



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Лукьянов, Об уравнениях для собственных частот резонаторов с кусочно-однородными стенками,  
*ЖТФ*, 1985, том 55, выпуск 5, 969–972

<https://www.mathnet.ru/jtf1266>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.175

19 мая 2025 г., 08:42:38



диэлектрической проницаемости керамики  $\varepsilon^*(T)$  при различных величинах одноосного и гидростатического давлений (рис. 2). При этом была использована зависимость диэлектрической проницаемости от температуры в виде:  $\varepsilon=2000$ , когда  $T \leq T_{\phi}$ , и  $\varepsilon=C(T-T_{\phi}+K)^{-1}$ , если  $T > T_{\phi}$ , где  $K=T_{\phi}^0-T_0$ ,  $C$  и  $T_0$  — константа и температура Кюри—Вейсса. Для численных оценок брались значения физических констант, характерные для титаната бария [3, 4]:  $\alpha_T=6.2 \cdot 10^{-8}$  К·м<sup>2</sup>·н<sup>-1</sup>,  $\alpha_0=4.1 \cdot 10^{-8}$  К·м<sup>2</sup>·н<sup>-1</sup>,  $K=10$  К,  $C=0.91 \cdot 10^5$  К.

Из сопоставления рис. 1 и 2 следует, что экспериментально наблюдаемые изменения максимального значения  $\varepsilon_{\max}$  в области ФП и температуры максимума  $\varepsilon(T)$  в ГП керамике можно объяснить действием анизотропных механических напряжений.

Источником ОМН в ГП керамике, по-видимому, являются остаточные деформации, запаасаемые образцом в процессе прессования и последующего охлаждения. Согласно [1], изменение размеров образцов ГП керамики ЦТС в процессе отжига указывает на существование заметных (до 1.6—5.18 %) остаточных деформаций сжатия  $u$ , параллельных оси прессования. Поэтому при построении рис. 3, описывающего влияние ОМН на фазовый переход в ГП керамике, в качестве параметра используется величина  $u$ . ОМН связаны с остаточными деформациями  $u$  соотношением  $\sigma_i = -c_{i1}^* u$ , где  $c_{i1}^*$  — модули жесткости керамики в парафазе (ось 1 системы координат, связанной с образцом, выбрана параллельно оси прессования). Для численных оценок были использованы значения  $c_{11}^*=1.9 \cdot 10^{11}$  и  $c_{12}^*=0.8 \cdot 10^{11}$  н·м<sup>-2</sup>, характерные для монокристаллического титаната бария в параэлектрическом состоянии [4, 5].

Полученные кривые (рис. 3) качественно правильно отражают влияние режимов ГП на вид диэлектрической аномалии в области фазового перехода. Это свидетельствует о применимости предложенной модели для описания свойств ГП сегнетокерамики.

#### Литература

- [1] ОкадзакИ К. Технология керамических диэлектриков. М.: Энергия, 1976. 331 с.
- [2] Раевский И. П., Резниченко Л. А., Калитванский А. Н. Влияние условий горячего прессования на свойства модельных сегнетоэлектриков со структурой типа перовскита. — ЖТФ, 1980, т. 50, № 9, с. 1983—1989.
- [3] Яффе Б., Кук У., Яффе Г. Пьезоэлектрическая керамика. М.: Мир, 1974. 387 с.
- [4] Иона Ф., Ширани Д. Сегнетоэлектрические кристаллы. М.: Мир, 1968. 555 с.
- [5] Huijbregtse E. J., Bessey W. H., Drougard M. E. Electromechanical Behavior of Single Crystals of Barium Titanate from 25 to 160 °C. — J. Appl. Phys., 1959, v. 30, № 6, p. 899—908.

Ростовский-на-Дону  
государственный университет  
Научно-исследовательский  
институт физики

Поступило в Редакцию  
20 июня 1984 г.

