dots, \delta_{m-1} \rangle$ однозначно определена их конкатенация:

$$p * q = \langle \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}, \delta_0, \dots, \delta_{m-1} \rangle.$$

Основное отношение \leq на структуре кортежей Σ^* определяется следующим образом:

$$p \leq q \Leftrightarrow (\exists r \in \Sigma^*)(q * r = p).$$

Отношение \leq и определяет древовидное частичное упорядочение Σ^* с корнем Λ , который в наших обозначениях является *наибольшим* элементом Σ^* . Более длинным кортежам в этом упорядочении соответствуют *меньшие* элементы. Заметим, что в [2], [3] используются двойственные обозначения, и там Λ — наименьший элемент Σ^* .

Можно определить и *строгое отношение* упорядочения:

$$p < q \Leftrightarrow (p \leq q) \wedge \neg (q \leq p).$$

Существенно, что $p < q$ эквивалентно безотрицательному утверждению:

$$p < q \Leftrightarrow (\exists r \in \Sigma^*) (\partial r > 0 \wedge q * r = p).$$

(Это существенно с конструктивной точки зрения. В самом деле, если $p < q$, то $p \leq q$ и, значит, существует $r \in \Sigma^*$, $q * r = p$. Рассмотрим ∂r . Это натуральное число и, следовательно, $\partial r = 0 \vee \partial r > 0$ *конструктивно*. Но $\partial r = 0$ невозможно, иначе было бы $q = p$ и, значит, $q \leq p$. Следовательно, $\partial r > 0$. Аналогично, для структуры кортежей имеем соотношение

$$p \leq q \Leftrightarrow (p < q) \vee (p = q),$$

которое невозможно установить конструктивно для произвольного частичного порядка.)

В структуре кортежей естественно определяется и отношение *одношагового упорядочения*:

$$p < \circ q \Leftrightarrow (\exists r \in \Sigma^*) (\partial r = 1, q * r = p).$$

Ярус элемента $q \in \Sigma^*$ есть по определению множество

$$t(q) = \{p \in \Sigma^* \mid p < \circ q\}.$$

В теории рекурсивных функций хорошо известны два типичных примера структуры кортежей. Это примитивно-рекурсивная нумерация ω^* кортежей натуральных чисел натуральными же числами. В этом случае в качестве Σ фигурирует множество ω натуральных чисел, в качестве Σ^* также используется множество ω . Далее, если через F обозначить множество всех одноместных (всюду определенных) функций $f: \omega \rightarrow \omega$, то можно рассмотреть примитивно-рекурсивную нумерацию F^* кортежей функций функциями же. В этом случае в качестве F^* используется само множество F . Более подробное описание этих нумераций можно найти в любом руководстве по теории рекурсивных функций (см., напр., [1], часть 2, пп. 1, 2; часть 4, п.1). Не менее часто используется и нумерация $\{0,1\}^*$ *бинарных* кортежей, составленных из 0 и 1. Мы будем рассматривать $\{0,1\}^*$ как подмножество ω^* .

3.7. Пусть $\langle \Sigma^*, \partial, [] \rangle$ есть структура кортежей над произвольным множеством Σ и $T \subseteq \Sigma^*$ — подмножество кортежей. В этом случае (T, \leq) может быть снабжено *естественным* отношением пополнения:

$$J(d, p) \Leftrightarrow d = T \cap t(p).$$

Подмножество $T \subseteq \Sigma^*$ назовем *гомогенным*, если

$$(\forall p, q \in T) (\forall r \in \Sigma^*) (p \leq r \leq q \Rightarrow r \in T).$$

Например, $\{0,1\}^*$ есть гомогенное подмножество ω^* .

ФАКТ. Если $T \subseteq \Sigma^*$ есть гомогенное множество, то естественное отношение J есть упорядоченное отношение пополнения, и, значит, структура (T, \leq, J) порождает полную гейттингову алгебру $(\mathcal{C} \cap O, \subseteq)$ и соответственно полную булеву алгебру (\mathcal{N}, \subseteq) .

3.8. **ЗАМЕЧАНИЕ.** Рассмотрим отношение $p \in \mathbb{D}x$ как двуместный предикат с аргументами $p \in T$ и $x \subseteq T$. В соответствии с определением операции \mathbb{D}

$$p \in \mathbb{D}x \Leftrightarrow (\forall b \subseteq T) (x \subseteq b, b \in \mathcal{C} \Rightarrow p \in b),$$

т.е. в определении фигурирует *аналитический* квантор общности по подмножествам множества T . Существенно, что в весьма важном случае конечно ветвящегося T этот аналитический квантор может быть заменен более элементарным квантором существования.

Наметим кратко соответствующую конструкцию.

Множество $T \subseteq \Sigma^*$ назовем *конечно ветвящимся*, если множество $t(p) \cap T$ конечно для всякого $p \in T$. (Для читателя, следящего за конструктивностью наших метаматематических рассуждений, заметим, что мы используем следующее определение конечного множества: множество x конечно, если существует натуральное m и биекция множества x на множество $\{0, 1, \dots, m-1\}$. С конструктивной точки зрения возможно несколько естественных, но неэквивалентных версий определения конечности множества). Например, $\{0, 1\}^*$ есть конечно ветвящееся множество, $\{0, 1\}^* \subseteq \omega^*$.