### ОБ УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ РЕЗОНАТОРОВ С КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫМИ СТЕНКАМИ

В. Д. Лукьянов

Пусть поле  $U=U(x, y)$  удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца  $\Delta U(x, y) + k^2 U(x, y) = 0$  в прямоугольнике  $-l_1 < x < l_2, |y| < H$  (рис. 1). Множитель  $e^{-i\omega t}$ , задающий гармоническую зависимость волновых процессов от времени  $t$ , везде опускается; здесь  $\omega$  — круговая частота,  $k = \omega/c$ . На стенках в левой части резонатора ( $x < 0$ ) выполнено условие Дирихле ( $U|_s = 0$ ), в правой ( $x > 0$ ) — условие Неймана ( $dU/dn|_s = 0$ ). В точках сочленения условий  $x=0, y = \pm H$  выполнено условие Мейкснера. Ищется спектр собственных частот  $\omega$  этого резонатора для симметричных по  $y$  собственных форм колебаний, случай антисимметричных по  $y$  собственных форм колебаний рассматривается аналогично.

С использованием метода Винера—Хопфа—Фока [1] предварительно строим обобщенную матрицу рассеяния для кусочно-однородного волновода, который получится из резонатора, если считать, что  $l_1=l_2 = +\infty$ .

Поле в правой ( $x > 0$ ) —  $U_+(x, y)$  и левой ( $x < 0$ ) —  $U_-(x, y)$  частях волновода представимо в виде наложения нормальных волн, распространяющихся ( $\text{Im } \mu_n = \text{Im } \gamma_n = 0$ ) и неоднородных ( $\text{Im } \mu_n > 0, \text{Im } \gamma_n > 0$ ).

$$U_-(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{i\mu_n x} + b_n e^{-i\mu_n x}) \Psi_n(y), \quad (1)$$

где

$$\Psi_n(y) = \frac{Q}{\sqrt{\mu_n}} \cos \frac{\pi(2n-1)}{2H} y, \quad \mu_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi(2n-1)}{2H}\right)^2},$$

$$U_+(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{-i\lambda_n x} + d_n e^{i\lambda_n x}) \varphi_n(y). \quad (2)$$

Здесь

$$\varphi_1(y) = \frac{Q}{\sqrt{2\lambda_1}}, \quad \lambda_1 = k, \quad \varphi_n(y) = \frac{Q}{\sqrt{\lambda_n}} \cos \frac{\pi(n-1)}{H} y,$$

$$\lambda_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi(n-1)}{H}\right)^2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Компоненты матрицы рассеяния  $R_1$  и  $T_1$  — матрицы бесконечного порядка. Элементы матрицы  $R_1$  —  $r_{mn}^{(1)}$  — коэффициенты трансформации,  $n \neq m$  и  $r_{nn}^{(1)}$  — коэффициент отражения набегающей волны  $\Psi_n(y) e^{i\mu_n x}$  со стороны левого волновода в волну  $\Psi_m(y) e^{-i\mu_m x}$  ( $x < 0$ ); нормировочная постоянная  $Q$  выбирается так, чтобы каждая набегающая волна ( $\text{Im } \mu_n = 0$ ) переносила единичную энергию. Здесь

$$r_{mn}^{(1)} = \frac{i\gamma(\mu_n)\gamma(\mu_m)\Psi_n(H)\Psi_m(H)}{Hg_+(\mu_n)g_+(\mu_m)(\mu_m + \mu_n)},$$

где  $\gamma(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$ ;  $g_+(\lambda)g_+(-\lambda) = \gamma(\lambda)\text{th } \gamma(\lambda)H$ ;  $g_+(\lambda)$  — функция, аналитическая в верхней полуплоскости переменной  $\lambda$  ( $\text{Im } \lambda > 0$ )

$$g_+(\lambda) = i\sqrt{k \text{tg } kH} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) \left(1 + \frac{\lambda}{\mu_n}\right)^{-1}.$$

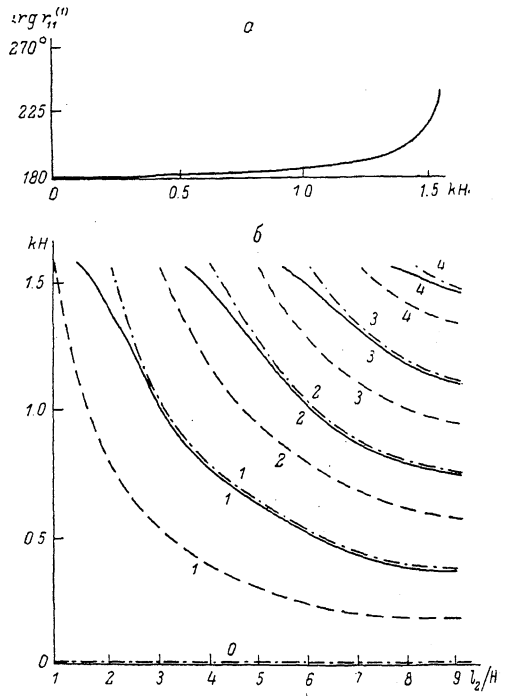


Рис. 2.

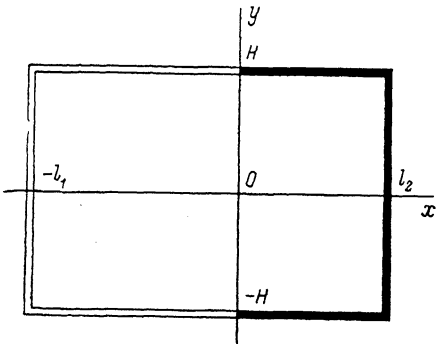


Рис. 1.

Элементы матрицы  $T_1$  —  $t_{mn}^{(1)}$  — коэффициенты трансформации набегающей волны  $\Psi_n(y) e^{i\mu_n x}$  в волну  $\varphi_m(y) e^{i\lambda_m x}$  ( $x > 0$ ). Здесь

$$t_{mn}^{(1)} = \frac{i\gamma(\mu_n)g_+(\lambda_m)\Psi_n(H)\varphi_m(H)}{Hg_+(\mu_n)(\lambda_m - \lambda_n)}.$$

С помощью матриц  $R_1$  и  $T_1$  для произвольного набегающего со стороны левого волновода поля  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Psi_n(y) e^{i\mu_n x}$  строится рассеянное на неоднородности поле  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(1)} \Psi_n(y) e^{-i\mu_n x}$

( $x < 0$ ) и  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{(1)} \varphi_n(y) e^{i\lambda_n y}$  ( $x > 0$ ):  $R_1 A = D^{(1)}$ ,  $T_1 A = B^{(1)}$ , где  $A$ ,  $B^{(1)}$ ,  $D^{(1)}$  — бесконечномерные матрицы-столбцы, состоящие соответственно из элементов  $a_n$ ,  $b_n^{(1)}$ ,  $d_n^{(1)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Аналогично строятся другие компоненты матрицы рассеяния — матрицы  $R_2$  и  $T_2$ , которые по набегающим волнам со стороны правого волновода  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(y) e^{-i\lambda_n x}$  позволяют

найти рассеянные поля  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(2)} \Psi_n(y) e^{-i\mu_n x}$  ( $x < 0$ ) и  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{(2)} \varphi_n(y) e^{i\lambda_n x}$  ( $x > 0$ ):  $R_2 C = B^{(2)}$ ,  $T_2 C = D^{(2)}$ .