Конечным фрагментом структуры ω^* назовем конечное множество $f \subseteq \omega^*$ такое, что:

- 1) $\Lambda \in f$;
- 2) $p * \langle m+1 \rangle \in f \Rightarrow p * \langle m \rangle \in f$;
- 3) $p * \langle m \rangle \in f \Rightarrow p \in f$.

Наглядно говоря, конечный фрагмент есть конечное поддерево ω^* , некоторым каноническим образом расположенное в множестве ω^* .

Конечным выводом множества $T \subseteq \Sigma^*$ называется биекция π в множество T такая, что:

(i) область определения $\text{dom} \pi$ этой биекции есть конечный фрагмент структуры кортежей ω^* ;

(ii) π сохраняет отношение $\langle \circ$, т.е. для всех $m, n \in \text{dom} \pi$

$$m \langle \circ n \Leftrightarrow \pi(m) \langle \circ \pi(n);$$

(iii) π сохраняет ярус в T , т.е. если $m, n \in \text{dom} \pi$ и $m \langle \circ n$, то

$$t(\pi(n)) \cap T = \{\pi(k) \mid k \in \text{dom} \pi, k \langle \circ n\}.$$

Если $\pi(\Lambda) = p$, то вывод π называется выводом для элемента p . Если $p = \pi(m)$ и для всякого $n \in \text{dom}(\pi)$ имеем $\neg(n \langle \circ m)$, то p называется *листом* вывода π . Говорим, что вывод π есть вывод из множества $x \subseteq T$, если всякий лист вывода π принадлежит x .

Теперь мы готовы сформулировать основной факт этого пункта.

ФАКТ. Если T есть конечно ветвящееся подмножество, $T \subseteq \Sigma^*$, то для $p \in T$ и $x \subseteq T$ имеем: $p \in \mathbb{D}x \Leftrightarrow$ существует конечный вывод π из множества x для элемента p .

Особенно просто обстоит дело, если Σ^* есть ω^* . Тогда конечный вывод π представляет собой наследственно конечный объект, который естественно может быть сам занумерован натуральным числом. В этом случае квантор существования по выводам становится *арифметическим* и предикат $p \in \mathbb{D}x$ оказывается арифметическим Σ_1^0 -предикатом (а не просто аналитическим Π_1^1 -предикатом, как это вытекает из непосредственной оценки).

§4. Распределение формул и его модельное расширение

4.1. Зафиксируем язык L_2 логики предикатов второго порядка. Этот язык содержит три типа переменных; обозначим эти типы соответственно через 0, 1 и 2. Интуитивно, переменные типа 0 — это обычные объектные переменные (переменные для объектов логики первого порядка). Переменные типа 1 предназначены для *утверждений* (замкнутых высказываний) языка, и, наконец, переменные типа 2 предназначены для *подмножества* множества всех объектов типа 0.

Язык содержит, вообще говоря, константы и функциональные символы логики первого порядка, но не содержит выделенного равенства (равенство может фигурировать в L_2 в ка-

честве рядового двуместного предикатного символа). Удобно считать, что L_2 содержит логическую константу \perp , означающую "ложь".

Через $\text{Var}(\tau)$ обозначим бесконечное множество переменных типа τ , где τ есть 0, 1 или 2. Дадим индуктивное определение множества $\text{Exp}(\tau)$ выражений типа τ .

1) Если $x \in \text{Var}(\tau)$, то $x \in \text{Exp}(\tau)$.

2) Термы, составленные обычным образом из переменных типа 0, констант и функциональных символов, суть элементы $\text{Exp}(0)$.

3) Если $t_1, \dots, t_n \in \text{Exp}(0)$ и P есть n -местный предикатный символ, то $P(t_1, \dots, t_n) \in \text{Exp}(1)$; выражения этого типа назовем *атомами*.

4) Если $A, B \in \text{Exp}(1)$ и $x \in \text{Var}(\tau)$, то их обычная комбинация, построенная с помощью логических связок и кванторов: \wedge (конъюнкция), \vee (дизъюнкция), \supset (импликация), \perp (ложь), \neg (отрицание), \forall (всеобщность), \exists (существование), есть элемент $\text{Exp}(1)$; таким образом, квантификация допускается по всем типам.

5) Если $A \in \text{Exp}(1)$ и $x \in \text{Var}(0)$, то $\{x|A\}$ есть по определению элемент множества $\text{Exp}(2)$; выражения этого типа называются *абстрактами*.

6) Если $t \in \text{Exp}(0)$ и $r \in \text{Exp}(2)$, то выражение $(t \varepsilon r)$ есть элемент $\text{Exp}(1)$.

Элементы $\text{Exp}(1)$ назовем *формулами* (языка L_2), а элементы $\text{Exp}(0)$ — *термами* (первого порядка). Язык L_1 первого порядка рассматриваем как фрагмент L_2 , в котором отсутствуют выражения $\text{Exp}(2)$ и $\text{Var}(1)$.

Фактически, излагаемые результаты обобщаются на языки со многими сортами переменных, с выделенным равенством, с полной типовой структурой (а не только второго порядка) и, наконец, с теоретико-множественной экстенциональностью, но мы не будем здесь этим заниматься (в этом направлении см. [2], [3] и [5]).