Элементы матрицы  $R_2$

$$r_{mn}^{(2)} = \alpha_{mn} \frac{g_+(\lambda_n) g_+(\lambda_m) \varphi_n(H) \varphi_m(H)}{H(\lambda_m + \lambda_n)},$$

где  $\alpha_{00} = 1/2$ , в других случаях  $\alpha_{mn} = 1$ . Элементы матрицы  $T_2$

$$t_{mn}^{(2)} = \frac{i g_+(\lambda_n) \gamma(\mu_m) \varphi_n(H) \Psi_m(H)}{H g_+(\mu_m) (\lambda_n - \mu_m)}.$$

Элементы матриц-столбцов  $C$ ,  $B^{(2)}$ ,  $D^{(2)}$  есть соответственно  $c_n$ ,  $b_n^{(2)}$ ,  $d_n^{(2)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

В силу теоремы взаимности выполнены соотношения:  $r_{nm}^{(1)} = r_{mn}^{(1)}$ ,  $r_{mn}^{(2)} = r_{nm}^{(2)}$ ,  $t_{nm}^{(1)} = t_{mn}^{(1)}$ . Для резонатора представим поле  $U(x, y)$  в виде (1) для  $-l_1 < x < 0$  и в виде (2) для  $0 < x < l_2$ .

Удовлетворим граничным условиям на боковых стенках  $x = -l_1$  и  $x = l_2$ ,  $|y| < H$ , если положим

$$a_n = -b_n e^{2i\mu_n l_1}, \quad c_n = d_n e^{2i\lambda_n l_2}. \quad (3), (4)$$

Условия сшивания полей  $U_+(x, y)$  и  $U_-(x, y)$  при  $x = 0$ ,  $|y| < H$  с использованием матрицы рассеяния имеют вид

$$R_1 A + T_2 C = B, \quad T_1 A + R_2 C = D. \quad (5), (6)$$

Здесь учтено, что поля  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Psi_n(y) e^{i\mu_n x}$  ( $x < 0$ ) и  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(y) e^{-i\lambda_n x}$  ( $x > 0$ ) трансформируются в поля  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \Psi_n(y) e^{-i\mu_n x}$  ( $x < 0$ ) и  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \varphi_n(y) e^{i\lambda_n x}$  ( $x > 0$ ).

Умножим соответственно слева равенство (5) на диагональную матрицу  $M_1 = \text{diag}\{e^{i\mu_1 l_1}, e^{i\mu_2 l_1}, \dots\}$  и равенство (6) на диагональную матрицу  $M_2 = \text{diag}\{e^{i\lambda_1 l_2}, e^{i\lambda_2 l_2}, \dots\}$ . Учитывая соотношения (3) и (4), введем новые матрицы-столбцы  $X = M_1 A$  и  $Y = M_2 C$ . Тогда из (5) и (6) получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $X$  и  $Y$ .

$$(I + M_1 R_1 M_1) X + M_1 T_2 M_2 X = 0, \quad M_2 T_1 M_1 X - (I - M_2 T_2 M_2) X = 0, \quad (7)$$

где  $I$  — единичная матрица бесконечного порядка.

Метод сшивания поля в волноводах с помощью матрицы рассеяния использовался в [1, 2]. Этот метод по существу совпадает с «методом кусочно-однородных решений», предложенным для задач статической теории упругости в [3, 4], и распространен на смешанные динамические задачи теории упругости в [5].

Бесконечная система линейных алгебраических уравнений (7) — система типа Пуанкаре—Коха [6]. Уравнение для собственных частот резонатора получим, приравняв главный определитель системы нулю. Редуцируя главный определитель системы, имеем приближенные уравнения для собственных частот резонатора.