Через $A(x||t)$ или просто через $A(t)$ обозначим, как обычно, *допустимую* подстановку выражения t , $t \in \text{Exp}(\tau)$, вместо свободных вхождений переменной $x \in \text{Var}(\tau)$ в A (т.е. с необходимым переименованием связанных переменных A во избежание коллизии переменных). *Исчисление предикатов второго порядка* PC_2 в языке L_2 есть обычная классическая логика предикатов (с кванторами по всем типам) плюс следующая *схема аксиом свертывания*:

$$t \varepsilon \{x|A\} \equiv A(x||t),$$

где $t \in \text{Exp}(0)$, $x \in \text{Var}(0)$, $A \in \text{Exp}(1)$. (Здесь $A \equiv B$ есть, как обычно, сокращение для $(A \supset B) \wedge (B \supset A)$.)

Очень существенно, что A здесь — произвольная формула, может быть содержащая кванторы типа 2. В этом и состоит *непредикативность* аксиомы свертывания в PC_2 — источник основных философских и математических затруднений.

4.2. Пусть теперь на множестве (T, \leq) дана упорядоченная структура пополнения J и элемент $\nu \in \mathcal{U} \cap O$. *Распределением формул* на T назовем пару функций (L, R) . Каждая из функций определена на множестве всех формул языка L_2 и для всякой формулы A значения $L(A)$, $R(A)$ суть порядково открытые подмножества T , т.е. $L(A)$, $R(A) \in O$.

Интуитивно, (L, R) можно рассматривать как некоторую "заготовку" для будущей булевозначной модели, причем $L(A)$ изображает ту область, где формула A будет "безусловно истинной", в то время как $R(A)$ изображает соответственно область "безусловной ложности" формулы A . Множество ν изображает нуль будущей алгебры, так что в области ν все утверждения истинны (и ложны). Разумеется, не всякое распределение формул можно разумным образом достроить до модели: необходима определенная логическая согласованность между областями истинности различных формул. Дадим точное определение этой согласованности.

Распределение (L, R) формул на (T, \leq, J, ν) назовем *систематическим*, если выполняются следующие условия:

- 1) $L(\perp) \subseteq v, L(A) \cap R(A) \subseteq v$;
- 2) $L(A \wedge B) \subseteq \mathbb{D}(L(A) \cap L(B))$;
- 3) $R(A \wedge B) \subseteq \mathbb{D}(R(A) \cup R(B))$;
- 4) $L(A \vee B) \subseteq \mathbb{D}(L(A) \cup L(B))$;
- 5) $R(A \vee B) \subseteq \mathbb{D}(R(A) \cap R(B))$;
- 6) $L(A \supset B) \subseteq \mathbb{D}(R(A) \cup L(B))$;
- 7) $R(A \supset B) \subseteq \mathbb{D}(L(A) \cap R(B))$;
- 8) $L(\neg A) \subseteq \mathbb{D}(R(A))$;
- 9) $R(\neg A) \subseteq \mathbb{D}(L(A))$;
- 10) $L(\forall x A(x)) \subseteq \mathbb{D}(L(A(t)))$, $t \in \text{Exp}(\tau)$;
- 11) $R(\forall x A(x)) \subseteq \mathbb{D}(\bigcup_{y \in \text{Var}(\tau)} R(A(y)))$;
- 12) $L(\exists x A(x)) \subseteq \mathbb{D}(\bigcup_{y \in \text{Var}(\tau)} L(A(y)))$;
- 13) $R(\exists x A(x)) \subseteq \mathbb{D}(R(A(t)))$, $t \in \text{Exp}(\tau)$;
- 14) $L(t\varepsilon\{x|A(x)\}) \subseteq \mathbb{D}(L(A(t)))$;
- 15) $R(t\varepsilon\{x|A(x)\}) \subseteq \mathbb{D}(R(A(t)))$.

4.3. Пусть (L, R) есть систематическое распределение формул на (T, \leq, J, v) . Мы можем придать тогда ему более удобную форму так называемой *полуоценки*. А именно, определим *нижнюю* и *верхнюю* области истинности формулы A следующим образом:

$$|A|^- = (L(A) \supset v) \supset v, \quad |A|^+ = (R(A) \supset v).$$

Удобство использования полуоценки состоит главным образом в том, что (согласно п. 3.5) $|A|^-$ и $|A|^+$ суть элементы булевой алгебры (\mathcal{N}, \subseteq) .

ФАКТ. Полуоценка систематического распределения формул удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $|\perp|^- \subseteq v, |A|^- \subseteq |A|^+$;
- 2) $|A \wedge B|^- \subseteq |A|^- \wedge |B|^- \subseteq |A|^+ \wedge |B|^+ \subseteq |A \wedge B|^+$;
- 3) $|A \vee B|^- \subseteq |A|^- \vee |B|^- \subseteq |A|^+ \vee |B|^+ \subseteq |A \vee B|^+$;
- 4) $|A \supset B|^- \subseteq |A|^+ \Leftrightarrow |B|^- \subseteq |A|^- \Leftrightarrow |B|^+ \subseteq |A \supset B|^+$;
- 5) $|\neg A|^- \subseteq \neg |A|^+ \subseteq \neg |A|^- \subseteq |\neg A|^+$;
- 6) $|\forall x A(x)|^- \subseteq \bigwedge \{|A(t)|^- | t \in \text{Exp}(\tau)\} \subseteq \bigwedge \{|A(y)|^+ | y \in \text{Var}(\tau)\} \subseteq |\forall x A(x)|^+$;
- 7) $|\exists x A(x)|^- \subseteq \bigvee \{|A(y)|^- | y \in \text{Var}(\tau)\} \subseteq \bigvee \{|A(t)|^+ | t \in \text{Exp}(\tau)\} \subseteq |\exists x A(x)|^+$;
- 8) $|t\varepsilon\{x|A(x)\}|^- \subseteq |A(t)|^- \subseteq |A(t)|^+ \subseteq |t\varepsilon\{x|A(x)\}|^+$.

Здесь все булевы операции выполняются в алгебре (\mathcal{N}, \subseteq) .

Этот факт является следствием условий систематичности п. 4.2 и доказывается непосредственной проверкой. Рассмотрим, напр., утверждение $|A|^- \subseteq |A|^+$. По условию $L(A) \cap R(A) \subseteq v$. Следовательно, в алгебре Гейтинга (O, \subseteq) имеем $R(A) \subseteq (L(A) \supset v)$. С другой стороны, в O $(L(A) \supset v) \cap ((L(A) \supset v) \supset v) \subseteq v$. Отсюда $R(A) \cap ((L(A) \supset v) \supset v) \subseteq v$, так что, вновь действуя в O , получим $((L(A) \supset v) \supset v) \subseteq R(A) \supset v$.

4.4. Булевозначная структура для языка второго порядка L_2 есть структура вида

$$M = \langle B, I, \beta, \text{Val} \rangle,$$

где B есть полная булева алгебра (алгебра истинностных значений M); I есть система носителей M — функция, определенная на множестве типов $\{0, 1, 2\}$. При этом $I(\tau)$ — непустое множество для каждого типа τ , $I(1) \subseteq B$, и каждый элемент $a \in I(2)$ есть функция вида $a: I(0) \rightarrow B$. Далее, β есть обычная система приписания значений оцененным термам первого порядка. Наконец, Val есть функция оценивания предикатных символов. А именно, если P есть n -местный предикатный символ, то определено значение $\text{Val}(P(a_1, \dots, a_n)) \in B$ для всяких объектов a_1, \dots, a_n области $I(0)$. Заметим, что, вообще говоря, не обязательно $\text{Val}(P(a_1, \dots, a_n)) \in I(1)$.

Оцененное выражение есть выражение, все параметры которого замещены соответствующими элементами носителей.

Функция Val булевозначной структуры $M = \langle B, I, \beta, \text{Val} \rangle$ может быть естественным образом распространена на произвольные оцененные выражения следующим (хорошо известным) образом.

Будем обозначать $\text{Val}(E)$ через $\|E\|$. Если $P(t_1, \dots, t_n)$ есть оцененный атом, то

$$\|P(t_1, \dots, t_n)\| = \text{Val}(P(\beta(t_1), \dots, \beta(t_n))).$$

Далее,

$$\|A \wedge B\| = \|A\| \wedge \|B\|, \quad \|A \vee B\| = \|A\| \vee \|B\|, \quad \|A \supset B\| = \|A\| \supset \|B\|, \quad \|\neg A\| = \neg \|A\|, \quad \|1\| = 0,$$

$$\|\forall x A(x)\| = \bigwedge_{a \in I(\tau)} \|A(a)\|, \quad \|\exists x A(x)\| = \bigvee_{a \in I(\tau)} \|A(a)\|.$$

Булевы операции здесь выполняются в алгебре B , $\|A\| \in B$, но не обязательно $\|A\| \in I(1)$. Далее, $\|x | A(x)\|$ есть функция $f: I(0) \rightarrow B$ такая, что для всякого элемента $a \in I(0)$ имеем $f(a) = \|A(a)\|$. Мы вновь не требуем, чтобы $f \in I(2)$. Наконец, $\|t \in r\| = \|r\|(\|t\|)$.

Определение булевозначной структуры закончено. Не всякая булевозначная структура языка L_2 согласована с логикой второго порядка PC_2 . Например, значение $\|A(t) \supset \exists x A(x)\|$ аксиомы PC_2 не обязательно есть единица B , если, скажем, $t \in \text{Exp}(2)$. Дело здесь как раз в том, что в общем случае возможно $\|t\| \notin I(2)$.

Булевозначную структуру M языка L_2 назовем (булевозначной) интерпретацией или, в иной терминологии, моделью исчисления второго порядка PC_2 , если для всякого выражения t типа τ , оцененного в M , имеем $\|t\| \in I(\tau)$.

Для булевозначных моделей уже имеет место согласованность с исчислением второго порядка PC_2 .

ФАКТ. Пусть M — булевозначная модель PC_2 . Если $A(x_1, \dots, x_n)$ — формула L_2 , выводимая в исчислении предикатов PC_2 , и a_1, \dots, a_n суть объекты носителей соответствующих типов, то $\|A(a_1, \dots, a_n)\|$ есть единица булевой алгебры.