Если  $0 < kH < \pi/2$  (здесь  $\text{Im} \lambda_1 = 0$ ,  $\text{Im} \lambda_n > 0$ ,  $n = 2, 3, \dots$ ,  $\text{Im} \mu_n > 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ), то в первом приближении уравнение для собственных частот резонатора имеет вид:  $1 + r_{11}^{(1)} e^{2ikl_2} = 0$ . Учитывая, что здесь в силу закона сохранения энергии  $|r_{11}^{(1)}| = 1$ , запишем  $r_{11}^{(1)} = e^{i \arg r_{11}^{(1)}}$ . Тогда собственные частоты резонатора определяются из уравнения  $2kl_2 + \arg r_{11}^{(1)} = \pi(2n - 1)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Результаты численного расчета  $\text{agr}_{11}^{(1)}$  приведены на рис. 2, а. Зависимость безразмерных собственных частот резонатора  $k_n H = \omega_n H/c$ ,  $n=1, 2, 3, 4$  от параметра  $l_2/H$  показана на рис. 2, б сплошными линиями, причем для собственной частоты с номером  $n$  соответствующая кривая имеет тот же порядковый номер. Для сравнения показаны зависимости от параметра  $l_2/H$  собственных частот резонатора, получаемого из исследуемого, если его разделить дополнительной стенкой при  $x=0$ ,  $|y| < H$ , на которой выполнено условие Дирихле (здесь собственные частоты  $k'_n H$  вычисляются по формуле  $k'_n H = \pi(2n-1)H/2l_2$ , зависимость их от параметра  $l_2/H$  показана на рис. 2, б штриховыми линиями для  $n=1, 2, 3, 4$ ) или условие Неймана (собственные частоты в этом случае  $k''_n H = \pi n H/l_2$ , зависимость их от  $l_2/H$  — штрихпунктирные линии для  $n=0, 1, 2, 3, 4$ ).

### Литература

- [1] Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974.
- [2] Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. М.: Сов. радио, 1966.
- [3] Нуллер Б. М. Метод кусочно-однородных решений в смешанных задачах теории упругости. — Автореф. докт. дис. Л.: Изд-во ЛПИ, 1973.
- [4] Нуллер Б. М. Контактные задачи для упругого полубесконечного цилиндра. — ПММ, 1970, т. 34, в. 4, с. 621—631.
- [5] Батенькова Е. Ю., Зильберштейн А. С., Нуллер Б. М. Контактные задачи о вынужденных стационарных колебаниях балок на упругой полосе, полуполосе и прямоугольнике. — ПММ, 1979, т. 43, в. 5, с. 902—910.
- [6] Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматгиз, 1962.

Поступило в Редакцию  
22 июня 1984 г.  
В окончательной редакции  
11 сентября 1984 г.

Журнал технической физики, т. 15, в. 5, 1985

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С РАСПАДАЮЩЕЙСЯ ПЛАЗМОЙ БЕЗЭЛЕКТРОДНОГО СВЧ РАЗРЯДА

Л. П. Грачев, И. И. Есаков, Г. И. Мишин,  
М. Ю. Никитин, К. В. Ходатаев

Константа скорости плазмохимической реакции может существенно зависеть от колебательной температуры реагирующих молекул. Так, для реакции  $O^+ + N_2 \rightarrow NO^+ + N$  при изменении колебательной температуры азота от  $10^3$  до  $6 \cdot 10^3$  К она возрастает примерно в 40 раз [1].

Плазму с высокой колебательной температурой молекул можно получить, возбуждая разряд в газах низкого и среднего давлений [2]. Для целей плазмохимии разряд желательно осуществлять в СВЧ диапазоне. Такой разряд можно локализовать в области, удаленной от элементов конструкции плазмохимического реактора, т. е. получать плазму, не загрязненную посторонними молекулами [1]. При определении ее параметров естественно применять и неконтактные методы диагностики. К ним прежде всего относится анализ собственного излучения плазмы и ее зондирование внешним излучением.

Колебательный квант двухатомных молекул обычно составляет десятые доли электрон-вольта [3], т. е. соответствует инфракрасной области. Прямой экспериментальный анализ излучения этого диапазона связан с определенными трудностями. В то же время в низкотемпературной СВЧ плазме время релаксации колебательной энергии молекул значительно больше времени обмена энергией внутри поступательных и вращательных степеней свободы и времени установления теплового равновесия между последними [2]. В этом случае релаксационные характеристики можно определить, пропуская через плазму достаточно интенсивный газодинамический импульс и анализируя изменение его параметров. Так, в [4] в рамках нелинейной акустики теоретически показано, что при прохождении импульса с ударным фронтом через релаксирующую среду можно ожидать, что в сопровождающей системе координат он сдвинется вперед как целое, его фронт расширится, амплитуда уменьшится, а длительность возрастет.