Доказательство проводим непосредственной индукцией по построению вывода A в исчислении PC_2 .

4.5. Пусть дано систематическое распределение формул (L, R) на упорядоченной структуре пополнения (T, \leq, J, v) . Тогда можно построить некоторую стандартную булевозначную модель M для PC_2 , согласованную (в указанном ниже смысле, см. теорему) с распределением (L, R) . Мы назовем M модельным расширением распределения (L, R) .

а) Прежде всего, для типа $\tau=0$ определим объектную область $I(0)$ — это будет множество всех выражений вида $[t]$, где $t \in \text{Exp}(0)$. Функциональные символы действуют на этой области тривиальным образом: значение выражения $f([r_1], \dots, [r_n])$ есть просто элемент

$[f(r_1, \dots, r_n)]$ области $I(0)$. Тем самым для каждого оцененного терма t определено его значение $\mathfrak{z}(t)$ — элемент области $I(0)$. Элемент $\mathfrak{z}(t)$ получается, проще говоря, если в t стереть все квадратные скобки и заключить полученный терм в квадратные скобки. Это вариант конструкции эрбрановского универсума в теории моделей.

б) Далее, если $a \in I(0)$ и $t \in \text{Exp}(0)$, то определим отношение $a \approx t$ следующим образом:

$$a \approx t \Leftrightarrow a \text{ имеет вид } [t].$$

Перейдем теперь к типу $\tau=1$.

а) Если $a \in \mathcal{N}$ есть элемент полной булевой алгебры (\mathcal{N}, \subseteq) и $A \in \text{Exp}(1)$, то положим по определению

$$a \approx A \Leftrightarrow |A|^- \subseteq a \subseteq |A|^+.$$

б) Объектную область $I(1)$ определим следующим образом:

$$a \in I(1) \Leftrightarrow a \in \mathcal{N} \wedge (\exists A \in \text{Exp}(1))(a \approx A).$$

с) Для $a \in I(1)$ и $A \in \text{Exp}(1)$ определим отношение $a \approx A$ как ограничение отношения $a \approx A$, определенного выше.

Наконец, займемся типом $\tau=2$.

а) Если a есть произвольная функция вида $I(0) \rightarrow \mathcal{N}$ и $t \in \text{Exp}(2)$, то определим

$$a \approx t \Leftrightarrow (\forall b \in I(0))(\forall r \in \text{Exp}(0)) (b \approx r \Rightarrow a(b) \approx (ret)).$$

б) Объектную область $I(2)$ определим следующим образом:

$$a \in I(2) \Leftrightarrow (a: I(0) \rightarrow \mathcal{N}) \wedge (\exists t \in \text{Exp}(2))(a \approx t).$$

Для $a \in I(2)$ и $t \in \text{Exp}(2)$ отношение $a \approx t$ определяется как ограничение отношения п. а) выше на область $I(2) \times \text{Exp}(2)$.

Таким образом, для каждого типа $\tau=0,1,2$ определена объектная область $I(\tau)$ и, кроме того, отношение $a \approx t$, где $a \in I(\tau)$ и $t \in \text{Exp}(\tau)$.

ФАКТ. Каждая область $I(\tau)$ непуста. Более того, для каждой переменной $x \in \text{Var}(\tau)$ существует элемент $a \in I(\tau)$, $a \approx x$.

Например, если выберем произвольную переменную $x \in \text{Var}(2)$ и определим $a: I(0) \rightarrow \mathcal{N}$ соотношением $a([t]) = |tx|^-$ для всякого $t \in \text{Exp}(0)$, то $a \in I(2)$, $a \approx x$, что и требовалось.

Наконец, для произвольного предикатного символа P и объектов $[t_1], \dots, [t_n] \in I(0)$ определим $\text{Val}(P([t_1], \dots, [t_n])) = |P(t_1, \dots, t_n)|^-$.

Тем самым полностью определена булевозначная структура M языка L_2 .

Следующий вопрос состоит, конечно, в том, является ли M моделью исчисления PC_2 . Утвердительный ответ на этот вопрос дает следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $t \in \text{Exp}(\tau)$ и список переменных x_1, \dots, x_n содержит все параметры t . Пусть $x_i \in \text{Var}(\tau_i)$, $a_i \in I(\tau_i)$, $t_i \in \text{Exp}(\tau_i)$, причем $a_i \approx t_i$ для $i=1, \dots, n$. Тогда

$$\|t(a_1, \dots, a_n)\| \approx t(t_1, \dots, t_n).$$

Доказательство этой теоремы происходит непосредственной индукцией по построению выражения t в языке L_2 . При этом используем факт из п. 4.3. Обозначим $t(a_1, \dots, a_n)$ через t' и $t(t_1, \dots, t_n)$ — через t^* . Если t есть атом, то по определению $\|t'\| = |t^*|^-$ и $\|t'\| \approx t^*$ следует из условия 1) факта п. 4.3. Рассмотрим случай, когда t есть импликация $t = (A \supset B)$. По индуктивному предположению $\|A'\| \approx A^*$ и $\|B'\| \approx B^*$, т.е.

$$|A^*|^- \subseteq \|A'\| \subseteq |A^*|^+, \quad |B^*|^- \subseteq \|B'\| \subseteq |B^*|^+.$$

Отсюда, используя условие 4) факта п. 4.3, имеем:

$$|(A \supset B)^*|^- = |A^* \supset B^*|^- \subseteq |A^*|^- \Rightarrow |B^*|^- \subseteq \|A'\| \Rightarrow \|B'\| = \|(A \supset B)'\| \subseteq |A^*|^- \Rightarrow |B^*|^- \subseteq |(A \supset B)^*|^-.$$

Пусть теперь t имеет вид $\{y|A\}$. Определим функцию $f: I(0) \rightarrow \mathcal{N}$, положив $f(a) = \|A'(a)\|$ для всякого $a \in I(0)$. Мы утверждаем, что $f \approx \{y|A^*\}$. В самом деле, возьмем $a \in I(0)$, $a \approx r$, где $r \in \text{Exp}(0)$. Тогда $\|A'(a)\| \approx A^*(r)$ по индуктивному предположению, т.е. $f(a) \approx (r \varepsilon \{y|A^*(y)\})$, т.к.

$$|r \varepsilon \{y|A^*(y)\}|^- \subseteq |A^*(r)|^- \subseteq \|A'(a)\| \subseteq |r \varepsilon \{y|A^*(y)\}|^-.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть A есть формула L_2 и список переменных x_1, \dots, x_n содержит все параметры A . Пусть $x_i \in \text{Var}(\tau_i)$, $a_i \in I(\tau_i)$, $t_i \in \text{Exp}(\tau_i)$, причем $a_i \approx t_i$ для $i=1, \dots, n$. Тогда:

- (i) $L(A(t_1, \dots, t_n)) \subseteq \|A(a_1, \dots, a_n)\|$;
- (ii) $R(A(t_1, \dots, t_n)) \cap \|A(a_1, \dots, a_n)\| \subseteq v$.

Действительно, из определений $|A^*|^-$ и $|A^*|^-$ (см. п. 4.3) имеем $L(A^*) \subseteq |A^*|^-$ и $R(A^*) \subseteq (|A^*|^- \supset v)$; отсюда ввиду приведенной выше теоремы и следует утверждение следствия.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $A(x_1, \dots, x_n)$ есть формула такая, что для некоторых a_1, \dots, a_n , $a_i \approx x_i$, имеем $\|A(a_1, \dots, a_n)\| = 1$ (напр., так будет, если A выводима в PC_2 , см. факт из п. 4.4). Тогда $R(A) \subseteq v$.

Для доказательства используем следствие 1.

§ 5. Построение выделенной модели

5.1. Теперь построим конкретную структуру (T, \leq, J, v) и систематическое распределение (L, R) формул на ней. В качестве T возьмем множество $\{0, 1\}^*$ всех бинарных кортежей с основным упорядочением (см. п. 3.6) и естественным отношением пополнения J (см. п. 3.7).

Рассмотрим (обычное) классическое исчисление секвенций G_2 для PC_2 , в котором формулы заключения повторяются в посылках (см., напр., исчисление $G3$ в [6], §80). Так, правила для импликации имеют вид

$$\frac{(A \supset B)\Gamma \rightarrow \Delta, B(A \supset B)\Gamma \rightarrow \Delta}{(A \supset B)\Gamma \rightarrow \Delta},$$

$$\frac{A\Gamma \rightarrow \Delta(A \supset B)B}{\Gamma \rightarrow \Delta(A \supset B)};$$

правила для принадлежности –

$$\frac{A(t)(t \varepsilon \{x|A(x)\})\Gamma \rightarrow \Delta}{(t \varepsilon \{x|A(x)\})\Gamma \rightarrow \Delta},$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta(t \varepsilon \{x|A(x)\})A(t)}{\Gamma \rightarrow \Delta(t \varepsilon \{x|A(x)\})}$$

(наборы формул в посылках и заключении любой секвенции мы рассматриваем как неупорядоченные).

Аксиомы G_2 имеют вид $A\Gamma \rightarrow \Delta$, где A – произвольная формула L_2 , или же вид $1\Gamma \rightarrow \Delta$.

Правило сечения (cut):

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta A, A\Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta}$$

мы не включаем в состав G_2 . Хорошо известный элементарный факт состоит в том, что исчисление $(G_2 + \text{cut})$ с сечением эквивалентно PC_2 . В частности, формула A выводима в PC_2

тогда и только тогда, когда секвенция $(\rightarrow A)$ выводима в исчислении $(G_2 + \text{cut})$.

Наша же задача состоит в том, чтобы доказать, что правило сечения допустимо в G_2 , и, таким образом, $(G_2 + \text{cut})$ эквивалентно G_2 .

Далее построим примитивно рекурсивную функцию h , приписывающую каждой вершине $p \in \{0,1\}^* = T$ некоторую секвенцию $h(p)$. Эту функцию назовем *распределением секвенций* на T . Прежде всего, каждому чисто нулевому кортежу 0^n припишем пустую секвенцию $h(0^n) = (\rightarrow)$. Далее, пронумеруем все формулы L_2 в простую последовательность $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ и определим $h(0^n 1) = (\rightarrow A_n)$. На этом завершается *базис индукции* построения распределения секвенций h .

Дальнейшее построение $h(p)$ осуществляется индукцией по длине кортежа p : если $h(p)$ уже построено, то строим $h(p * \langle 0 \rangle)$ и $h(p * \langle 1 \rangle)$. Построение $h(p * \langle 0 \rangle)$ и $h(p * \langle 1 \rangle)$ осуществляется последовательным *контрприменением* (т.е. применением "снизу вверх") всех правил исчисления G_2 . Если применяемое правило имеет две посылки, то $h(p * \langle 0 \rangle)$ и $h(p * \langle 1 \rangle)$ соответственно равны этим двум посылкам с заключением $h(p)$. Если же применяемое правило имеет одну посылку, то $h(p * \langle 0 \rangle) = h(p * \langle 1 \rangle)$ и равно именно этой посылке. Если контрприменение правила в данной ситуации невозможно, то положим автоматически $h(p) = h(p * \langle 0 \rangle) = h(p * \langle 1 \rangle)$.

Существенно проводить процесс контрприменения правил систематически, "не забывая" ни одного из возможных контрприменений. Этого можно добиться многими способами, на которых мы не будем подробно останавливаться. Например, можно принимать решение о контрприменении того или иного правила на основании длины δp кортежа p (такая техника применяется в статье М.Такахаша [5]; заметим, что в отличие от [5] мы совсем не заботимся о непротиворечивости наших секвенций и контрприменяем наши правила совершенно автоматически, что делает нашу конструкцию эффективной, а функцию h - примитивно-рекурсивной; см. также указания в [2], п. 4.2).

5.2. ФАКТ. (i) *Всякая формула, встречающаяся в $h(p)$ слева (справа), встречается и в $h(p * \langle i \rangle)$ слева (справа).*

(ii) *Если $h(p * \langle 0 \rangle)$ и $h(p * \langle 1 \rangle)$ обе выводимы в G_2 , то $h(p)$ также выводима в G_2 .*

(iii) *Для всякой формулы A существует кортеж $p \in T$ такой, что $h(p) = (\rightarrow A)$.*

Утверждение (i) имеет место ввиду строения исчисления G_2 , повторяющего все формулы в посылках; утверждение (ii) - ввиду индуктивного построения $h(p)$ путем контрприменения правил G_2 ; утверждение (iii) - в силу базиса индукции построения распределения секвенций h .

5.3. ФАКТ. *Пусть $x \in T$ таково, что для всякого $q \in x$ секвенция $h(q)$ выводима в G_2 . Тогда из $p \in Dx$ следует, что $h(p)$ выводима в G_2 .*

Факт имеет место ввиду утверждения (ii) факта п.5.2 и замечания из п.3.8.

Определим теперь $L(A)$ и $R(A)$ для всякой формулы A . A именно, $p \in L(A) \Leftrightarrow A$ входит в посылку (левую часть) секвенции $h(p)$. И, аналогично, $p \in R(A) \Leftrightarrow A$ входит в правую часть секвенции $h(p)$.

5.4. ФАКТ. (L, R) *есть распределение формул на (T, \Leftarrow) .*

То, что $L(A), R(A) \in O$, следует из утверждения (i) факта п. 5.2.

Определим теперь элемент $v \in \mathcal{N}$ следующим образом:

$$v = D\{p \in T \mid h(p) \text{ есть аксиома } G_2\}.$$

5.5. ФАКТ. *Если $p \in v$, то $h(p)$ выводима в G_2 (т.е. выводима без сечений).*

Для доказательства используем п. 5.3 и определение v .

Таким образом, структуры (T, \leq, J, v) и (L, R) полностью определены.

5.6. ЛЕММА. (L, R) есть систематическое распределение формул на (T, \leq, J, v) .

Выполнение условий 1)–15) п. 4.2 следует из систематичности построения функции h . Например, если $p \in L(A) \cap R(A)$, то формула входит в левую и правую части секвенции $h(p)$, т.е. $h(p)$ есть аксиома G_2 и, значит, $p \in v$.

§6. Основные результаты

Теперь мы готовы осуществить нашу программу. Построим выделенную модель M_0 исчисления PC_2 как модельное расширение (согласно п.4.5) распределения формул (L, R) , построенного в §5.

ТЕОРЕМА 1 (о полноте для исчисления PC_2). Пусть $A(x_1, \dots, x_n)$ есть формула L_2 и $a_1 \approx x_1, \dots, a_n \approx x_n$. Пусть оцененная формула $A(a_1, \dots, a_n)$ истинна в M_0 , т.е. $\|A(a_1, \dots, a_n)\| = 1$. Тогда $A(x_1, \dots, x_n)$ выводима в PC_2 даже без сечений, т.е. секвенция $\rightarrow A(x_1, \dots, x_n)$ выводима в G_2 .

В самом деле, в этом случае $R(A) \subseteq v$ (см. следствие 2 п. 4.5). Выберем вершину p такую, что $h(p) = (\rightarrow A)$ (утверждение (iii) факта из п. 5.2). Тогда $p \in R(A)$ и, значит, $p \in v$. Отсюда $\rightarrow A$ выводима в G_2 согласно п. 5.5.

ТЕОРЕМА 2 (об устранении сечения в PC_2). Если формула A выводима в PC_2 , то секвенция $\rightarrow A$ выводима в G_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если A выводима в PC_2 , то $\|A(a_1, \dots, a_n)\| = 1$ для некоторых $a_1 \approx x_1, \dots, a_n \approx x_n$ (см. факты из пп. 4.4, 4.5). Отсюда $\rightarrow A$ выводима в G_2 ввиду теоремы 1.

§ 7. Об определимости предиката истинности

Допустим, что мы не интересуемся выводимостью без сечений, а лишь полнотой рассматриваемого исчисления. В этом случае можно усовершенствовать нашу булевозначную модель с точки зрения конструктивной определимости предиката истинности и сделать нашу конструкцию полностью финитной. Напомним, что доказать устранимость сечения в PC_2 финитным образом невозможно.

Модифицируем конструкцию §5. В качестве $T \subseteq \{0, 1\}^*$ возьмем теперь множество всех кортежей, содержащих хотя бы одну единицу. Это – гомогенное конечно ветвящееся множество кортежей.

Распределение секвенций h на T строим так же, как в §5, но используем исчисление $(G_2 + \text{cut})$ с сечением вместо G_2 . Это означает, что следует осуществлять систематически и контрприменения правила сечения наряду с другими правилами. Все факты §5 при этом сохраняются по отношению к выводимости в $(G_2 + \text{cut})$. Теорема 1 о полноте также имеет место, только речь будет идти об обычной выводимости в PC_2 , а не в G_2 . Но теперь ввиду систематического контрприменения правила сечения построенное согласно §5 распределение (L, R) обладает следующим свойством *формульной полноты*:

$$\mathbb{D}(L(A)UR(A)) = T$$

для всякой формулы A .

ЛЕММА. Для формально полного распределения имеем $|A|^- = |A|^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathbb{D}(L(A)UR(A)) = T$, то в \mathcal{N} имеем

$$(\mathbb{D}(L(A)UR(A)) \supset v) = v.$$

Но тогда (см. соотношение (iv) п. 3.3)

$$((L(A) \cup R(A)) \supset \circ v) = v.$$

Действуя теперь в O , имеем

$$(L(A) \supset \circ v) \cap (R(A) \supset \circ v) = v$$

и, далее, $(R(A) \supset \circ v) \subseteq (L(A) \supset \circ v) \supset \circ v$, т.е. $|A|^+ \subseteq |A|^-$, что и требовалось доказать.

Если A - замкнутая формула, то отсюда $\|A\| = |A|^+$ (см. теорему из п. 4.5) и, следовательно,

$$p \in \|A\| \Leftrightarrow p \in |A|^+ \Leftrightarrow p \in (R(A) \supset \circ v) \Leftrightarrow (\forall q \leq p)(q \in R(A) \Rightarrow q \in v).$$

Последний предикат является арифметическим $\forall \exists$ -предикатом (Π_2^0 -предикатом).

Таким образом, в этой модели предикат истинности $p \in \|A\|$ от аргументов p и A оказывается ограниченной арифметической сложности. Впервые аналогичный эффект для интуиционистских моделей и интуиционистской логики первого порядка получил, по-видимому, Х.Фридман (1977 г.) в одном неопубликованном манускрипте (см. ссылку в [7], гл. 13, §9.2). Наш алгебраический метод также может быть применен к интуиционистской логике, но мы не будем здесь на этом останавливаться (см. однако конструкцию в [2]).

Более внимательный анализ показывает, что в последней модели и все остальные конструкции (определение областей, значения термов) могут быть сформулированы финитным образом, даже в теории с дополнительными аксиомами, напр., с аксиомой бесконечности, так что предикат истинности можно определить внутри изучаемой теории.

Противоречия с известной теоремой Тарского о неопределимости понятия истинности в теории здесь не происходит именно в силу булевозначности нашей модели. Булева алгебра \mathcal{A} имеет нетривиальный нуль v , и неэлементарным как раз и является вопрос $v \neq 1$, т.е. вырождена алгебра или не вырождена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Драгалин А.Г. *Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств.* - М.: Наука, 1979. - 256 с.
2. Dragalin A.G. *A completeness theorem for intuitionistic logic. An intuitionistic proof* // Proc. of an Advanced Intern. Summer School and Conf. in honour of the 80-th anniversary of Kurt Gödel's birth, Sept. 24 - Oct. 1, 1986, Druzhba, Bulgaria, 1987. - P.109-124.
3. Dragalin A.G. *Cut-elimination theorem for higher-order classical logic. An intuitionistic proof* // Proc. of an Advanced Intern. Summer School and Conf. in honour of the 80-th anniversary of Kurt Gödel's birth, Sept. 24 - Oct. 1, 1986, Druzhba, Bulgaria, 1987. - P.243-251.
4. Rasiowa H., Sikorski R. *The Mathematics of Metamathematics.* - Warszawa, 1963.
5. Takahashi M. *Cut-elimination theorem and Brouwerian-valued models for intuitionistic type theory* // Comment. math. Univ. St. Pauli. - 1971. - V.19. - №1. - P.55-72.
6. Kleene S.C. *Introduction to metamathematics.* - Van Nostrand, 1953. - 550 p.
7. Troelstra A.S., Van Dalen D. *Constructivism in Mathematics.* - North-Holl., 1988.